Trigonometria com calculadora - Exames

1. O mecanismo de manivela-biela é composto por uma manivela de comprimento fixo, que efetua um movimento de rotação (sempre no mesmo sentido), e por uma biela, também de comprimento fixo, que transforma esse movimento de rotação no movimento alternado de translação de um pistão.

   Na Figura 1, está representado esse mecanismo.

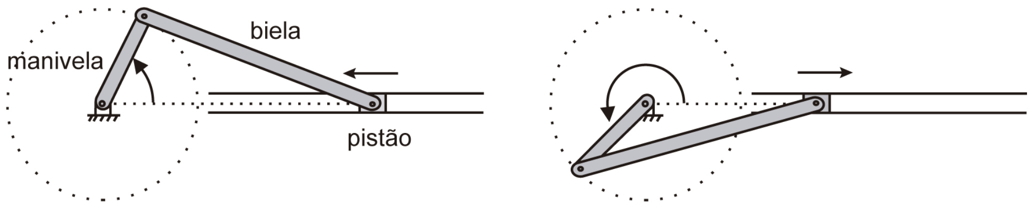


Figura 1

Na Figura 2, está representado um esquema do mecanismo descrito.

Relativamente a esta figura, sabe-se que:

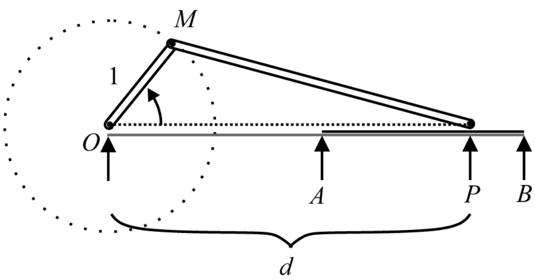


Figura 2

- o ponto P representa o pistão;
- o segmento de reta $[OM]$ representa a manivela, que tem $1 \ cm$ de comprimento;
- o segmento de reta $[MP]$ representa a biela;
- os pontos A e B são os pontos em que a distância do pistão ao centro de rotação da manivela, O, é mínima e máxima, respetivamente;
- os pontos O, A, P e B são colineares.

Sabe-se que o movimento de rotação da manivela se inicia quando o pistão se encontra na posição B e que a manivela descreve voltas completas a uma frequência angular constante. Admita que a função que dá, em centímetros, a distância do pistão ao ponto O, em função do tempo, t, em segundos, contado a partir do instante em que é iniciado o movimento, é dada por

$$d(t) = \cos t + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2 t},\ t \geq 0$$

(o argumento das funções seno e cosseno está expresso em radianos).

Durante os primeiros cinco segundos, após o início do movimento, registou-se, num certo instante t_0, a distância do pistão ao ponto O.

Sabe-se que, dois segundos após esse instante, a distância do pistão ao ponto O diminuiu 25%.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a distância, em centímetros, arredondada às décimas, do pistão ao ponto O no instante t_0, sabendo-se que este valor existe e é único.Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

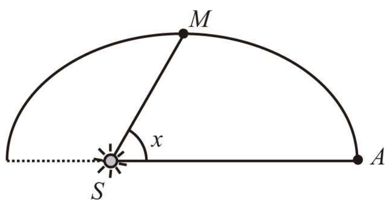
– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;

– apresente o valor pedido em centímetros, arredondado às décimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Exame nacional de 2020 - 1.ª fase

2. O planeta Mercúrio descreve uma órbita elíptica em torno do Sol. Na figura, está representado um esquema de uma parte dessa órbita.



