Proposta de resolução

1.1. Para uma reta ser perpendicular à reta EF, os seus vetores diretores devem ser perpendiculares ao vetor $(-3,-2,2)$. Como $(2,-3,0)\cdot(-3,-2,2)=-6+6+0=0$ e $(0,3,3)\cdot(-3,-2,2)=0-6+6=0$, as alternativas (A) e (C) são possíveis.
Para verificar a qual delas o ponto E pertence, devemos substituir as suas coordenadas nas equações vetoriais apresentadas. Relativamente a (C) temos

$$(7,2,15)=(7,-10,3)+k(0,3,3)\Leftrightarrow(0,12,12)=(0,3k,3k)\Leftrightarrow k=4.$$

Deste modo, **(C)** é a resposta correta.

1.2. Comecemos por notar que B é o ponto de interseção do plano FGB com o eixo Oy. Como $(-3,-2,2)$ é um vetor diretor da reta EF então $\vec{n}=(-3,-2,2)$ é um vetor normal ao plano FGB. Consequentemente, este é definido por uma equação da forma $-3x-2y+2z+d=0$, para $d\in\mathbb{R}$. Substituindo $G(6,10,13)$ nesta equação temos

$$-3\times6-2\times10+2\times13+d=0\Leftrightarrow d=12$$

e podemos concluir que $-3x-2y+2z+12=0$ é uma equação geral do plano FGB. Substituindo $B(0,b,0)$ nesta equação temos

$$0-2b+12=0\Leftrightarrow b=6$$

e podemos concluir que $B(0,6,0)$.
O raio da superfície esférica é dado por

$$r=\overline{EG}=\sqrt{(7-6)^2+(2-10)^2+(15-13)^2}=\sqrt{69}.$$

A equação reduzida da superfície esférica com centro no ponto B e que passa no ponto D é portanto

$$x^2+(y-6)^2+z^2=69.$$

2. Comecemos por notar que $A(3\cos\alpha,3\operatorname{sen}\alpha)$ e $B(-3\cos\alpha,-3\operatorname{sen}\alpha)$.
Assim, $\overline{BC}=|-3\operatorname{sen}\alpha|=3\operatorname{sen}\alpha$, pois $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.
A altura do triângulo $[ABC]$ relativamente à base $[BC]$ tem de medida a diferença entre as abcissas de C e A, ou seja

$$-3\cos\alpha-3\cos\alpha=-6\cos\alpha.$$

A área do triângulo $[ABC]$ é portanto dada por

$$\frac{3\operatorname{sen}\alpha(-6\cos\alpha)}{2}=-9\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha.$$

3. Consideremos os acontecimentos:
M: “ser mulher";
H: “ser homem";
E: “ser estrangeira".
Do enunciado temos:
$P(M)=0{,}6\Rightarrow P(H)=0{,}4$ e $P(H\cap E)=0{,}15$.
A probabilidade pedida é $P\left(\overline{E}|H\right)$.
Temos portanto:

$$\begin{aligned}P\left(\overline{E}|H\right)&=\frac{P\left(\overline{E}\cap H\right)}{P(H)}=\frac{P(H)-P(E\cap H)}{P(H)}\\&=\frac{0{,}4-0{,}15}{0{,}4}=0{,}625.\end{aligned}$$

Deste modo, **(D)** é a resposta correta.

4. O esquema seguinte explica a situação.

$^3A_2 \times {}^5C_2 \times {}^5C_2 \times 4! \times 8!$ modos de distribuir os 14 elementos.

Permutação dos 8 jogadores na carrinha

Permutação dos 4 jogadores no automóvel

Há $^5C_2$ possibilidades de escolher 2 homens entre os 5 disponíveis

Há $^5C_2$ possibilidades de escolher 2 mulheres entre as 5 disponíveis

n.º de possibilidades de distribuir 2 condutores escolhidos entre os 3

5. Como são 30 alunos e 60% são raparigas então há $0{,}6 \times 30 = 18$ raparigas e $30 - 18 = 12$ rapazes.
Uma vez que um terço dos rapazes tem 17 anos então há $\frac{1}{3} \times 12 = 4$ rapazes com 17 anos. Consequentemente há $12 - 4 = 8$ rapazes com 15 ou 16 anos.
Uma vez que um terço das raparigas tem 15 ou 16 anos então há $\frac{1}{3} \times 18 = 6$ raparigas com 15 ou 16 anos.
Assim, há $18 - 6 = 12$ raparigas com 17 anos.
O número de casos possíveis de escolha de 5 alunos é $^{30}C_5$.
O número de casos favoráveis a o grupo de cinco alunos incluir o André, a Beatriz, dois jovens com 17 anos escolhidos entre os 12 disponíveis e um jovem com 15 ou 16 anos escolhido entre os 12 disponíveis é $^{16}C_2 \times {}^{12}C_1$.
Por conseguinte, a probabilidade pedida é

