Funções exponencial e logarítmica - Exame

1. Determine, sem recorrer à calculadora, os números reais que são solução da equação

$$x\ln(1-x)-\ln(1-x)=(1-x)\ln(3-2x).$$

Exame Nacional de 2021 - 2.ª fase

2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.
Considere, para um certo número real k, a função g, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por

$$g\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x}{x^2-x}+k & \text{se } x<0\\[2ex] 2+x\ln x & \text{se } x>0\end{cases}$$

Sabe-se que existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.
Determine o valor de k.

Exame Nacional de 2021 - 2.ª fase

3. Resolva este item sem recorrer à calculadora.
Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x)=\dfrac{x^3}{2x^2-\ln x}$.
Estude a função h quanto à existência de assíntota oblíqua ao seu gráfico e, caso esta exista, escreva a sua equação reduzida.

Exame Nacional de 2021 - 1.ª fase

4. Num laboratório cuja temperatura ambiente é constante, aqueceu-se uma substância até atingir uma certa temperatura, superior à temperatura ambiente, e, a seguir, deixou-se arrefecer essa substância durante uma hora.
Admita que a temperatura dessa substância, em graus Celsius, t minutos após o início do arrefecimento, é dada por

$$T(t) = 20 + 100e^{-kt},\ 0 \leq t \leq 60$$

em que k é uma constante real positiva.

4.1. Durante o arrefecimento, houve um instante t_1 em que a temperatura da substância foi 30 °C.
Qual é o valor de k?

(A) $\ln\left(\frac{10}{t_1}\right)$ **(B)** $t_1 - \ln 10$ **(C)** $\frac{\ln 10}{t_1}$ **(D)** $t_1 + \ln 10$

4.2. Considere $k = 0{,}04$.
Sabe-se que, durante os primeiros t_2 minutos, a taxa média de variação da função T foi iguala $-2{,}4$.
Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de t2, sabendo que essevalor existe e é único.
Apresente o resultado em minutos e segundos (segundos arredondados às unidades).
Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.
Na sua resposta:
— apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
— reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às milésimas.
Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Exame Nacional de 2021 - 2.ª fase

5. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - e^{-x}}{x} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Resolva os itens **5.1.** e **5.2.** sem recorrer à calculadora.

5.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais ao seu gráfico e, caso estas existam, escreva as respetivas equações.

5.2. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa -2.

Exame Nacional de 2021 - 2.ª fase

6. Determine, sem recorrer à calculadora, os números reais que são solução da equação

$$\ln\left((1-x)\,e^{x-1}\right) = x.$$

Exame Nacional de 2021 - 1.ª fase

7. Seja f a função, de domínio $]0,+\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2(1+2\ln x) & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{5-5e^{x-1}}{x^2+3x-4} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

7.1. Averigue se a função f é contínua em $x=1$.

7.2. Estude, no intervalo $]0,1[$, a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.
Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

Exame Nacional de 2021 - 1.ª fase

8. Seja f uma função, de domínio $]0,+\infty[$, cuja derivada, f', de domínio $]0,+\infty[$, é dada por $f'(x) = \dfrac{2+\ln x}{x}$.
Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.
Na sua resposta, apresente:
– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f.

Exame nacional de 2020 - 2.ª fase

9. Seja h a função, de domínio $]-\infty,4[$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} 1+xe^{x-1} & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{\sqrt{x}-1}{\operatorname{sen}(x-1)} & \text{se } 1 < x < 4 \end{cases}$$

Mostre que o gráfico da função h tem uma assíntota horizontal e apresente uma equação dessa assíntota.

Exame Nacional de 2020 - 2.ª fase

10. Dados dois números reais positivos, sabe-se que a soma dos seus logaritmos na base 8 é igual a $\frac{1}{3}$.
A que é igual o produto desses dois números?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 8 **(D)** 9

Exame Nacional de 2020 - 2.ª fase

11. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - e^x} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x^2 \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens **(a)** e **(b)** sem recorrer à calculadora.

(a) Averigue se a função g é contínua em $x = 0$.

(b) Estude a função g quanto à monotonia em $]0, +\infty[$ e determine, caso existam, os extremos relativos.
Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

Exame Nacional de 2020 - 1.ª fase

12. Seja f a função definida em $]-\infty, 2]$ por $f(x) = x + \ln(e^x + 1)$.
Resolva os itens **(a)** e **(b)** sem recorrer à calculadora.

(a) O gráfico de f tem uma assíntota oblíqua.
Determine uma equação dessa assíntota.

(b) A equação $f(x) = 2x + 1$ tem uma única solução.
Determine essa solução e apresente-a na forma $-\ln k$, com $k > 0$.

(c) Seja h a função definida em $]-\infty, 2]$ por $h(x) = f(x) - x$.
Qual das expressões seguintes pode ser a expressão analítica da função h^{-1}, função inversa de h?