Relativamente a esta figura, tem-se que:

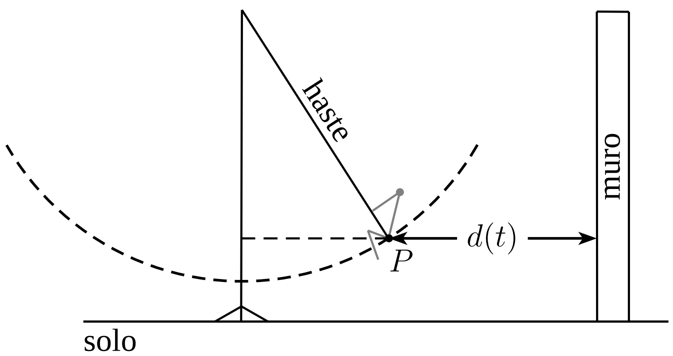
- o ponto S representa o Sol;
- o ponto M representa o planeta Mercúrio;
- o ponto A representa o afélio, que é o ponto da órbita mais afastado do Sol;
- x é a amplitude do ângulo ASM, compreendida entre 0 e 180 graus.Admita que a distância, d, em milhões de quilómetros, do planeta Mercúrio ao Sol é dada, em função de$x$, por

$$d = \frac{555}{10 - 2.06\cos x}.$$

Seja α a amplitude do ângulo ASM, num certo instante (α a está compreendido entre 0 e 20 graus).
Nesse instante, o planeta Mercúrio encontra-se a uma certa distância do Sol.
Passado algum tempo, a amplitude do ângulo ASM é três vezes maior e a distância do planeta Mercúrio ao Sol diminuiu 3%.
Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de α, sabendo-se que esse valor existe e é único.
Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.
Na sua resposta:
– equacione o problema;
– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
– apresente o valor de α em graus, arredondado às unidades.

Exame nacional de 2018 - 2.ª fase

3. Num jardim, uma criança está a andar num baloiço cuja cadeira está suspensa por duas hastes rígidas.
Atrás do baloiço, há um muro que limita esse jardim.
A figura esquematiza a situação. O ponto P representa a posição da cadeira.



Num determinado instante, em que a criança está a dar balanço, é iniciada a contagem do tempo. Doze segundos após esse instante, a criança deixa de dar balanço e procura parar o baloiço arrastando os pés no chão.
Admita que a distância, em decímetros, do ponto P ao muro, t segundos após o instante inicial, é dada por

$$d(t) = \begin{cases} 30 + t\sin(\pi t) & \text{se } 0 \leq t < 12 \\ 30 + 12e^{12-t}\sin(\pi t) & \text{se } x \geq 12 \end{cases}$$

(o argumento da função seno está expresso em radianos)
Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o número de soluções da equação $d(t) = 27$ nointervalo $[0, 6]$, e interprete o resultado no contexto da situação descrita.

Na sua resposta, reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema.

Exame nacional de 2016 - 2.ª fase

4. Num dia de vento, são observadas oscilações no tabuleiro de uma ponte suspensa, construída sobre um vale.
Mediu-se a oscilação do tabuleiro da ponte durante um minuto.
Admita que, durante esse minuto, a distância de um ponto P do tabuleiro a um ponto fixo do vale é dada, em metros, por

$$h(t) = 20 + \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t) + t\sin(2\pi t) \text{ (t é medido em minutos e pertence a } [0,1])$$

Em $[0,1]$, o conjunto solução da inequação, $h(t) < 19{,}5$ é um intervalo da forma $]a,b[$.
Determine o valor de $b-a$ arredondado às centésimas, recorrendo à calculadora gráfica, e interprete o resultado obtido no contexto da situação descrita.
Na sua resposta:

- reproduza o gráfico da função h visualizado na calculadora (sugere-se que, na janela de visualização, considere $y \in [19, 21]$;
- apresente o valor de a e o valor de b arredondados às milésimas;
- apresente o valor de $b-a$ arredondado às centésimas;
- interprete o valor obtido no contexto da situação descrita.

Exame nacional de 2016 - 1.ª fase

5. De duas funções f e g sabe-se que:

- f tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $f(x) = \pi - 4\,\mathrm{sen}\,(5x)$;
- g tem domínio $\left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$ e g', primeira derivada de g, tem domínio $\left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$ e é definida por $g'(x) = \log_2\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)$.

