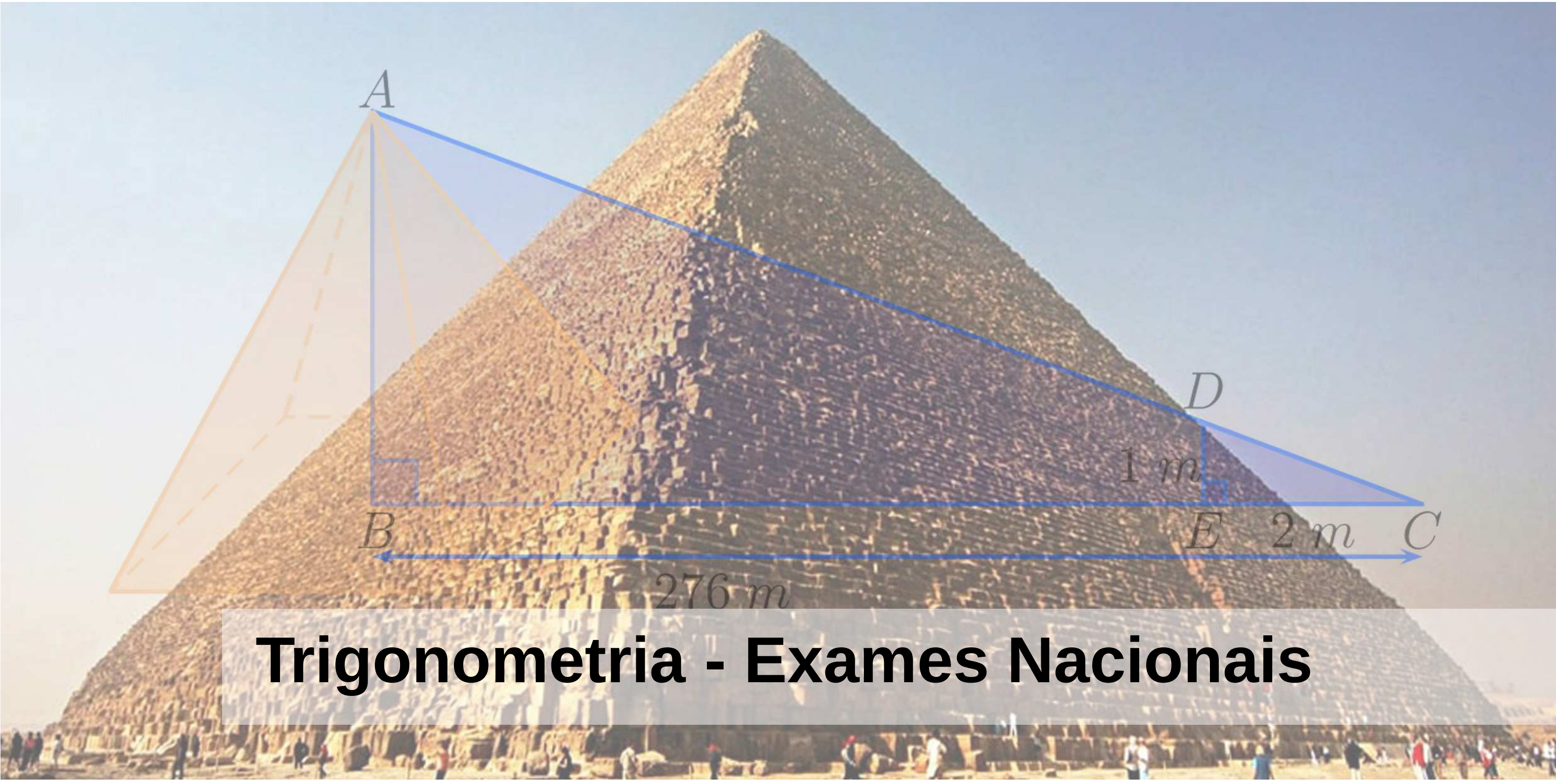


Trigonometria - Exames Nacionais

1. Seja h a função, de domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ definida por $h(x) = \operatorname{sen} x + \cos^2 x$.
Estude, sem recorrer à calculadora, a função h quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.
Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

Exame nacional de 2021 - 2.ª fase

2. Considere, para um certo número real positivo k, as funções f e g, de domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, definidas por $f(x) = k \operatorname{sen}(2x)$ e $g(x) = k \cos x$.
Sejam, num referencial ortonormado do plano, A, B e C os pontos de intersecção dos gráficos de f e g, sendo A o ponto de menor abcissa e C o ponto de maior abcissa.
Sabe-se que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B.
Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de k.

Exame nacional de 2021 - 1.ª fase

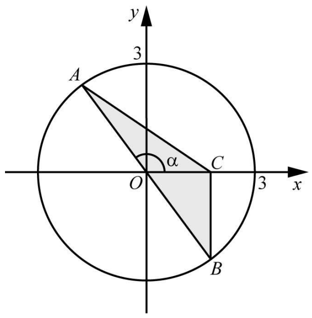
3. Sabe-se que $\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{5}$ e que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) + 2\cos\left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)$.
Apresente o resultado na forma $\frac{a\sqrt{b}}{c}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{N}$.