(A) $e^x - 1$ **(B)** $1 - e^x$ **(C)** $\ln(e^x - 1)$ **(D)** $\ln(1 - e^x)$

Exame Nacional de 2020 - 1.ª fase

13. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \dfrac{8n-4}{n+1}$.
Seja f a função, de domínio $]-\infty, 8[$, definida por $f(x) = \log_2(8-x)$.
A que é igual $\lim f\left(u_n\right)$?

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

Exame Nacional de 2020 - 1.ª fase

14. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, definida por $h(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$.

(a) Estude a função h quanto à existência de assíntotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso existam, escreva as suas equações.

(b) Resolva, em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, a equação $(x-1) \times h(x) + 2e^{-x} = 3$.

Exame Nacional de 2019 - 2.ª fase

15. Qual é, para qualquer número real positivo a, o limite da sucessão $\left(\dfrac{n+\ln a}{n}\right)^{n+2}$?

(A) a^2 **(B)** $2a$ **(C)** a **(D)** $\sqrt{a}$

Exame Nacional de 2019 - 2.ª fase

16. Para um certo número real k, é contínua em $\mathbb{R}$ a função f, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log_3 k & \text{se } x = 1 \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \end{cases}$$

Qual é o valor de k?

(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 8 **(D)** 9

Exame Nacional de 2019 - 2.ª fase

17. Sejam a e b dois números reais positivos tais que $a > b$.
Sabe-se que $a + b = 2(a-b)$.
Qual é o valor, arredondado às décimas, de $\ln\left(a^2 - b^2\right) - 2\ln(a+b)$?

(A) $0{,}7$ **(B)** $1{,}4$ **(C)** $-0{,}7$ **(D)** $-1{,}4$

Exame Nacional de 2019 - 1.ª fase

18. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

(a) Estude a função g quanto à monotonia e determine, caso existam, os extremos relativos.

(b) Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = g(x) + 2x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
Sabe-se que o gráfico da função h tem uma assíntota oblíqua.
Qual é o declive dessa assíntota?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** e **(D)** e^2

Exame Nacional de 2019 - 1.ª fase

19. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{x}{x - \ln x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(a) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 1.

(b) Averigue se a função f é contínua no ponto 0.
Justifique a sua resposta.

Exame Nacional de 2019 - 1.ª fase

20. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 + \dfrac{e^x}{1-x} & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{\ln(x^2) + 2}{x} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Determine $f'(0)$, recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.

(b) Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do seu gráfico.

(c) Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = x + 1$.
Qual é o valor de $(f \circ h^{-1})(2)$?
(o símbolo $\circ$ designa a composição de funções).

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3

Exame Nacional de 2018 - 2.ª fase

21. Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação

$$\log_2(x+1) \leq 3 - \log_2(8-x).$$

Apresente a resposta usando a notação de intervalos de números reais.

Exame Nacional de 2018 - 2.ª fase

22. Qual é o valor do limite da sucessão de termo geral $\left(\frac{n+5}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$?

(A) $+\infty$ **(B)** 1 **(C)** e^4 **(D)** e^2

Exame Nacional de 2018 - 2.ª fase

23. Seja g a função, de domínio $]-\infty, \pi]$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{4x} & \text{se } x < 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2-\sin(2x)} & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

(a) Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função g não tem zeros.

(B) A função g tem um único zero.

(C) A função g tem exatamente dois zeros.

(D) A função g tem exatamente três zeros.

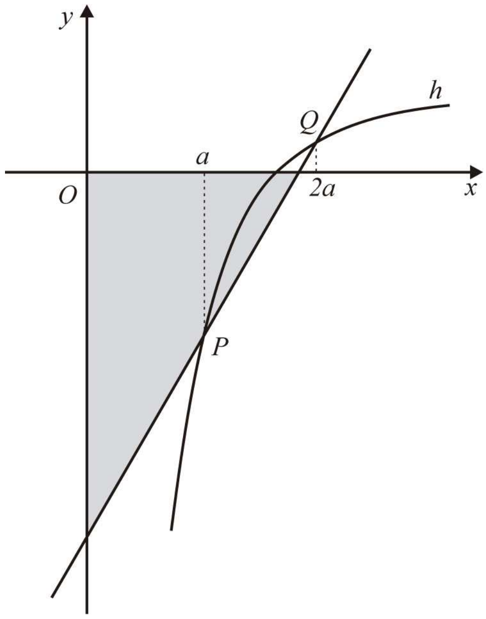
(b) Averigue se a função g é contínua no ponto 0.
Justifique a sua resposta.

Exame Nacional de 2018 - 1.ª fase

24. Sejam a e b números reais superiores a 1 tais que $\ln b = 4 \ln a$.
Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $a^x \geq b^{\frac{1}{x}}$.
Apresente a resposta usando a notação de intervalos de números reais.

