# Derivadas - Exames Nacionais

**1.** Seja $h$ a função, de domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ definida por $h(x) = \operatorname{sen} x + \cos^2 x$.
Estude, sem recorrer à calculadora, a função $h$ quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.
Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

Exame nacional de 2021 - 2.ª fase

**2.** Seja $f$ a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - e^{-x}}{x} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função $f$ no ponto de abcissa $-2$.

Exame Nacional de 2021 - 2.ª fase

**3.** Seja $f$ a função, de domínio $]0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2(1 + 2\ln x) & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{5 - 5e^{x-1}}{x^2 + 3x - 4} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Estude, no intervalo $]0, 1[$, a função $f$ quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.
Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

Exame nacional de 2021 - $1.^{a}$ fase

**4.** Seja $f$ uma função, de domínio $]0, +\infty[$, cuja derivada, $f'$, de domínio $]0, +\infty[$, é dada por $f'(x) = \dfrac{2 + \ln x}{x}$.
Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{1 - x^2}$?

**(A)** $-2$ **(B)** $-1$ **(C)** $0$ **(D)** $2$

Exame nacional de 2020 - $2.^{a}$ fase

**5.** Seja $f$ uma função, de domínio $]0, +\infty[$, cuja derivada, $f'$, de domínio $]0, +\infty[$, é dada por $f'(x) = \dfrac{2 + \ln x}{x}$.
Estude a função $f$ quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.
Na sua resposta, apresente:
– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de $f$ tem concavidade voltada para baixo;
– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de $f$ tem concavidade voltada para cima;
– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de $f$.

Exame nacional de 2020 - $2.^{a}$ fase

**6.** Seja $g$ a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - e^x} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x^2 \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Estude a função $g$ quanto à monotonia em $]0, +\infty[$ e determine, caso existam, os extremos relativos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

Exame nacional de 2020 - 1.ª fase

**7.** Seja $g$ a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

**7.1** Estude a função $g$ quanto à monotonia e determine, caso existam, os extremos relativos.

**7.2** Seja $h$ a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = g(x) + 2x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Sabe-se que o gráfico da função $h$ tem uma assíntota oblíqua.

Qual é o declive dessa assíntota?

**(A)** $1$ **(B)** $2$ **(C)** $e$ **(D)** $e^2$

Exame nacional de 2019 - 1.ª fase

**8.** Seja $g$ a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

Estude a função $g$ quanto à monotonia e determine, caso existam, os extremos relativos.

Exame nacional de 2019 - 1.ª fase

**9.** Seja $f$ a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{x}{x - \ln x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função $f$ no ponto de abcissa $1$.

Exame nacional de 2019 - 1.ª fase

**10.** Seja $g$ a função, de domínio $[0, \pi]$, definida por $g(x) = 2\sin x + \sin^2 x$.

Seja $r$ a reta tangente ao gráfico da função $g$ que tem declive máximo.

Determine o declive da reta $r$.

Apresente a sua resposta na forma $\dfrac{a\sqrt{b}}{c}$, com $a$, $b$ e $c$ números naturais.

Exame nacional de 2018 - 2.ª fase

**11.** Seja $f$ a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 + \dfrac{e^x}{1-x} & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{\ln(x^2)+2}{x} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Determine $f'(0)$, recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.

Exame nacional de 2018 - 2.ª fase

**12.** Seja $f$ uma função diferenciável no intervalo $[0, 2]$ tal que

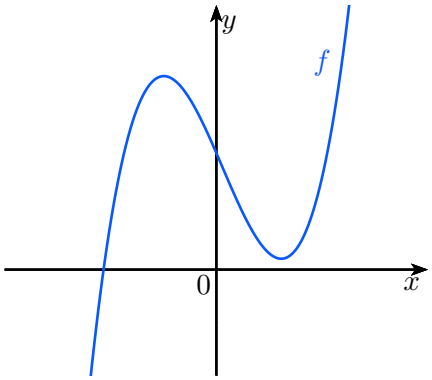
- $f(0) = 1$
- $\forall x \in [0, 2], 0 < f'(x) < 9$

O teorema de Lagrange, aplicado à função $f$ em $[0, 2]$, permite concluir que:

**(A)** $0 < f(2) < 18$ **(B)** $1 < f(2) < 19$ **(C)** $2 < f(2) < 20$ **(D)** $3 < f(2) < 21$

Exame nacional de 2018 - 1.ª fase

**13.** Na figura, está representada, num referencial o.n. $xOy$, parte do gráfico de uma função polinomial $f$.
Sabe-se que o único ponto de inflexão do gráfico de $f$ tem abcissa $0$.
Seja $f''$ a segunda derivada da função $f$.
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?