Exame nacional de 2021 - 2.ª fase

4. Na figura, estão representados, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro em O e raio 3 e o triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro da circunferência;
- α é a inclinação da reta AB $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$;
- o ponto C pertence ao semieixo positivo Ox;
- a reta BC é paralela ao eixo Oy.



Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada pela expressão $-9 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$

Exame nacional de 2021 - 1.ª fase

5. Seja h a função, de domínio $]-\infty, 4[$, definida por

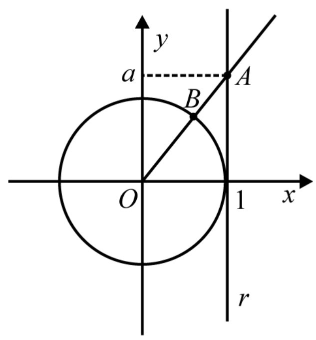
$$h(x) = \begin{cases} 1 + xe^{x-1} & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\operatorname{sen}(x-1)} & \text{se } 1 < x < 4 \end{cases}$$

Averigue se a função h é contínua em $x = 1$.

Exame nacional de 2020 - 2.ª fase

6. Na figura, estão representados, num referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica, a reta r de equação $x = 1$, e um ponto A, de ordenada a $(a > 1)$, pertencente à reta r.

Está também representada a semirreta $\dot{O}A$, que interseta a circunferência trigonométrica no ponto B.
Qual das expressões seguintes dá, em função de a, a abcissa do ponto B?



(A) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$

(B) $\sqrt{a^2+1}$

(C) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}$

(D) $\sqrt{a^2-1}$

Exame nacional de 2020 - 1.ª fase

7. Sejam f e g as funções definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2$ e $g(x) = \cos x$.
Qual é o declive da reta tangente ao gráfico da função $f \circ g$ no ponto de abcissa $\dfrac{\pi}{4}$?

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 2

Exame nacional de 2020 - 2.ª fase

8. O mecanismo de manivela-biela é composto por uma manivela de comprimento fixo, que efetua um movimento de rotação (sempre no mesmo sentido), e por uma biela, também de comprimento fixo, que transforma esse movimento de rotação no movimento alternado de translação de um pistão.
Na Figura 1, está representado esse mecanismo.

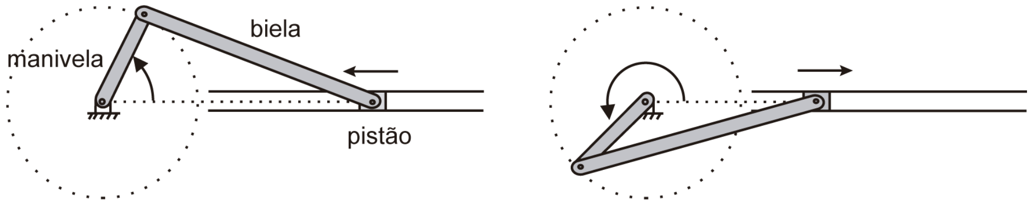


Figura 1

Na Figura 2, está representado um esquema do mecanismo descrito.

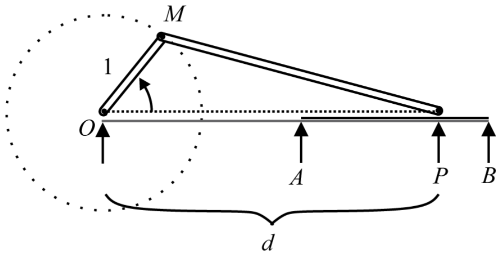


Figura 2

Relativamente a esta figura, sabe-se que:

- o ponto P representa o pistão;
- o segmento de reta $[OM]$ representa a manivela, que tem $1\ cm$ de comprimento;
- o segmento de reta $[MP]$ representa a biela;
- os pontos A e B são os pontos em que a distância do pistão ao centro de rotação da manivela, O, é mínima e máxima, respetivamente;
- os pontos O, A, P e B são colineares.

Sabe-se que o movimento de rotação da manivela se inicia quando o pistão se encontra na posição B e que a manivela descreve voltas completas a uma frequência angular constante. Admita que a função que dá, em centímetros, a distância do pistão ao ponto O, em função do tempo, t, em segundos, contado a partir do instante em que é iniciado o movimento, é dada por

$$d(t) = \cos t + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2 t},\ t \geq 0$$

(o argumento das funções seno e cosseno está expresso em radianos).
Qual é, em centímetros, o comprimento da biela neste mecanismo?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5

Exame nacional de 2020 - 1.ª fase

9. Seja g a função definida em $]0, \pi[$ por $g(x) = \frac{1}{4}\cos(2x) - \cos x$.
Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.
Na sua resposta, apresente:

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo;
– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima;
– as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g, caso este(s) exista(m).