Exame Nacional de 2018 - 1.ª fase

25. Na figura, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.



Para cada número real a pertencente ao intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ sejam P e Q os pontos do gráfico da função h de abcissas a e $2a$, respetivamente.
Tal como a figura sugere, a reta PQ define, com os eixos coordenados, um triângulo retângulo.
Mostre que existe, pelo menos, um número real a pertencente ao intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ para o qual esse triângulo é isósceles.
Sugestão: comece por identificar o valor do declive da reta PQ para o qual o triângulo é isósceles.

Exame Nacional de 2018 - 1.ª fase

26. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{1-e^{x-1}} & \text{se } x < 1 \\[2ex] 2 & \text{se } x = 1 \\[2ex] 3 + \dfrac{\sin(x-1)}{1-x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Estude a função g quanto à continuidade no ponto 1.

Exame Nacional de 2017 - 2.ª fase

27. Seja k um número real.

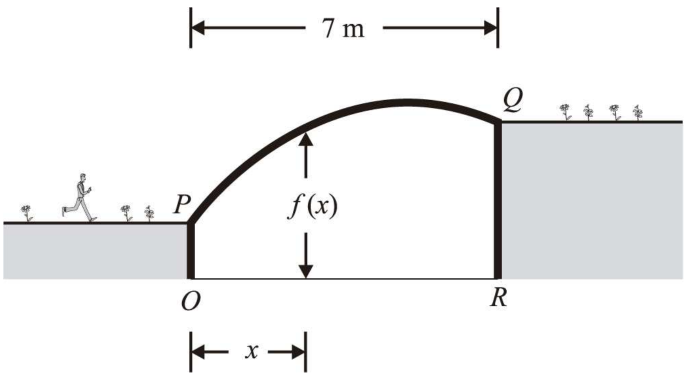
Considere a sucessão convergente (u_n) definida por $u_n = \left(\dfrac{n+k}{n}\right)^n$.

Sabe-se que o limite de (u_n) é solução da equação $\ln\left(\frac{x}{e}\right) = 3$.
Qual é o valor de k?

(A) $\dfrac{1}{4}$ **(B)** 3 **(C)** $\dfrac{1}{3}$ **(D)** 4

Exame Nacional de 2018 - 1.ª fase

28. Na figura, está representada uma secção de uma ponte pedonal que liga as duas margens de um rio.
A ponte, representada pelo arco PQ, está suportada por duas paredes, representadas pelos segmentos de reta $[OP]$ e $[RQ]$. A distância entre as duas paredes é 7 metros.
O segmento de reta $[OR]$ representa a superfície da água do rio.



Considere a reta OR como um eixo orientado da esquerda para a direita, com origem no ponto O e em que uma unidade corresponde a 1 metro.
Para cada ponto situado entre O e R, de abcissa x, a distância na vertical, medida em metros, desse ponto ao arco PQ é dada por

$$f(x) = 9 - 2,5\left(e^{1-0,2x} + e^{0,2x-1}\right), \text{com } x \in [0,7].$$

Resolva os itens **(a)** e **(b)** recorrendo a métodos analíticos; utilize a calculadora apenas para efetuar eventuais cálculos numéricos.

(a) Seja S o ponto pertencente ao segmento de reta $[OR]$ cuja abcissa x verifica a equação

$$\sqrt{(f(0))^2 + x^2} = 2.$$

Resolva esta equação, apresentando a solução arredondada às décimas, e interprete essa solução no contexto da situação descrita.
Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

(b) O clube náutico de uma povoação situada numa das margens do rio possui um barco à vela. Admitaque, sempre que esse barco navega no rio, a distância do ponto mais alto do mastro à superfície da água é 6 metros.
Será que esse barco, navegando no rio, pode passar por baixo da ponte?
Justifique a sua resposta.

Exame Nacional de 2017 - $2.^{\text{a}}$ fase

29. O José e o António são estudantes de Economia. O José pediu emprestados 600 euros ao António para comprar um computador, tendo-se comprometido a pagar o empréstimo em prestações mensais sujeitas a um certo juro.
Para encontrarem as condições de pagamento do empréstimo, os dois colegas adaptaram uma fórmula que tinham estudado e estabeleceram um contrato.
Nesse contrato, a prestação mensal p, em euros, que o José tem de pagar ao António é dada por

$$p = \frac{600x}{1 - e^{-nx}}$$

em que n é o número de meses em que o empréstimo será pago e x é a taxa de juro mensal.
Resolva os itens seguintes recorrendo a métodos analíticos.
Na resolução do item **(a)**, pode utilizar a calculadora para efetuar eventuais cálculos numéricos.

