Proposta de resolução

1.1. Como

$$\overline{RQ} = \sqrt{(-5+2)^2 + (5-1)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{41}$$

então a condição que define a superfície esférica de centro nem R e que passa no ponto Q é

$$(x+5)^2 + (y-5)^2 + (z+3)^2 = \left(\sqrt{41}\right)^2 \Leftrightarrow (x+5)^2 + (y-5)^2 + (z+3)^2 = 41$$

A opção correta é a **(C)**.

1.2. Uma vez que o quadrilátero é um trapézio então os lados $[PQ]$ e $[RS]$ são paralelos. Consequentemente, $\overrightarrow{RS}$ e $\overrightarrow{QP}$ são colineares e o plano pretendido é perpendicular a $\overrightarrow{QP}$.
$\overrightarrow{QP} = P - Q = (3, -2, 1)$.
Assim, o plano pretendido é definido pela condição $3x - 2y + z + d = 0$, $d \in \mathbb{R}$. Substituindo $P(1, -1, 2)$ nesta equação temos

$$3 + 2 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -7.$$

Podemos concluir que a equação do plano pretendido é $3x - 2y + z - 7 = 0$.

2.

$$\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow -\cos\alpha = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{5}.$$

$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.
$\cos\left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(-\frac{7\pi}{2} + 4\pi + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha$.
Logo,

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) + 2\cos\left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha.$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha + \frac{1}{25} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{\sqrt{24}}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{2\sqrt{6}}{5}}{\frac{1}{5}} = 2\sqrt{6}$.
Consequentemente

$$-\operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha = -2\sqrt{6} - \frac{4\sqrt{6}}{5} = -\frac{14\sqrt{6}}{5}.$$

3.
3.1. O número de possibilidades de escolher 6 raquetes de um conjunto de 12 é ${}^{12}C_6$. As restantes 6 raquetes ficam no segundo conjunto de 6 raquetes.
O número de casos favoráveis a formar um conjunto com três raquetes de badminton e três de ténis para o primeiro conjunto de 6 raquetes é ${}^{6}C_3 \times {}^{6}C_3$. Novamente, as restantes raquetes ficam para o segundo conjunto.
Pela Lei de Laplace temos que a probabilidade pedida é

$$\frac{{}^{6}C_3 \times {}^{6}C_3}{{}^{12}C_6} \approx 0{,}43.$$

3.2. Consideremos os acontecimentos:
M: “ser mulher”;
B: “praticar badminton”.
Do enunciado podemos obter os dados seguintes:
$P(M) = 0{,}65$
$P(B|\overline{M}) = \dfrac{1}{7}$;
$P(M|B) = \dfrac{5}{6}$;

Rui Paiva

$P\left(M\cap\overline{B}\right)$ é a probabilidade pedida.
Notemos que

$$P(\overline{M})=1-P(M)=1-0{,}65=0{,}35,$$

$$P\left(B|\overline{M}\right)=\frac{1}{7}\Leftrightarrow\frac{P\left(B\cap\overline{M}\right)}{P\left(\overline{M}\right)}=\frac{1}{7}\Leftrightarrow P\left(B\cap\overline{M}\right)=\frac{1}{7}P\left(\overline{M}\right)$$
$$\Leftrightarrow P\left(B\cap\overline{M}\right)=0{,}05\Leftrightarrow P(B)-P(B\cap M)=0{,}05$$

e

$$P(M|B)=\frac{5}{6}\Leftrightarrow\frac{P(M\cap B)}{P(B)}=\frac{5}{6}\Leftrightarrow P(M\cap B)=\frac{5}{6}P(B).$$

Consequentemente

$$\begin{cases}P(B)-P(B\cap M)=0{,}05\\ P(M\cap B)=\frac{5}{6}P(B)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P(B\cap M)=P(B)-0{,}05\\ P(B)-0{,}05=\frac{5}{6}P(B)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}---\\ \frac{1}{6}P(B)=0{,}05\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}P(B\cap M)=0{,}3-0{,}05\\ P(B)=0{,}3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P(B\cap M)=0{,}25\\ P(B)=0{,}3.\end{cases}$$

Temos finalmente

$$P\left(M\cap\overline{B}\right)=P(M)-P(M\cap B)=0{,}65-0{,}25=0{,}4.$$

A probabilidade de o sócio escolhido ser mulher e praticar ténis é portanto 40%.

4. Podemos formar um triângulo escolhendo:

- dois pontos da reta r e um ponto da reta s – há ${}^5C_2\times n$ possibilidades;
- dois pontos da reta S e um ponto da reta r – há $5\times{}^nC_2$ possibilidades.

A solução da equação seguinte dá-nos o valor de n pedido.

$${}^5C_2\times n+5\times{}^nC_2=175\Leftrightarrow 10n+5\times\frac{n!}{(n-2)!\times 2!}=175$$
$$\Leftrightarrow 10n+5\times\frac{n\times(n-1)\times(n-2)!}{(n-2)!\times 2!}=175\Leftrightarrow 10n+\frac{5}{2}n(n-1)=175$$
$$\Leftrightarrow 20n+5n^2-5n=350\Leftrightarrow n^2+3n-70=0\Leftrightarrow n=-10\vee n=7.$$

Podemos concluir que $n=7$.