Exame nacional de 2019 - 2.ª fase

10. Seja g a função definida em $]0,\pi[$ por $g(x)=\dfrac{1}{4}\cos(2x)-\cos x$.
Seja f a função, de domínio, $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$, definida por $f(x)=g(-x)+g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.
Qual das expressões seguintes também pode definir a função f?

(A) $\operatorname{sen} x+\cos x$ **(B)** $-\operatorname{sen} x-\cos x$ **(C)** $\operatorname{sen} x-\cos x$ **(D)** $-\operatorname{sen} x+\cos x$

Exame nacional de 2019 - 2.ª fase

11. Um ponto P desloca-se numa reta numérica, no intervalo de tempo $I=[0,10]$ (medido em segundos), de tal forma que a respetiva abcissa é dada por $x(t)=3\cos\left(\pi t+\dfrac{2\pi}{3}\right)$, com $t\in I$.
Qual é o período, em segundos, deste oscilador harmónico?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 2π **(D)** 3π

Exame nacional de 2019 - 1.ª fase

12. Seja g a função, de domínio $[0,\pi]$, definida por $g(x)=2\sin x+\sin^2 x$.
Seja r a reta tangente ao gráfico da função g que tem declive máximo.
Determine o declive da reta r.
Apresente a sua resposta na forma $\dfrac{a\sqrt{b}}{c}$, com a, b e c números naturais.

Exame nacional de 2018 - 2.ª fase

13. A primeira derivada de uma função f, de domínio $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ é dada por $f'(x)=3x-\operatorname{tg}x$.
Sabe-se que o gráfico de f tem um único ponto de inflexão.
Qual é a abcissa desse ponto, arredondada às centésimas?

(A) $0{,}84$ **(B)** $0{,}88$ **(C)** $0{,}92$ **(D)** $0{,}96$

Exame nacional de 2018 - 2.ª fase

14. Considere a função f definida em $]0,\pi[$ por $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$.
Qual das equações seguintes define uma assíntota do gráfico da função f?

(A) $x=0$ **(B)** $x=\pi$ **(C)** $x=1$ **(D)** $x=\dfrac{\pi}{2}$

Exame nacional de 2018 - 1.ª fase

15. Seja g a função, de domínio $]-\infty,\pi]$, definida por

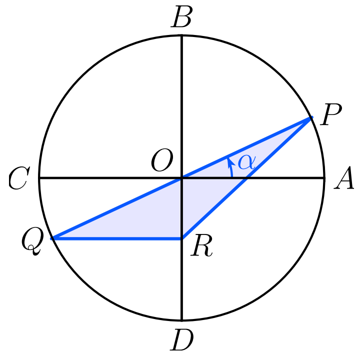
$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{4x} & \text{se } x<0\\[2ex] \dfrac{1}{2-\sin(2x)} & \text{se } 0\leq x\leq\pi\end{cases}$$

Estude a função g quanto à monotonia no intervalo $]0,\pi]$ e determine, caso existam, os extremos relativos.

Exame nacional de 2018 - 1.ª fase

16. Na figura, está representada uma circunferência de centro no ponto O e raio 1.
Sabe-se que:

- os diâmetros $[AC]$ e $[BD]$ são perpendiculares;
- o ponto P pertence ao arco AB;
- $[PQ]$ é um diâmetro da circunferência;
- o ponto R pertence a $[OD]$ e é tal que $[QR]$ é paralelo a $[AC]$.



Seja α a amplitude em radianos, do ângulo AOP $\left(\alpha\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right)$.

Qual das expressões seguintes dá a área do triângulo $[PQR]$, representado a sombreado, em função de α?

(A) $\dfrac{\cos(2\alpha)}{4}$ **(B)** $\dfrac{\sin(2\alpha)}{4}$ **(C)** $\dfrac{\cos(2\alpha)}{2}$ **(D)** $\dfrac{\sin(2\alpha)}{2}$

Exame nacional de 2017 - 1.ª fase

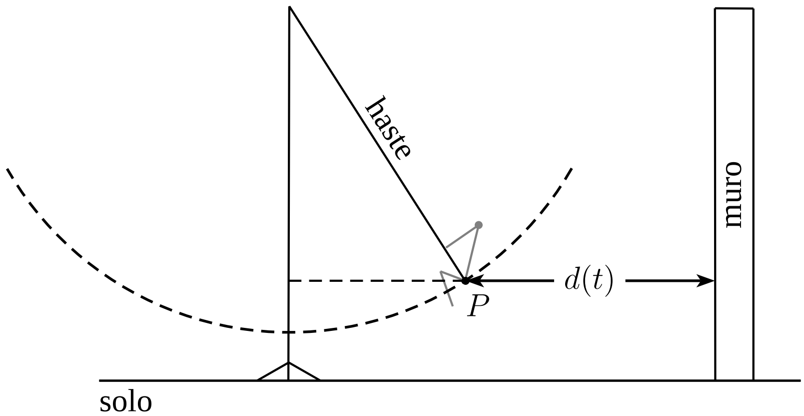
17. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{1-e^{x-1}} & \text{se } x < 1 \\ \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ \\ 3 + \dfrac{\sin(x-1)}{1-x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Resolva, no intervalo $]4,5[$, a equação $g(x) = 3$.