**(A)** $f''(1) + f''(2) < 0$
**(B)** $f''(-2) + f''(-1) > 0$
**(C)** $f''(-1) \times f''(-2) < 0$
**(D)** $f'(1) \times f''(2) > 0$

Exame nacional de 2017 - 2.ª fase

**14.** Seja $f$ a função, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2+\sin x}{\cos x} & \text{se } -\dfrac{\pi}{2} < x \leq 0 \\ x - \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens **14.1** e **14.2** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

**14.1** Estude a função $f$ quanto à existência de assíntota oblíqua do seu gráfico.

**14.2** Estude a função $f$ quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, nointervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$.

**14.3** Seja $r$ a reta tangente ao gráfico da função $f$ no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$.
Além do ponto de tangência, a reta $r$ interseta o gráfico de $f$ em mais dois pontos, $A$ e $B$, cujas abcissas pertencem ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ (considere que o ponto $A$ é o de menor abcissa).
Determine analiticamente a equação reduzida da reta $r$ e, utilizando a calculadora gráfica, obtenha as abcissas dos pontos $A$ e $B$.
Apresente essas abcissas arredondadas às centésimas.
Na sua resposta, reproduza, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver o problema.

Exame nacional de 2017 - 1.ª fase

**15.** Considere a função $f$, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Para um certo número real $k$, a função $g$, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \frac{k}{x} + f(x)$, tem um extremo relativo para $x = 1$.
Determine esse número $k$.

Exame nacional de 2016 - 2.ª fase

**16.** Seja $g$ a função definida por $g(x) = -f(x-5)$.
Em qual dos intervalos seguintes o gráfico de $g$ tem concavidade voltada para baixo?

**(A)** $]-15, -5[$ **(B)** $]0, 10[$ **(C)** $]-5, 5[$ **(D)** $]5, 15[$

Exame nacional de 2016 - 2.ª fase

**17.** De uma função $f$, de domínio $\mathbb{R}$, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio, sabe-se que $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2 - 2x}{f(x) - f(2)} = 4$.
Qual é o valor de $f'(2)$?

**(A)** $-\frac{1}{2}$ **(B)** $-\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{1}{4}$

Exame nacional de 2016 - 2.ª fase

**18.** Seja $f$ uma função, de domínio $\mathbb{R}$, cuja derivada, $f'$, de domínio $\mathbb{R}$, é dada por

$$f'(x) = e^x \left(x^2 + x + 1\right).$$

Resolva os itens **18.1** e **18.2** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

**18.1** Sejam $p$ e $q$ dois números reais tais que

$$p = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \quad \text{e} \quad q = -\frac{1}{p}.$$

Determine o valor de $q$ e interprete geometricamente esse valor.

**18.2** Estude a função $f$ quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.
Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de $f$ tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de $f$ tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de $f$

Exame nacional de 2016 - $1.^{\text{a}}$ fase

**19.** Seja $f$ a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 1 + xe^x & \text{se } x \leq 3 \\ \ln(x-3) - \ln x & \text{se } x > 3 \end{cases}$

Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função $f$ no ponto de abcissa $4$.

Exame nacional de 2015 - $2.^{\text{a}}$ fase

**20.** Seja $f$ a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3\sin^2 x$.
Qual das expressões seguintes define a função $f''$, segunda derivada de $f$?

**(A)** $6\sin(2x)\cos(x)$ **(B)** $6\sin(x)\cos(2x)$

**(C)** $6\cos(2x)$ **(D)** $6\sin(2x)$

Exame nacional de 2015 - $2.^{\text{a}}$ fase

**21.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que:

- $f$ tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio;
- $f'(0) > 0$;
- $f''(0) < 0$, para qualquer $x \in ]-\infty, 0]$.

Nenhum dos gráficos a seguir apresentados é o gráfico da função $f$.

Gráfico **A**

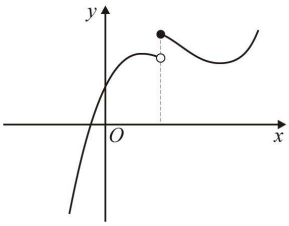



Gráfico **B**

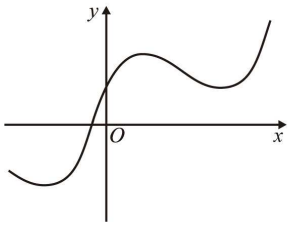
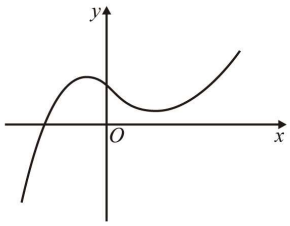



Gráfico **C**




Elabore uma composição na qual apresente, para cada um dos gráficos, uma razão pela qual esse gráfico não pode ser o gráfico da função $f$.