$$\frac{^{16}C_2 \times {}^{12}C_1}{^{30}C_5} \approx 0{,}01.$$

6. Notemos que

$$v_8 = v_5 \times r^3 \Leftrightarrow r^3 = \frac{108}{4} \Leftrightarrow r = 3.$$

Assim, $v_6 = v_5 \times r = 4 \times 3 = 12$.
A opção correta é a **(A)**.

7. A subsucessão dos números ímpares é $2 + \frac{1}{n}$.

$$\frac{83}{41} \le 2 + \frac{1}{n} \le \frac{67}{33} \Leftrightarrow \frac{1}{41} \le \frac{1}{n} \le \frac{1}{33} \Leftrightarrow 33 \le n \le 41.$$

Os números ímpares compreendidos entre 33 e 41 são $33, 35, 37, 39$ e 41.
Temos portanto 5 termos de ordem ímpar.

8. Comecemos por determinar w na forma trigonométrica.

$$w = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{3\pi}{28}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{28}\right)} = e^{i\frac{\pi}{7}}.$$

Uma vez que o afixo de w é um dos vértices de um polígono regular com centro na origem do referencial então w é uma raiz índice n de w^n, onde $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que $|w| = 1$ e um dos vértices do polígono pertence ao semieixo real positivo, os vértices do polígono regular são as raízes índice n de 1.
Assim,

$$w^n = 1 \Leftrightarrow e^{in\frac{\pi}{7}} = 1 \Leftrightarrow n\frac{\pi}{7} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 14k, k \in \mathbb{Z}.$$

Para $k = 1$ temos $n = 14$.

A opção correta é a **(B)**.

9. Comecemos por determinar w na forma algébrica.

$$\begin{aligned} w &= \frac{z_1 \times z_2}{z_3} = \frac{(-3+2i)(1+2i)}{2-i} = \frac{-7-4i}{2-i} \\ &= \frac{(-7-4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-10-15i}{5} = -2-3i. \end{aligned}$$

Deste modo, $|w| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.
Como o afixo de w pertence ao terceiro quadrante então $\text{Arg}(w) \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$.
Uma vez que $-3 < -2$, o afixo de w localiza-se abaixo da bissetriz dos quadrantes ímpares. Temos portanto $\text{Arg}(w) \in \left]-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[$.

10.1.
$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \left(-x^2(1+2\ln x)\right) = -1(1+0) = -1 = f(1)$.

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{5-5e^{x-1}}{x^2+3x-4} = -5\lim_{x\to1^+} \frac{e^{x-1}-1}{(x-1)(x+4)} = \star$$

De facto, como $x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-4$ então $x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$.
Fazendo a mudança de variável $y = x-1 \Leftrightarrow x = y+1$ temos $y \to 0^+$ e

$$\begin{aligned} \star &= -5\lim_{y\to0^+} \frac{e^y-1}{y(y+5)} = -5\lim_{y\to0^+} \frac{e^y-1}{y} \times \lim_{y\to0^+} \frac{1}{y+5} \\ &= -5 \times 1 \times \frac{1}{5} = -1. \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = f(1)$ então f é contínua em $x=1$.

10.2. Para $x \in]0,1[$,

$$f'(x) = -2x(1+2\ln x) - x^2 \times \frac{2}{x} = x(-2-4\ln x - 2) = x(-4-4\ln x).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x=0 \vee \ln x = -1) \wedge x \in]0,1[\Leftrightarrow x = e^{-1}.$$

Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de f' e da monotonia de f em $]0,1[$.

x	0		e^{-1}		1
x		$+$	$+$	$+$	
$-4-4\ln x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	max	$\searrow$	

Podemos concluir que f é decrescente em $\left[e^{-1}, 1\right[$ e crescente em $\left]0, e^{-1}\right]$.
$f\left(e^{-1}\right) = -e^{-2}\left(1+2\ln e^{-1}\right) = e^{-2}$ é máximo relativo.