Exame nacional de 2017 - 2.ª fase

18. Num jardim, uma criança está a andar num baloiço cuja cadeira está suspensa por duas hastes rígidas.
Atrás do baloiço, há um muro que limita esse jardim.
A figura esquematiza a situação. O ponto P representa a posição da cadeira.



Num determinado instante, em que a criança está a dar balanço, é iniciada a contagem do tempo.
Doze segundos após esse instante, a criança deixa de dar balanço e procura parar o baloiço arrastando os pés no chão.
Admita que a distância, em decímetros, do ponto P ao muro, t segundos após o instante inicial, é dada por

$$d(t) = \begin{cases} 30 + t\sin(\pi t) & \text{se } 0 \leq t < 12 \\ \\ 30 + 12e^{12-t}\sin(\pi t) & \text{se } x \geq 12 \end{cases}$$

(o argumento da função seno está expresso em radianos)

18.1 Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o número de soluções da equação $d(t) = 27$ no intervalo $[0,6]$, e interprete o resultado no contexto da situação descrita.
Na sua resposta, reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema.

18.2 Admita que, no instante em que é iniciada a contagem do tempo, as hastes do baloiço estão navertical e que a distância do ponto P ao chão, nesse instante, é $4\ dm$.
Treze segundos e meio após o instante inicial, a distância do ponto P ao chão é $4{,}2\ dm$.
Qual é o comprimento da haste?
Apresente o resultado em decímetros, arredondado às unidades.
Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Exame nacional de 2016 - $2.^{a}$ fase

19. Num dia de vento, são observadas oscilações no tabuleiro de uma ponte suspensa, construída sobre um vale.
Mediu-se a oscilação do tabuleiro da ponte durante um minuto.
Admita que, durante esse minuto, a distância de um ponto P do tabuleiro a um ponto fixo do vale é dada, em metros, por

$$h(t) = 20 + \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t) + t\sin(2\pi t) \text{ (t é medido em minutos e pertence a $[0,1]$)}$$

19.1 Sejam M e m, respetivamente, o máximo e o mínimo absolutos da função h no intervalo $[0,1]$.
A amplitude A da oscilação do tabuleiro da ponte, neste intervalo, é dada por $A = M - m$.
Determine o valor de A, recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora apenas para efetuar eventuais cálculos numéricos.
Apresente o resultado em metros.

19.2 Em $[0,1]$, o conjunto solução da inequação, $h(t) < 19{,}5$ é um intervalo da forma $]a,b[$.
Determine o valor de $b - a$ arredondado às centésimas, recorrendo à calculadora gráfica, e interprete o resultado obtido no contexto da situação descrita.
Na sua resposta:

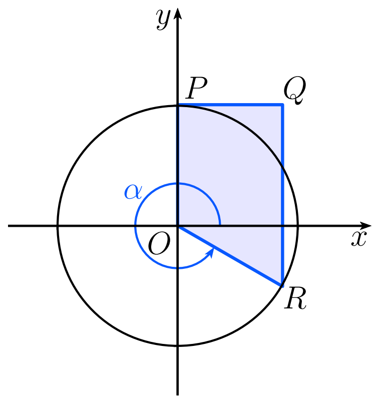
- reproduza o gráfico da função h visualizado na calculadora (sugere-se que, na janela de visualização, considere $y \in [19,21]$;
- apresente o valor de a e o valor de b arredondados às milésimas;
- apresente o valor de $b - a$ arredondado às centésimas;
- interprete o valor obtido no contexto da situação descrita.

Exame nacional de 2016 - $1.^{a}$ fase

20. Na figura, estão representados a circunferência trigonométrica e um trapézio retângulo $[OPQR]$.

Sabe-se que:

- o ponto P tem coordenadas $(0, 1)$
- o ponto R pertence ao quarto quadrante e à circunferência.



Seja α a amplitude de um ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}R$.
Qual das expressões seguintes dá a área do trapézio $[OPQR]$, em função de α?

(A) $\dfrac{\cos\alpha}{2} + \sin\alpha\cos\alpha$

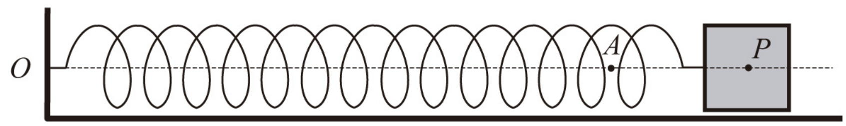
(B) $\dfrac{\cos\alpha}{2} - \sin\alpha\cos\alpha$

(C) $\cos\alpha + \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{2}$

(D) $\cos\alpha - \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{2}$

Exame nacional de 2016 - 1.ª fase

21. Um cubo encontra-se em movimento oscilatório provocado pela força elástica exercida por uma mola.
A figura esquematiza esta situação. Nesta figura, os pontos O e A são pontos fixos. O ponto P representa o centro do cubo e desloca-se sobre a semirreta $\dot{O}A$.