(a) O José e o António acordaram que a taxa de juro mensal seria 0.3% ($x = 0.003$).
Em quantos meses será pago o empréstimo, sabendo-se que o José irá pagar uma prestação mensal de 24 euros?
Apresente o resultado arredondado às unidades.
Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

(b) Determine $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{600x}{1 - e^{-nx}}$, em função de n, e interprete o resultado no contexto da situação descrita.

Exame Nacional de 2017 - $1.^{\text{a}}$ fase

30. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln x$.
Considere a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{n}{e^n}$.
Qual é o valor de $\lim f\left(u_n\right)$?

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** e **(D)** $+\infty$

Exame Nacional de 2017 - $1.^{\text{a}}$ fase

31. Para certos valores de a e de b ($a > 1$ e $b > 1$), tem-se $\log_a(ab^3) = 5$.
Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_b a$?

(A) $\frac{5}{3}$ **(B)** $\frac{3}{4}$ **(C)** $\frac{3}{5}$ **(D)** $\frac{1}{3}$

Exame Nacional de 2017 - 1.ª fase

32. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Resolva os itens seguintes recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

(a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados.

(b) Resolva a inequação $f(x) > 2\ln x$.
Apresente o conjunto solução usando a notação de intervalos de números reais.

(c) Para um certo número real k, a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \frac{k}{x} + f(x)$, tem um extremo relativo para $x = 1$.
Determine esse número k.

Exame Nacional de 2016 - 2.ª fase

33. Considere a função f, de domínio $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, definida por $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.
Resolva os itens seguintes recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

(a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

(b) Seja a um número real maior do que 1.
Mostre que a reta secante ao gráfico de f nos pontos de abcissas a e $-a$ passa na origem do referencial.

Exame Nacional de 2016 - 1.ª fase

34. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, cuja derivada, f', de domínio $\mathbb{R}$, é dada por

$$f'(x) = e^x\left(x^2 + x + 1\right).$$

Resolva os itens seguintes recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

(a) Sejam p e q dois números reais tais que

$$p = \lim_{x\to-1}\frac{f(x) - f(-1)}{x+1} \text{ e } q = -\frac{1}{p}.$$

Determine o valor de q e interprete geometricamente esse valor.

(b) Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.
Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

Exame Nacional de 2016 - 1.ª fase

35. Considere as sucessões (u_n) e (v_n) de termos gerais

$$u_n = \frac{kn+3}{2n} \text{ (} k \text{ é um número real)} \quad \text{e} \quad v_n = \ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$$

Sabe-se que $\lim (u_n) = \lim (v_n)$.
Qual é o valor de k?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** e **(D)** $2e$

Exame Nacional de 2016 - 1.ª fase

36. Para um certo número real k, é contínua em $\mathbb{R}$ a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2+e^{x+k} & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{2x+\ln(x+1)}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** $\ln 2$ **(D)** $\ln 3$

Exame Nacional de 2015 - 2.ª fase

37. Seja a um número real diferente de 0.
Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{ae^{x-a}-a}{x^2-a^2}$?

(A) $\dfrac{1}{4}$ **(B)** $\dfrac{1}{2}$ **(C)** 1 **(D)** 2

Exame Nacional de 2016 - 1.ª fase

38. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 1 + xe^x & \text{se } x \leq 3 \\ \ln(x-3) - \ln x & \text{se } x > 3 \end{cases}$

Resolva os itens seguintes recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

(a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do seu gráfico.

(b) Resolva, em $]-\infty, 3]$, a condição $f(x) - 2x > 1$.
Apresente o conjunto solução, usando a notação de intervalos de números reais.

(c) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 4.

Exame Nacional de 2015 - 2.ª fase

39. Para certos valores de a e de b ($a > 1$ e $b > 1$), tem-se $\log_b a = \frac{1}{3}$.
Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_a \left(a^2 b\right)$?

(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{5}{3}$ **(C)** 2 **(D)** 5

Exame Nacional de 2015 - 2.ª fase

40. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - \sqrt{e}}{2x - 1} & \text{se } x < \frac{1}{2} \\ (x+1)\ln x & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Resolva os itens **(a)** e **(b)** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

(a) Averigue da existência de assíntotas verticais do gráfico da função f.

(b) Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, no intervalo $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f.

(c) Mostre que a equação $f(x) = 3$ é possível em $]1, e[$, utilizando a calculadora gráfica, determine a única solução desta equação, neste intervalo, arredondada às centésimas.
Na sua resposta:

- recorra ao teorema de Bolzano para provar que a equação $f(x) = 3$ tem, pelo menos, umasolução no intervalo $]1, e[$;

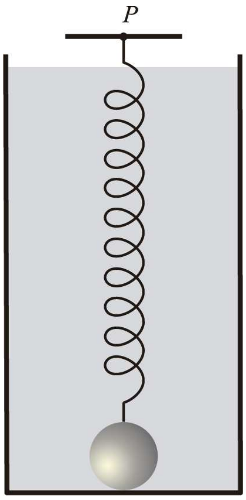
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- apresente a solução pedida.