5.
$\lim v_n=2-\dfrac{5}{+\infty}=2-0^+=2^-$.
$\lim g\left(v_n\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)=1$.
Podemos concluir que a opção correta é a **(B)**.

6.

$$\begin{cases}u_6+u_{20}=-5\\ u_{19}=4u_7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+5r+u_1+19r=-5\\ u_1+18r=4\left(u_1+6r\right)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=-\frac{5}{2}-12r\\ -3u_1-6r=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}---\\ \frac{15}{2}+36r-6r=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}---\\ r=-\frac{15}{60}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=-\frac{5}{2}+3\\ r=-\frac{1}{4}\end{cases}$$

Rui Paiva Rui Paiva Rui Paiva Rui Paiva

Rui Paiva

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ r = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Assim $S_{16} = \dfrac{u_1 + u_{16}}{2} \times 16 = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 15 \times \left(-\frac{1}{4}\right)}{2} \times 16 = -22.$

7. Seja $w = re^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z \times w = i \Leftrightarrow 2re^{i\left(\theta + \frac{3\pi}{5}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2r = 1 \\ \theta + \frac{3\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ \theta = -\frac{\pi}{10} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

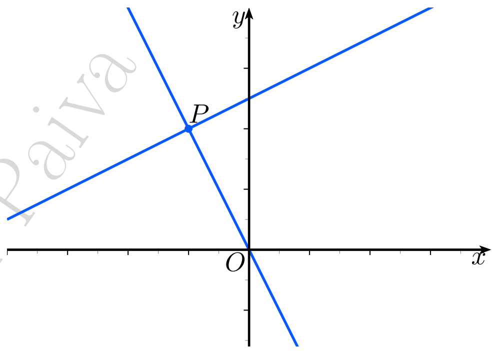
Para $k = 1$ temos $\theta = \frac{19\pi}{10}$.
Podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

8. Seja $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(1+2i)z + (1-2i)\overline{z} + 10 = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} (1+2i)z + \overline{(1+2i)z} = -10$$
$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} 2\,\mathrm{Re}\left((1+2i)(x+yi)\right) = -10 \Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}\left(x - 2y + (2x+y)\,i\right) = -10$$
$$\Leftrightarrow 2x - 4y = -10 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

(1) $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.
(2) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$.

O ponto da reta com menor módulo é o ponto da reta mais próximo da origem. Corresponde ao ponto de interseção da reta perpendicular à reta de equação $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ que passa na origem. A figura seguinte ilustra a situação.



A reta perpendicular à reta de equação $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ que passa no origem é definida pela equação $y = -2x$. Vamos determinar o seu ponto de interseção resolvendo o sistema seguinte.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ --- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{2}x = \frac{5}{2} \\ --- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Podemos concluir que $-1 + 2i$ é o número complexo pretendido.

9.
9.1.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x - e^{-x}}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{e^{-x}}{x}\right)$$

$$\overset{(1)}{=} 1 + \lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y} = 1 + \infty = +\infty.$$

(1) $y = -x \Leftrightarrow x = -y$; $x \to -\infty \Rightarrow y \to +\infty$. Podemos concluir que o gráfico de f não admite assíntotas horizontais quando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 3 \right)$$

$$\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} - 3 = \frac{\sqrt{1+0}}{1+0} - 3 = -2.$$

Podemos concluir que a reta de equação $y = -2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

9.2. Para $x < 0$,

$$f'(x) = \frac{(1+e^{-x})\,x - x + e^{-x}}{x^2}.$$

O declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa -2 é dado por

$$f'(-2) = \frac{(1+e^2) \times (-2) + 2 + e^2}{4} = -\frac{e^2}{4}.$$

Podemos que concluir que a sua equação reduzida é da forma $y = -\frac{e^2}{4}x + b$, $b \in \mathbb{R}$. Substituindo nesta equação as coordenadas do ponto de tangência $T\,(-2, f(-2)) = \left(-2, \frac{-2-e^2}{-2}\right) = \left(-2, \frac{2+e^2}{2}\right)$ temos

$$\frac{2+e^2}{2} = -\frac{e^2}{4} \times (-2) + b \Leftrightarrow b = 1.$$

Deste modo, $y = -\frac{e^2}{4}x + 1$ é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -2.

10. $D_h = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Temos $h'(x) = \cos x - 2\cos x \operatorname{sen} x = \cos x - \operatorname{sen}(2x)$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \operatorname{sen}(2x) \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vamos agora atribuir valores inteiros a k em cada uma das duas famílias de soluções de modo a encontrar as soluções pertencentes ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
No caso de $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$,

- para $k = -1$ temos $x = -\frac{\pi}{2} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- para $k = 0$ temos $x = \frac{\pi}{6} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- para $k = 1$ temos $x = \frac{5\pi}{6} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Podemos concluir que esta família admite a solução $\frac{\pi}{6}$ no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
No caso de $x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi$,

- para $k = -1$ temos $x = -\frac{3\pi}{2} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- para $k = 0$ temos $x = \frac{\pi}{2} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Podemos concluir que esta família não admite soluções no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Deste modo, $\frac{\pi}{6}$ é o único zero de h'.
Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de h' e da monotonia de h.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h	1	$\nearrow$	Max	$\searrow$	N.D.