Admita que não existe qualquer resistência ao movimento.
Sabe-se que a distância, em metros, do ponto P ao ponto O é dada por

$$d(t) = 1 + \frac{1}{2}\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right).$$

A variável t designa o tempo, medido em segundos, que decorre desde o instante em que foi iniciada a contagem do tempo ($t \in [0, +\infty[$).
Resolva os itens **21.1** e **21.2** sem recorrer à calculadora.

21.1 No instante em que se iniciou a contagem do tempo, o ponto P coincidia com o ponto A.
Durante os primeiros três segundos do movimento, o ponto P passou pelo ponto A mais do que uma vez.
Determine os instantes, diferentes do inicial, em que tal aconteceu.
Apresente os valores exatos das soluções, em segundos.

21.2 Justifique, recorrendo ao teorema de Bolzano, que houve, pelo menos, um instante, entre os três segundos e os quatro segundos após o início da contagem do tempo, em que a distância doponto P ao ponto O foi igual a $1{,}1$ metros.

Exame nacional de 2015 - 2.ª fase

22. Sejam f e g as funções, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por

$$f(x) = 1 - \cos(3x) \text{ e } g(x) = \sin(3x).$$

Seja a um número real pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Considere as retas r e s tais que:

- a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a;
- a reta s é tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $a + \frac{\pi}{6}$.

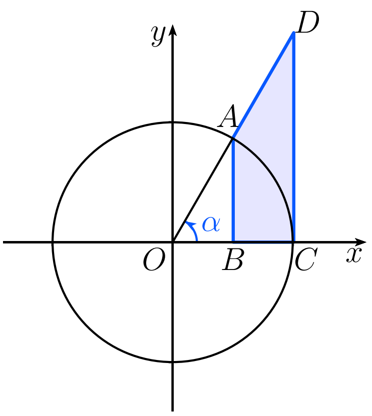
Sabe-se que as retas r e s são perpendiculares.
Mostre que $\sin(3a) = -\frac{1}{3}$.

Exame nacional de 2015 - 1.ª fase

23. Na figura, está representada a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao primeiro quadrante e à circunferência;
- o ponto B pertence ao eixo Ox
- o ponto C tem coordenadas $(1, 0)$
- o ponto D pertence à semirreta $\dot{O}A$
- os segmentos de reta $[AB]$ e $[DC]$ são paralelos ao eixo Oy.



Seja α a amplitude do ângulo $C\hat{O}D$ ($\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$).

Qual das expressões seguintes dá a área do quadrilátero $[ABCD]$, representado a sombreado, em função de α?

(A) $\frac{\tan\alpha}{2} - \frac{\sin(2\alpha)}{2}$

(B) $\frac{\tan\alpha}{2} - \frac{\sin(2\alpha)}{4}$

(C) $\tan\alpha - \frac{\sin(2\alpha)}{4}$

(D) $\tan\alpha - \frac{\sin(2\alpha)}{2}$

Exame nacional de 2015 - 1.ª fase

24. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3\sin^2 x$.
Qual das expressões seguintes define a função f'', segunda derivada de f?

(A) $6\sin(2x)\cos(x)$

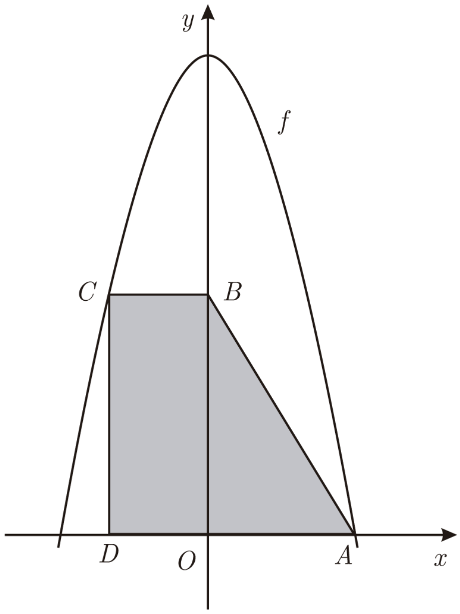
(B) $6\sin(x)\cos(2x)$

(C) $6\cos(2x)$

(D) $6\sin(2x)$

Exame nacional de 2015 - 2.ª fase

25. Na figura, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 4\cos(2x)$.



Sabe-se que:

- os vértices A e D do trapézio $[ABCD]$ pertencem ao eixo Ox;
- o vértice B do trapézio $[ABCD]$ pertence ao eixo Oy;
- o vértice D do trapézio $[ABCD]$ tem abcissa $-\frac{\pi}{6}$;
- os pontos A e C pertencem ao gráfico de f;
- a reta CD é paralela ao eixo Oy.