Exame Nacional de 2015 - 1.ª fase

41. Na figura, está representado um recipiente cheio de um líquido viscoso.

Tal como a figura ilustra, dentro do recipiente, presa à sua base, encontra-se uma esfera. Essa esfera está ligada a um ponto P por uma mola esticada.
Num certo instante, a esfera é desprendida da base do recipiente e inicia um movimento vertical. Admita que, t segundos após esse instante, a distância, em centímetros, do centro da esfera ao ponto P é dada por

$$d(t) = 10 + (5 - t)e^{-0{,}05t} \quad (t \geq 0)$$



(a) Sabe-se que a distância do ponto P à base do recipiente é $16\ cm$.
Determine o volume da esfera.
Apresente o resultado em cm^3, arredondado às centésimas.

(b) Determine o instante em que a distância do centro da esfera ao ponto P é mínima, recorrendo amétodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Exame Nacional de 2015 - 1.ª fase

42. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x}$.
Considere a sucessão de termo geral $u_n = n^2$.
Qual é o valor de $\lim f(u_n)$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** e **(D)** $+\infty$

Exame Nacional de 2015 - 1.ª fase

43. Qual das seguintes expressões é, para qualquer número real k, igual a $\log_3 \left(\dfrac{3^k}{9}\right)$?

(A) $\dfrac{k}{2}$ **(B)** $k - 2$ **(C)** $\dfrac{k}{9}$ **(D)** $k - 9$

Exame Nacional de 2015 - 1.ª fase

44. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f\left(x\right) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{2+\ln x}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

O gráfico de f admite uma assíntota horizontal.
Seja P o ponto de intersecção dessa assíntota com a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e.
Determine as coordenadas do ponto P recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Exame Nacional de 2011 - 1.ª fase

45. Num museu, a temperatura ambiente em graus centígrados, t horas após as zero horas do dia 1 de Abril de 2010, é dada, aproximadamente, por

$$T(t) = 15 + 0{,}1t^2e^{-0{,}15t}, \quad \text{com} \quad t \in [0, 20].$$

Determine o instante em que a temperatura atingiu o valor máximo recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.
Apresente o resultado em horas e minutos, apresentando os minutos arredondados às unidades.
Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

Exame Nacional de 2011 - 1.ª fase

46. Seja f uma função de domínio $[0, +\infty[$, definida por

$$f\left(x\right) = \begin{cases} 2^x - 9 & \text{se } 0 \leq x < 5 \\ \dfrac{1-e^x}{x} & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$$

Em qual dos intervalos seguintes o teorema de Bolzano permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f?

(A) $]0, 1[$ **(B)** $]1, 4[$ **(C)** $]4, 6[$ **(D)** $]6, 7[$

Exame nacional de 2011 - 1.ª fase

47. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f\left(x\right) = \begin{cases} k + \dfrac{1-e^{x-1}}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ -x + \ln x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

(k designa um número real)
Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

(a) Determine k, sabendo que f é contínua em $x = 1$.

(b) Considere, agora, $k = 3$.
Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do gráfico de f.

Exame Nacional de 2011 - 1.ª fase - Prova Especial

48. O momento sísmico, M_0, é uma medida da quantidade total de energia que se transforma durante um sismo. Só uma pequena fracção do momento sísmico é convertida em energia sísmica irradiada, E , que é a que os sismógrafos registam.
A energia sísmica irradiada é estimada, em Joules, por $E = M_0 \times 1,6 \times 10^{-5}$.
A magnitude, M, de um sismo é estimada por $M = \frac{2}{3} \log_{10}(E) - 2,9$.
Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

(a) Admita que um sismo que ocorreu no Haiti, em 2010, teve magnitude $7,1$.
Determine o momento sísmico, M_0, para esse sismo.
Escreva o resultado na forma $a \times 10^n$, com n inteiro relativo e com a entre 1 e 10.

(b) Sejam M_1 e M_2 as magnitudes de dois sismos.
Mostre que, se a diferença entre a magnitude M_1 e a magnitude M_2 é igual a $\frac{2}{3}$, então a energia sísmica irradiada por um dos sismos é dez vezes superior à energia sísmica irradiada pelo outro sismo.

Exame Nacional de 2011 - 1.ª fase - Prova Especial

49. Considere a função f, de domínio $]0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{4}{x} + 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Seja (u_n) uma sucessão de números reais, de termos positivos, tal que $\lim f(u_n) = 3$.
Qual das expressões seguintes pode definir o termo geral da sucessão (u_n)?