11. Como $g'(x) = \cos x - x\,\text{sen}\,x + \cos x = 2\cos x - x\,\text{sen}\,x$ é a soma e o produto de funções contínuas em $\mathbb{R}$ então g' é contínua em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.
$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$.
$g'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$.

Com $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{1}{2} < \dfrac{3\pi}{2}$, o Teorema de Bolzano garante que $\exists c \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[: g'(c) = -\dfrac{1}{2}$.

Deste modo, a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa c tem declive $-\dfrac{1}{2}$.

12.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x^2 - \ln x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2 - \frac{\ln x}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2 - \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x}}$$
$$= \frac{1}{2 - 0 \times 0} = \frac{1}{2}.$$

NOTA:
Limite notável $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(h(x) - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - \ln x} - \frac{1}{2}x\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x \ln x}{4x^2 - \frac{2\ln x}{x^2}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{\ln x}{x}}{4x^2 - \frac{\ln x}{x} \times \frac{2}{x}}$$
$$= \frac{-0}{4 - 0} = 0.$$

Podemos concluir que $y = \dfrac{1}{2}x$ é a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de h.

13.1. A altura do combustível no depósito no início do vazamento é

$$a(0) = 1{,}8 - 0{,}216^{\frac{2}{3}}.$$

Como metade da altura do combustível no depósito é $0{,}9\ m$, o número pedido é

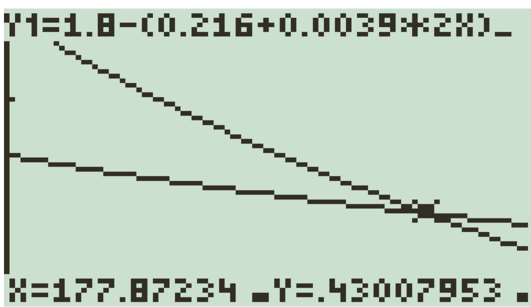
$$1{,}8 - 0{,}216^{\frac{2}{3}} - 0{,}9 = 2{,}54.$$

A opção correta é a **(B)**.

13.2. Podemos equacionar o problema com a equação

$$a(2t_1) = \frac{1}{2}a(t_1) \Leftrightarrow 1{,}8 - (0{,}216 + 0{,}0039 \times 2t_1)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}\left(1{,}8 - (0{,}216 + 0{,}0039t_1)^{\frac{2}{3}}\right).$$

No gráfico seguinte, obtido através de uma calculadora gráfica, estão representados os gráficos de $y = a(2t_1)$ e $y = a(t_1)$ e assinalado o ponto de interseção.



Podemos concluir que $t_1 \approx 177{,}71$, ou seja 177 minutos e 43 segundos.

14. Comecemos por determinar o domínio da equação.

$$D = \{x \in \mathbb{R} : (1-x)e^{x-1} > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x > 0\} =]-\infty, 1[.$$

No conjunto D temos

$$\ln\left((1-x)\,e^{x-1}\right) = x \Leftrightarrow (1-x)\,e^{x-1} = e^x \Leftrightarrow 1 - x = e \Leftrightarrow x = 1 - e.$$

Podemos concluir que $1-e$ é a única solução da equação.

15. Comecemos por determinar as abcissas dos pontos de interseção dos gráficos de f e g.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow k\,\mathrm{sen}\,(2x) = k\cos x \overset{k>0}{\Leftrightarrow} \mathrm{sen}\,(2x) = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vamos agora atribuir valores inteiros a k em cada uma das duas famílias de soluções de modo a encontrar as soluções pertencentes ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
No caso de $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$,

- para $k = -2$ temos $x = -\frac{7\pi}{2} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- para $k = -1$ temos $x = -\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- para $k = 0$ temos $x = \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- para $k = 1$ temos $x = \frac{5\pi}{6} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Podemos concluir que esta família admite as soluções $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{6}$ no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
No caso de $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$,

- para $k = -1$ temos $x = -\frac{3\pi}{2} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- para $k = 0$ temos $x = \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- para $k = 1$ temos $x = \frac{5\pi}{2} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Podemos concluir que esta família admite a solução $\frac{\pi}{2}$ no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Deste modo, $A\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $B\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}k\right)$ e $C\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.
Como o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B temos

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3}\pi, -\frac{\sqrt{3}}{2}k\right) \cdot \left(\frac{\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}k\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-2\pi^2}{9} + \frac{3}{4}k^2 = 0 \Leftrightarrow k^2 = \frac{8\pi^2}{27} \Leftrightarrow k = \pm\frac{2\sqrt{6}}{9}\pi.$$