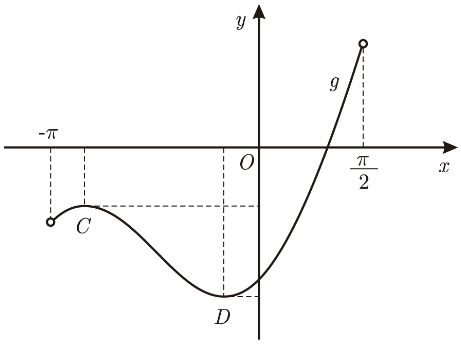
Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

25.1 Determine o valor exato da área do trapézio $[ABCD]$.

25.2 Seja f' a primeira derivada da função f, e seja f'' a segunda derivada da função f.
Mostre que $f(x)+f'(x)+f''(x) = -4\,(3\cos(2x) + 2\,\text{sen}\,(2x))$, para qualquer número real x.

Exame nacional de 2011 - 1.ª fase

26. Na figura, está representado, num referencial o.n. xOy, o gráfico da função g, de domínio $\left]-\pi, \dfrac{\pi}{2}\right[$ definida por $g(x) = x - 2\cos x$.
Sabe-se que C e D são pontos do gráfico de g cujas ordenadas são extremos relativos de g.



Determine os valores exatos das coordenadas dos pontos C e D recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Exame nacional de 2011 - 1.ª fase, Prova especial

27. Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$?

(A) 4 **(B)** 0 **(C)** $\dfrac{1}{4}$ **(D)** $\dfrac{1}{2}$

Exame nacional de 2011 - 1.ª fase

28. De duas funções f e g sabe-se que:

- f tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $f(x) = \pi - 4\operatorname{sen}(5x)$;
- g tem domínio $\left]-\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{3}\right[$ e g', primeira derivada de g, tem domínio $\left]-\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{3}\right[$ e é definida por $g'(x) = \log_2\left(-\dfrac{\pi}{6} - x\right)$.

Resolva os itens **28.1** e **28.2** recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

28.1 Calcule o valor de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{f(x) - \pi}$.

28.2 Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão no intervalo $\left]-\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{3}\right[$.

Exame nacional de 2011 - Época especial

29. Um depósito de combustível tem a forma de uma esfera.
A Figura 1 e a Figura 2 representam dois cortes do mesmo depósito, com alturas de combustível distintas. Os cortes são feitos por um plano vertical que passa pelo centro da esfera.

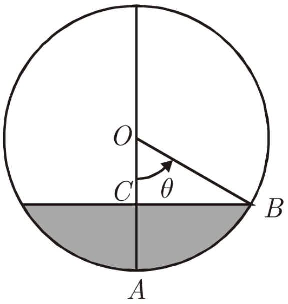


Figura 1

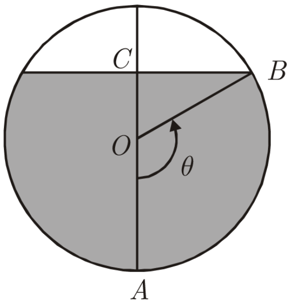


Figura 2

Sabe-se que:

- o ponto O é o centro da esfera;
- a esfera tem 6 metros de diâmetro;
- a amplitude θ, em radianos, do arco AB é igual à amplitude do ângulo ao centro AOB correspondente.

A altura AC, em metros, do combustível existente no depósito é dada, em função de θ, por h, de domínio $[0, \pi]$.
Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

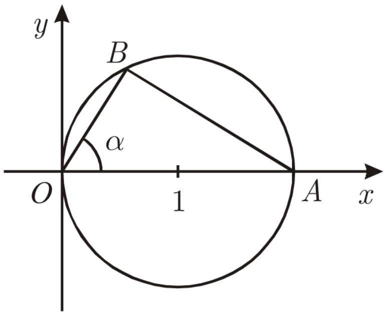
29.1 Mostre que $h(\theta) = 3 - 3\cos(\theta)$, para qualquer $\theta \in]0, \pi[$.

29.2 Resolva a condição $h(\theta) = 3$, $\theta \in]0, \pi[$.
Interprete o resultado obtido no contexto da situação apresentada.

Exame nacional de 2010 - $2.^{\text{a}}$ fase

30. Na figura, estão representados, num referencial o.n. xOy, uma circunferência e o triângulo $[OAB]$.
Sabe-se que:

- a circunferência tem diâmetro $[OA]$;
- o ponto A tem coordenadas $(2, 0)$;
- o vértice O do triângulo $[OAB]$ coincide com a origem do referencial;
- o ponto B desloca-se ao longo da semicircunferência superior.