(A) $2 - \dfrac{1}{n}$ **(B)** $2 + \dfrac{1}{n}$ **(C)** $3 - \dfrac{1}{n}$ **(D)** $3 + \dfrac{1}{n}$

Exame Nacional de 2011 - 1.ª fase - Prova Especial

50. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{1 - e^{x+1}} & \text{se } x \neq -1 \\ a + 2 & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

(a é um número real.)
Determine a sabendo que f é contínua em $x = -1$.

Exame Nacional de 2011 - Época especial

51. Considere uma função f, de domínio $]0,3[$, cuja derivada f', de domínio $]0,3[$, é definida por $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x}$.

Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar os intervalos de monotonia da função f;
- assinalar e indicar as coordenadas dos pontos relevantes, com arredondamento às centésimas.

Exame Nacional de 2010 - 1.ª fase

52. Para um certo valor real de k, admita que a quantidade de combustível, em litros, existente no depósito de uma certa máquina agrícola, t minutos após ter começado a funcionar, é dada aproximadamente por

$$Q(t) = 12 + \log_3\left(81 - kt^2\right), \quad \text{com} \quad t \in [0,20].$$

Considere que essa máquina agrícola funcionou durante 20 minutos e que, nesse período de tempo, consumiu 2 litros de combustível.

Determine o valor de k recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Exame Nacional de 2010 - 1.ª fase

53. Na Internet, no dia 14 de Outubro de 2009, pelas 14 horas, colocaram-se à venda todos os bilhetes de um espectáculo. O último bilhete foi vendido cinco horas após o início da venda.

Admita que, t horas após o início da venda, o número de bilhetes vendidos, em centenas, é dado, aproximadamente, por

$$N(t) = 8\log_4(3t+1)^3 - 8\log_4(3t+1), \quad t \in [0,5].$$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

(a) Mostre que $N(t) = 16\log_4(3t+1)$, para qualquer $t \in [0,5]$.

(b) Determine quanto tempo foi necessário para vender 2400 bilhetes.
Apresente o resultado em horas e minutos.
Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais, apresentando os minutos arredondados às unidades.

Exame Nacional de 2010 - 1.ª fase

54. Seja g a função, de domínio $]-2,+\infty[$, definida por $g(x)=\ln(x+2)$.
Considere, num referencial o.n. xOy, um triângulo $[OAB]$ tal que:

- O é a origem do referencial;
- A é um ponto de ordenada 5;
- B é o ponto de intersecção do gráfico da função g com o eixo das abcissas.

Qual é a área do triângulo $[OAB]$?

(A) $\frac{5}{2}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{5\ln 2}{2}$ **(D)** $\frac{\ln 2}{2}$

Exame Nacional de 2010 - 1.ª fase

55. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por$h\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x} & \text{se } x>0\\ \ln\left(x^{2}+1\right) & \text{se } x\leq 0\end{cases}$

Resolva, no intervalo $]-\infty,0]$, a inequação $h(x)>h(-4)$.

Exame Nacional especial de 2010 - Época especial

56. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^{-}$, definida por $f(x)=\ln(-3x)$.
Qual é a solução da equação $f(x)=2$?

(A) $\frac{1}{2}e^{3}$ **(B)** $-\frac{1}{2}e^{3}$ **(C)** $-\frac{1}{3}e^{2}$ **(D)** $\frac{1}{3}e^{2}$

Exame Nacional especial de 2010 - Época especial

57. Num certo dia, o Fernando esteve doente e tomou, às 9 horas da manhã, um medicamento cuja concentração $C(t)$ no sangue, em mg/l, t horas após o medicamento ter sido ministrado, é dada por

$$C(t)=2te^{-0{,}3t}\quad(t\geq 0)$$

Resolva, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, os dois itens seguintes.

(a) Calcule $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)$ e interprete esse valor no contexto da situação apresentada.

(b) Determine a que horas se verificou a concentração máxima.

Apresente o resultado em horas e minutos, arredondando estes às unidades.
Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

Exame Nacional especial de 2009 - 1.ª fase

58. Numa certa zona de cultivo, foi detectada uma doença que atinge as culturas. A área afetada pela doença começou por alastrar durante algum tempo, tendo depois começado a diminuir. Admita que a área, em hectares, afetada pela doença, é dada, em função de t, por

$$A(t) = 2 - t + 5\ln(t+1)$$

sendo t ($0 \leq t < 16$) o tempo, em semanas, decorrido após ter sido detectada essa doença. Resolva, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, os dois itens seguintes.

(a) Quando a doença foi detectada, já uma parte da área de cultivo estava afetada. Passada uma semana, a área de cultivo afetada pela doença aumentou.
De quanto foi esse aumento?
Apresente o resultado em hectares, arredondado às centésimas.