Exame nacional de 2015 - 2.ª fase

**22.** Sejam $f$ e $g$ as funções, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por

$$f(x) = 1 - \cos(3x) \text{ e } g(x) = \sin(3x).$$

Seja $a$ um número real pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Considere as retas $r$ e $s$ tais que:

- a reta $r$ é tangente ao gráfico da função $f$ no ponto de abcissa $a$;
- a reta $s$ é tangente ao gráfico da função $g$ no ponto de abcissa $a + \frac{\pi}{6}$.

Sabe-se que as retas $r$ e $s$ são perpendiculares.
Mostre que $\sin(3a) = -\frac{1}{3}$.

Exame nacional de 2015 - 1.ª fase

**23.** Seja $f$ a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

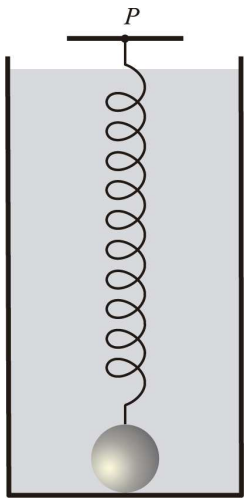
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - \sqrt{e}}{2x - 1} & \text{se } x < \frac{1}{2} \\ (x+1)\ln x & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Estude a função $f$ quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, no intervalo $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de $f$ tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de $f$ tem concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de $f$.

**24.** Na figura, está representado um recipiente cheio de um líquido viscoso.
Tal como a figura ilustra, dentro do recipiente, presa à sua base, encontra-se uma esfera. Essa esfera está ligada a um ponto $P$ por uma mola esticada.
Num certo instante, a esfera é desprendida da base do recipiente e inicia um movimento vertical. Admita que, $t$ segundos após esse instante, a distância, em centímetros, do centro da esfera ao ponto $P$ é dada por

$$d(t) = 10 + (5 - t)e^{-0,05t} \quad (t \geq 0)$$




**24.1.** Sabe-se que a distância do ponto $P$ à base do recipiente é $16\ cm$.
Determine o volume da esfera.
Apresente o resultado em $cm^3$, arredondado às centésimas.

**24.2.** Determine o instante em que a distância do centro da esfera ao ponto $P$ é mínima, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

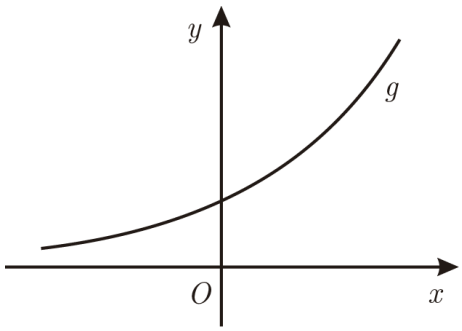
Exame nacional de 2015 - 1.ª fase

**25.** Considere a função $f$, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{2 + \ln x}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

O gráfico de $f$ admite uma assíntota horizontal.
Seja $P$ o ponto de intersecção dessa assíntota com a reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa $e$.
Determine as coordenadas do ponto $P$ recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Exame nacional de 2011 - 1.ª fase

**26.** Na figura, está representada, num referencial o. n. $xOy$, parte do gráfico da função $g$.

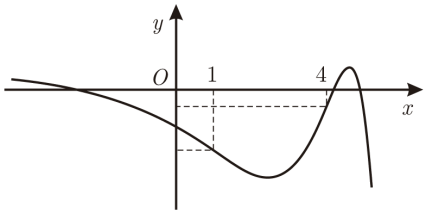



Sabe-se que:

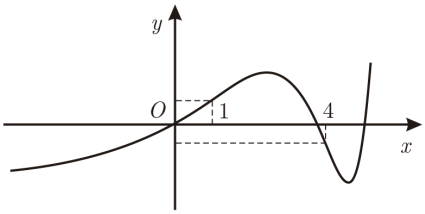
- $g$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$;
- $g$ não tem zeros;
- a segunda derivada, $f''$, de uma certa função $f$ tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $f''(x) = g(x) \times (x^2 - 5x + 4)$;
- $f(1) \times f(4) > 0$.

Apenas uma das opções seguintes pode representar a função $f$.