Para cada posição do ponto B, seja α a amplitude do ângulo AOB, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

30.1 Mostre que o perímetro do triângulo $[OAB]$ é dado, em função de α, por

$$f(\alpha) = 2(1 + \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha).$$

30.2 Determine o valor de α para o qual o perímetro do triângulo $[OAB]$ é máximo.

Exame nacional de 2010 - 1.ª fase

31. Admita que, numa certa marina, a profundidade da água, em metros, t horas após as zero horas de um certo dia, é dada por $P(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 8$, em que $t \in [0, 24]$.
Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

31.1 Determine a profundidade da água da marina às três horas da tarde, desse dia.

31.2 Determine, recorrendo ao estudo da função derivada, a profundidade mínima, em metros, da água da marina, nesse dia.

Exame nacional de 2010 - Época especial

32. Seja f a função, de domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, definida por $f(x) = \operatorname{sen}(2x)\cos x$.
Determine, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa 0.

Exame nacional de 2009 - 2.ª fase

33. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = 2 + \operatorname{sen}(4x)$.
Resolva, usando métodos analíticos, os dois itens seguintes.
Nota:
A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

33.1 Determine $g'(0)$, recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.

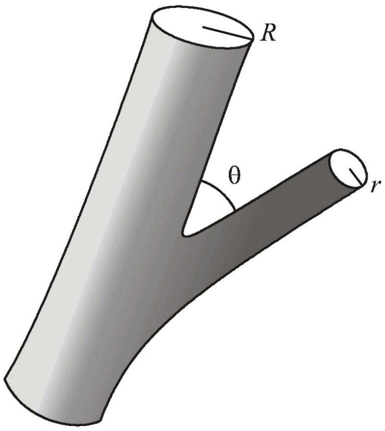
33.2 Estude a monotonia da função g, no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ indicando o valor dos extremos relativos, caso existam, e os intervalos de monotonia.

Exame nacional de 2008 - 2.ª fase

34. Seja a função f, de domínio $[0,\pi]$, definida por $f(x) = 2\,\mathrm{sen}\,(x)\cos(x) + 2$.
O gráfico da função f interseta a reta $y = 1$ num só ponto.
Determine, **recorrendo exclusivamente a métodos analíticos**, as coordenadas desse ponto.

Exame nacional de 2008 - Época especial

35. Na figura seguinte está representada uma artéria principal do corpo humano, cuja secção é um círculo com raio R, e uma sua ramificação, mais estreita, cuja secção é um círculo com raio r.

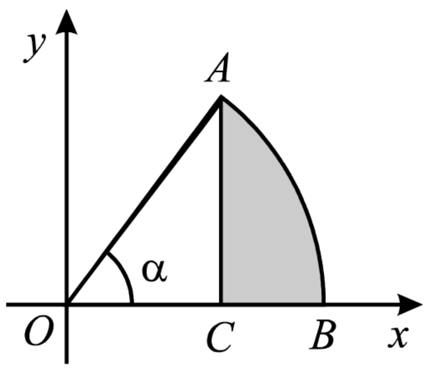


A secção da artéria principal tem área A e a da ramificação tem área a.
Seja $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ a amplitude, em radianos, do ângulo que a artéria principal faz com a sua ramificação (medida relativamente a duas geratrizes complanares dos dois cilindros).
Sabe-se que $a = A\sqrt{\cos\theta}$.
Admitindo que o modelo descrito se adequa com exatidão à situação real, determine θ no caso em que os raios referidos verificam a relação $R = \sqrt[4]{2}r$.

Exame nacional de 2007 - 2.ª fase

36. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, um arco AB, que está contido na circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$.

O ponto C pertence ao eixo Ox e o segmento de reta $[AC]$ é perpendicular a este eixo.
α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB.
Qual é a expressão que dá o perímetro da região sombreada, em função de α?

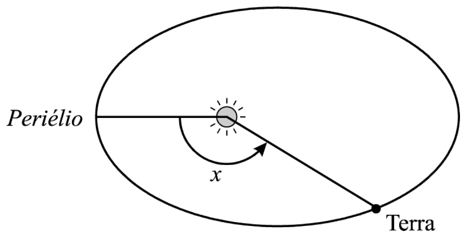


(A) $\pi\alpha + \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha$ **(B)** $\pi\alpha + \operatorname{sen}\alpha + 1 - \cos\alpha$
(C) $1 + \alpha - \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha$ **(D)** $1 + \alpha + \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha$

Exame nacional de 2006 - 2.ª fase

37. Como sabe, a Terra descreve uma órbita elíptica em torno do Sol.

Na figura está representado um esquema dessa órbita.
Está assinalado o *periélio*, o ponto da órbita da Terra mais próximo do Sol.
Na figura está assinalado um ângulo de amplitude x radianos($x \in [0, 2\pi[$).