(b) Determine a área máxima afetada pela doença.
Apresente o resultado em hectares, arredondado às centésimas.
Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

Exame Nacional especial de 2009 - 2.ª fase

59. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+4} & \text{se } x > 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{e^{2x}-1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Estude a continuidade de h no domínio $\mathbb{R}$.

Exame Nacional especial de 2009 - 2.ª fase

60. Seja a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{x+1}$.
Qual dos pontos seguintes pertence ao gráfico de f? ($\ln$ designa logaritmo de base e.)

(A) $(-1, 0)$ **(B)** $(\ln 2, 2e)$ **(C)** $(\ln 5, 6)$ **(D)** $(-2, e)$

Exame Nacional especial de 2009 - 2.ª fase

61. Sejam as funções f e h, de domínios $]1, +\infty[$ e $]-\infty, 2[$, respetivamente, definidas por $f(x) = \log_2(x-1)$ e por $h(x) = \log_2(2-x)$.
Determine, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, o conjunto solução da condição $f(x) \geq 1 + h(x)$.
Apresente o resultado sob a forma de intervalo real.

Exame Nacional especial de 2009 - 1.ª fase

62. Para um certo número real positivo k, é contínua a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(k+x) & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

Exame Nacional especial de 2009 - 1.ª fase

63. Admita que a magnitude, M, de um sismo é dada, na escala de Richter, por

$$M = 0{,}67 \log E - 3,25$$

sendo E a energia, em joules, libertada por esse sismo. ($\log$ designa logaritmo de base 10.)
Resolva, recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, os dois itens seguintes.
Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

(a) Sejam E_1 e E_2 as energias libertadas por dois sismos de magnitudes M_1 e M_2, respetivamente.
Determine $\frac{E_1}{E_2}$, com aproximação às unidades, sabendo que $M_1 - M_2 = 1$.
Interprete o valor obtido no contexto da situação apresentada.

(b) O sismo que ocorreu nos Açores, no dia 1 de Abril de 2009, teve magnitude $4{,}7$ na escala de Richter.
Qual foi a energia libertada nesse sismo?
Escreva o resultado em notação científica, isto é, na forma $a \times 10^b$, sendo b um número inteiro, e a um número entre 1 e 10.
Apresente o valor de a arredondado às unidades.

Exame Nacional especial de 2009 - 1.ª fase

64. Seja a função f, de domínio $[0, \pi]$, definida por $f(x) = e^x \cos x$.
Estude, recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, a função f, quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, indicando os intervalos de monotonia e, caso existam, os extremos relativos.

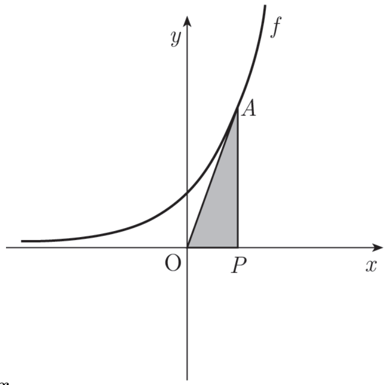
Exame Nacional especial de 2009 - 1.ª fase

65. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \dfrac{e^x + 3}{e^x}$.
Estude, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, a função g, quanto à existência de assíntotas do seu gráfico e, caso existam, escreva as suas equações.

Exame Nacional de 2009 - 1.ª fase

66. Na figura, está representada parte do gráfico da função f, dedomínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x$.

Considere um ponto, P, a deslocar-se sobre o semieixo positivo das abcissas.
Seja A o ponto pertencente ao gráfico da função que tem a mesma abcissa que o ponto P.
Para cada posição do ponto P, define-se um triângulo $[OAP]$.
Qual das expressões seguintes representa, em função de x (abcissa do ponto P), a área do triângulo $[OAP]$?



(A) xe^x **(B)** $\dfrac{xe^x}{2}$ **(C)** $\dfrac{x + e^x}{2}$ **(D)** e^x

Exame Nacional de 2009 - 1.ª fase

67. Sejam a e b dois números reais superiores a 1 e tais que $b = a^2$.
Qual dos valores seguintes é igual a $1 + \log_b a$?

(A) $\dfrac{2}{3}$ **(B)** $\dfrac{3}{4}$ **(C)** $\dfrac{4}{3}$ **(D)** $\dfrac{3}{2}$

Exame Nacional de 2009 - 1.ª fase

68. Sabe-se que o ponto $P(1, 3)$ pertence ao gráfico da função $f(x) = 2^{ax} - 1$, $a \in \mathbb{R}$.
Qual é o valor de a?