Rui Paiva

Nota:
$h'(0) = 1 > 0$.
$h'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$.
Logo, h é crescente em $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ e decrescente em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$.
$h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$ é máximo local e $h(0) = 1$ é mínimo local.

11.
11.1.

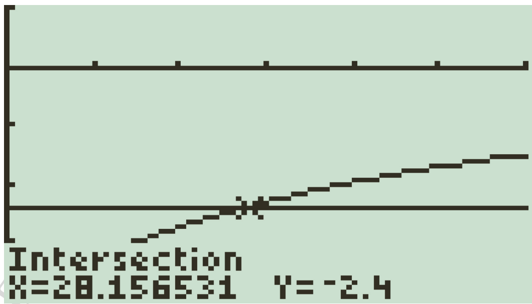
$$T\left(t_1\right) = 30 \Leftrightarrow 20 + 100e^{-kt_1} = 30 \Leftrightarrow e^{-kt_1} = \frac{1}{10}$$
$$\Leftrightarrow \ -kt_1 = \ln\frac{1}{10} \Leftrightarrow -kt_1 = \ln 10^{-1} \Leftrightarrow -kt_1 = -\ln 10 \Leftrightarrow k = \frac{\ln 10}{t_1}.$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(C)**.

11.2. Uma equação que permite resolver o problema é

$$tmv_{[0,t_2]}T = -2{,}4 \Leftrightarrow \frac{T\left(t_2\right) - T(0)}{t_2 - 0} = -2{,}4$$
$$\Leftrightarrow \frac{20 + 100e^{-0{,}04t_2} - 120}{t_2} = -2{,}4 \Leftrightarrow \frac{100e^{-0{,}04t_2} - 100}{t_2} = -2{,}4.$$

No gráfico seguinte, obtido através de uma calculadora gráfica, estão representados os gráficos de $y = \frac{100e^{-0{,}04x} - 100}{x}$ e $y = -2{,}4$ no intervalo $[0, 60]$ e assinalado o seu ponto de interseção.



Podemos concluir que $t_2 \approx 28{,}157$.
Como $0{,}157 \times 60 \approx 9$, podemos concluir que o valor de t_2 corresponde a 28 minutos e 9 segundos.

12. Como $0 \notin \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ existe se e só se

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^+} g(x).$$

Vamos portanto determinar os limites laterais no ponto 0.

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{x^3 - x}{x^2 - x} + k\right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{x(x-1)(x+1)}{x(x-1)} + k\right) = \lim_{x \to 0^-} (x + 1 + k) = 1 + k.$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} (2 + x \ln x) \overset{(0 \times \infty)}{=}$$
$$\overset{(1)}{=} 2 + \lim_{y \to +\infty} \frac{\ln\frac{1}{y}}{y} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} 2 - \lim_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{y} \overset{(2)}{=} 2 - 0 = 2.$$

(1) Efetuou-se a mudança de variável $y = \frac{1}{x}$. Assim, $x = \frac{1}{y}$ e $x \to 0^+ \Rightarrow y \to +\infty$.

(2) Limite notável: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Deste modo

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^+} g(x) \Leftrightarrow 1 + k = 2 \Leftrightarrow k = 1.$$

13. Comecemos por determinar o domínio da condição:

$$D = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x > 0 \wedge 3 - 2x > 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x < 1 \wedge x < \frac{3}{2}\right\} =]-\infty, 1[.$$

$$\begin{aligned}
& x\ln(1-x) - \ln(1-x) = (1-x)\ln(3-2x) \Leftrightarrow \ln(1-x)(x-1) + (x-1)\ln(3-2x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-1)(\ln(1-x) + \ln(3-2x)) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee \ln((1-x)(3-2x)) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x = 1 \vee 3 - 5x + 2x^2 = 1) \wedge x \in D \Leftrightarrow \left(x = 1 \vee x = 2 \vee x = \frac{1}{2}\right) \wedge x \in D \\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Logo $S = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

14. Seja α a amplitude de AOB.
A ordenada de C é igual a $\operatorname{sen}(3\alpha)$.
Como a área do triângulo $[AOB]$ é igual a k temos

$$\frac{1 \times \operatorname{sen}\alpha}{2} = k \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = 2k.$$

Notemos que

$$\operatorname{sen}(3\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha + 2\alpha) = \operatorname{sen}\alpha\cos(2\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha)\cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha\left(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\right) + 2\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha.$$

Pela fórmula fundamental da trigonometria temos

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow 4k^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - k^2.$$

Deste modo,

$$\operatorname{sen}\alpha\left(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\right) + 2\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha = 2k\left(1 - 4k^2 - 4k^2\right) + 2 \times 2k\left(1 - 4k^2\right) = 6k - 32k^3.$$