Resolva o item seguinte recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.
Seja h a função, de domínio $\left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$, definida por $h(x) = f(x) - g(x)$.
O ponto A pertence ao gráfico da função h.
Sabe-se que a reta tangente ao gráfico da função h no ponto A é paralela ao eixo Ox.
Determine a abcissa do ponto A.
Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;

- indicar a abcissa do ponto com arredondamento às décimas.

Exame nacional de 2011 - Época especial

6. Considere a função f, de domínio $]0, \pi[$, definida por $f(x) = \ln x \times \cos x$.
Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- A é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo Ox, que se situa mais próximo da origem O;
- B é o ponto de intersecção do gráfico da função f com a reta bissetriz dos quadrantes pares.

Determine a área do triângulo $[OAB]$, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora. Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as coordenadas dos pontos A e B, arredondando às milésimas as coordenadas do ponto B;
- desenhar o triângulo $[OAB]$, assinalando os pontos que representam os seus vértices;
- apresentar o resultado pedido, com arredondamento às centésimas.

Exame nacional de 2010 - Época especial

7. Seja f a função, de domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, definida por $f(x) = \operatorname{sen}(2x)\cos x$.
No domínio indicado, determine, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, um valor, aproximado às décimas, da área do triângulo $[ABC]$, em que:

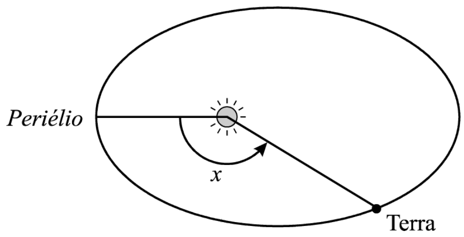
- A é o ponto do gráfico da função f cuja ordenada é máxima;
- B e C são os pontos de intersecção do gráfico da função f com a reta de equação $y = 0{,}3$.

Reproduza, na folha de respostas, o gráfico, ou gráficos, visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial.
Desenhe o triângulo $[ABC]$, assinalando os pontos que representam os seus vértices.
Nota: Nas coordenadas dos vértices em que é necessário fazer arredondamentos, utilize duas casas decimais.

Exame nacional de 2009 - 2.ª fase

8. Como sabe, a Terra descreve uma órbita elíptica em torno do Sol.
Na figura está representado um esquema dessa órbita.

Está assinalado o *periélio*, o ponto da órbita da Terra mais próximo do Sol.
Na figura está assinalado um ângulo de amplitude x radianos ($x \in [0, 2\pi[$).
Este ângulo tem o seu vértice no Sol, o seu lado origem passa no *periélio* e o seu lado extremidade passa na Terra.



A distância d, em milhões de quilómetros, da Terra ao Sol, é (aproximadamente) dada, em função de x por $d = 149{,}6\,(1 - 0{,}0167\cos x)$.

Sabe-se que x verifica a relação $\dfrac{2\pi t}{T} = x - 0{,}0167 \operatorname{sen} x$, em que

- t é o tempo, em dias, que decorre desde a passagem da Terra pelo periélio até ao instante em que atinge a posição correspondente ao ângulo x;
- T é o tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa ($365{,}24$ dias).

Sabe-se que a última passagem da Terra pelo periélio ocorreu a uma certa hora do dia 4 de Janeiro. Determine a distância a que a Terra se encontrava do Sol, à mesma hora do dia 14 de Fevereiro. Apresente o resultado em milhões de quilómetros, arredondado às décimas. Nos valores intermédios, utilize, no mínimo, quatro casas decimais.
Nota: a resolução desta questão envolve uma equação que deve ser resolvida graficamente, com recurso à calculadora; apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de algum, ou de alguns, ponto(s).

Exame nacional de 2006 - $2.^{a}$ fase