(A) 2 **(B)** 1 **(C)** 0 **(D)** -2

Exame Nacional de 2008 - 2.ª fase

69. Num determinado dia, um grupo de amigos decidiu formar uma associação desportiva.
Admita que, t dias após a constituição da associação, o número de sócios é dado, aproximadamente, por:

$$N(t) = \frac{2000}{1 + 199e^{-0{,}01t}}, \ t \geq 0.$$

Resolva, usando métodos analíticos, os dois itens seguintes.
Nota:A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use aproximações às milésimas.

(a) Determine $N(0)$ e $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)$.
Interprete os valores obtidos, no contexto do problema.

(b) Ao fim de quantos dias se comemorou a inscrição do sócio número 1000?

Exame Nacional de 2008 - 1.ª fase

70. A massa de uma substância radioativa diminui com a passagem do tempo.
Supõe-se que, para uma amostra de uma determinada substância, a massa, em gramas, ao fim de t horas de observação, é dada pelo modelo matemático $M(t) = 15 \times e^{-0{,}02t}$, $t \geq 0$.
Resolva, usando métodos analíticos, os dois itens que se seguem.
Nota:
A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

(a) Ao fim de quanto tempo se reduz a metade a massa inicial da amostra da substância radioativa?
Apresente o resultado em horas e minutos, estes arredondados às unidades.

(b) Utilize o Teorema de Bolzano para justificar que houve, pelo menos, um instante, entre as 2 horas e 30 minutos e as 4 horas após o início da observação, em que a massa da amostra da substância radioativa atingiu os 14 gramas.

Exame Nacional de 2008 - 2.ª fase

71. Seja a um número real maior do que 1.
Qual dos seguintes valores é igual a $2\log_a\left(a^{\frac{1}{3}}\right)$?

(A) $-\dfrac{2}{3}$ **(B)** $-\dfrac{1}{3}$ **(C)** $\dfrac{1}{3}$ **(D)** $\dfrac{2}{3}$

Exame Nacional de 2008 - 1.ª fase

72. Aqueceu-se água num recipiente, durante um determinado tempo, num local onde a temperatura ambiente é constante e igual a $25°$ Celsius. Interrompeu-se o processo de aquecimento, e nesse instante, a água começou a arrefecer.
O arrefecimento da água segue a Lei do arrefecimento de Newton, de acordo com o modelo matemático: $T(t) = 25 + 48e^{-0{,}05t}$, em que $T(t)$ representa a temperatura da água em graus Celsius, t minutos após o início do arrefecimento.
Resolva, recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, os dois itens seguintes.

(a) Determine $T(0)$ e $\lim\limits_{t\to+\infty} T(t)$.
Interprete os valores obtidos, no contexto do problema.

(b) Determine ao fim de quanto tempo, após o início do arrefecimento, a temperatura da água atinge os $36°$ Celsius.
Apresente o resultado em minutos e segundos, com estes arredondados às unidades.

Nota:
A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use quatro casas decimais.

Exame especial de 2008

73. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = 1 - \ln\left(x^2\right)$.
Determine os pontos de intersecção do gráfico de f com o eixo Ox recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Exame nacional de 2007 - 2.ª fase

74. Para todo o $x \in \mathbb{R}$, qual das seguintes expressões é equivalente a $x \cdot \ln\left(e^e\right)$?

(A) ex **(B)** e^x **(C)** e^{ex} **(D)** $x + e$

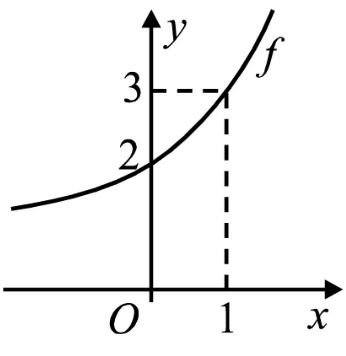
Exame especial de 2008

75. Sabendo que
$\ln(x) - \ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right) > 0$ ($\ln$ designa logaritmo na base e),
um valor possível para x é:

(A) 0 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 2

Exame nacional de 2007 - 1.ª fase

76. Sejam a e b dois números reais positivos.
Na figura está parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a^x + b$.
Tal como a figura sugere, os pontos $(0,2)$ e $(1,3)$ pertencem ao gráfico de f.
Quais são os valores de a e de b?



(A) $a = 2$ e $b = 1$ **(B)** $a = 2$ e $b = 3$
(C) $a = 3$ e $b = 2$ **(D)** $a = 3$ e $b = 1$

Exame nacional de 2006 - 2.ª fase

77. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = \dfrac{\ln\left(\sqrt{e^x}\right)}{2}$ ($\ln$ designa logaritmo de base e).
Qual das seguintes expressões pode também definir h?

(A) $\sqrt{x}$ **(B)** $\dfrac{x}{2}$ **(C)** $\dfrac{x}{4}$ **(D)** $\dfrac{\sqrt{x}}{2}$

Exame nacional de 2006 - $1.^{\text{a}}$ fase