Este ângulo tem o seu vértice no Sol, o seu lado origem passa no *periélio* e o seu lado extremidade passa na Terra.
A distância d, em milhões de quilómetros, da Terra ao Sol, é (aproximadamente) dada, em função de x por $d = 149{,}6\,(1 - 0{,}0167\cos x)$.

37.1 Sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, determine a distância máxima e a distância mínima da Terra ao Sol. Apresente os valores pedidos em milhões de quilómetros, arredondados às décimas.

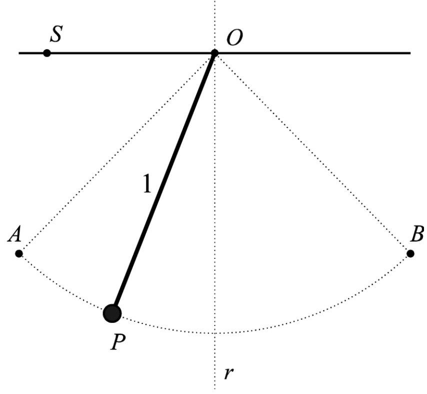
37.2 Sabe-se que x verifica a relação $\dfrac{2\pi}{T} = x - 0{,}0167\operatorname{sen}x$, em que

- t é o tempo, em dias, que decorre desde a passagem da Terra pelo periélio até ao instante em que atinge a posição correspondente ao ângulo x;
- T é o tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa ($365{,}24$ dias).

Mostre que, para $x = \pi$, se tem $t = \dfrac{T}{2}$.
Interprete este resultado no contexto da situação descrita.

Exame nacional de 2006 - 2.ª fase

38. Na figura está representada uma esfera suspensa de um fio com 1 metro de comprimento, fixo no ponto O.



O centro da esfera oscila entre os pontos A e B, que são simétricos relativamente à reta vertical r.
A reta r passa pelo ponto O e é perpendicular à reta OS.
No instante inicial, o centro da esfera coincide com o ponto A.
Admita que, t segundos após esse instante inicial, o centro da esfera está num ponto P tal que a amplitude, em radianos, do ângulo SOP é dada (aproximadamente) por

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\cos\left(\sqrt{9{,}8}\,t\right).$$

Nas duas alíneas seguintes, **não utilize a calculadora**, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos.

38.1 Determine a distância do centro da esfera à reta OS, no instante inicial.

38.2 Determine o instante em que o centro da esfera passa pela primeira vez na reta r. Apresente o resultado em segundos, arredondado às décimas.

Exame nacional de 2006 - 1.ª fase

39. Considere a expressão $f(x) = A + B\cos(Cx)$. Sempre que se atribuem valores reais positivos a A, B e C, obtemos uma função de domínio $\mathbb{R}$.

39.1 Prove que $\frac{2\pi}{C}$ é período de qualquer função definida por uma expressão do tipo indicado.

39.2 Num certo rio, existe um ancoradouro para atracagem de barcos. A distância do ancoradouro ao fundo do rio varia com a maré.
Admita que, num certo dia, a distância do ancoradouro ao fundo do rio, x horas depois das zero horas desse dia, pode ser modelada por uma função do tipo

$$f(x) = A + B\cos(Cx),$$

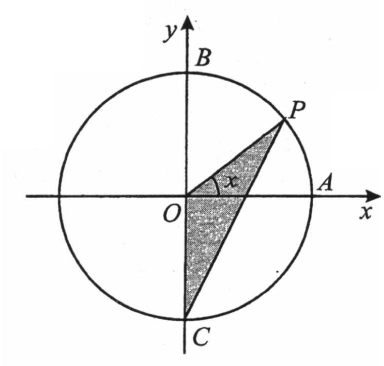
com $x \in [0, 24[$.
Admita ainda que, no intervalo de tempo $[0, 24[$:

- a distância máxima do ancoradouro ao fundo do rio é de 17 metros, e a mínima é de 11 metros;
- ocorrem apenas duas marés altas, uma às 0 horas e outra às 12 horas;
- ocorrem apenas duas marés baixas, uma às 6 horas e outra às 18 horas.

Justifique que, no modelo $f(x) = A + B\cos(Cx)$, se tem $C = \frac{\pi}{6}$; (tenha em conta a alínea **39.1** e o facto de que não existe nenhum período positivo inferior a $\frac{2\pi}{C}$).
Em seguida, determine os valores de A e B (positivos) adequados ao modelo.

Exame nacional de 2006 - 1.ª fase, Época especial

40. Na figura junta, está representado o círculo trigonométrico.
Os pontos A, B e C têm coordenadas $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(0, -1)$, respetivamente.
O ponto P desloca-se ao longo do arco AB, nunca coincidindo com o ponto B.
Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude do ângulo AOP, e seja $f(x)$ a área do triângulo $[OPC]$.
Qual das expressões seguintes define a função f?



(A) $\frac{\operatorname{sen} x}{2}$ **(B)** $\frac{\cos x}{2}$ **(C)** $\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2}$ **(D)** $\frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{2}$

Exame nacional de 2006 - 1.ª fase, Época especial