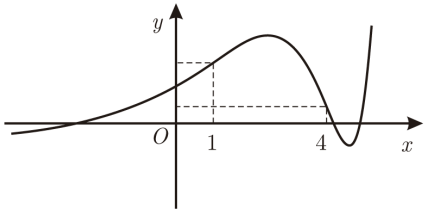
I



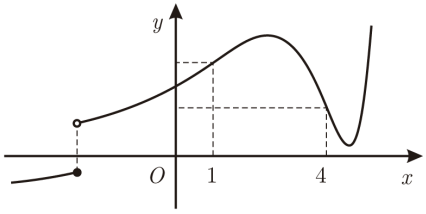

II




III




IV




Elabore uma composição na qual:

- indique a opção que pode representar $f$;
- apresente as razões que o levam a rejeitar as restantes opções.
  Apresente três razões, uma por cada gráfico rejeitado.

Exame nacional de 2011 - 1.ª fase

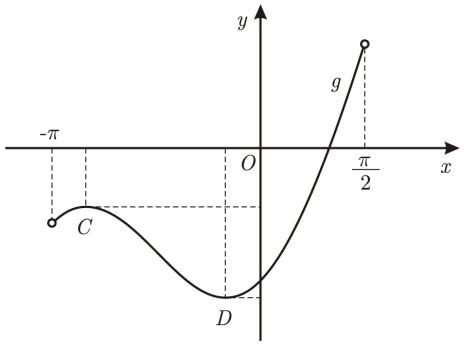
**27.** Num museu, a temperatura ambiente em graus centígrados, $t$ horas após as zero horas do dia 1 de Abril de 2010, é dada, aproximadamente, por

$$T(t) = 15 + 0{,}1t^2e^{-0{,}15t}, \text{ com } t \in [0, 20].$$

Determine o instante em que a temperatura atingiu o valor máximo recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.
Apresente o resultado em horas e minutos, apresentando os minutos arredondados às unidades.
Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

Exame nacional de 2011 - 1.ª fase

**28.** Na figura, está representado, num referencial o.n. $xOy$, o gráfico da função $g$, de domínio $]-\pi, \frac{\pi}{2}[$ definida por $g(x) = x - 2\cos x$.
Sabe-se que $C$ e $D$ são pontos do gráfico de $g$ cujas ordenadas são extremos relativos de $g$.




Determine os valores exatos das coordenadas dos pontos $C$ e $D$ recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Exame nacional de 2011 - 1.ª fase, Prova especial

**29.** Sejam $f$ e $g$ duas funções deriváveis em $\mathbb{R}$.
Sabe-se que:

- $f(1) = f'(1) = 1$;
- $g(x) = (2x - 1) \times f(x)$, para todo o valor real de $x$.

Qual é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de $g$ no ponto de abcissa 1?

**(A)** $y = 3x - 2$ **(B)** $y = 3x + 4$ **(C)** $y = 2x - 1$ **(D)** $y = -3x + 2$

Exame nacional de 2011 - 1.ª fase, Prova especial

**30.** De duas funções $f$ e $g$ sabe-se que:

- $f$ tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $f(x) = \pi - 4\text{sen}(5x)$;
- $g$ tem domínio $\left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$ e $g'$, primeira derivada de $g$, tem domínio $\left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$ e é definida por $g'(x) = \log_2\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)$.

Estude a função $g$ quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão no intervalo $\left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$.

Exame nacional de 2011 - Época especial

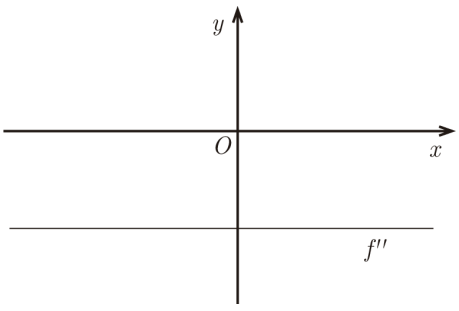
**31.** Considere a função $f$, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{1-e^{x+1}} & \text{se } x \neq -1 \\ a+2 & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

($a$ é um número real.)
Seja $f'$ a primeira derivada de $f$.
Mostre, sem resolver a equação, que $f'(x) = \frac{1}{4}$ tem, pelo menos, uma solução em $]0, 1[$.
Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

Exame nacional de 2011 - Época especial

**32.** Para um certo número real $a$, seja a função $f$, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 - 1$.
Na figura, está representada, num referencial o.n. $xOy$, parte do gráfico da função $f''$, segunda derivada da função $f$.




Qual dos valores seguintes pode ser o valor de $a$?

**(A)** $0$ **(B)** $\pi$ **(C)** $3$ **(D)** $-3$

Exame nacional de 2011 - Época especial

**33.** Considere a função $f$, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x + e^{2x^3-1}$.
Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa $x = 0$.

Exame nacional de 2010 - $2.^{a}$ fase

**34.** Considere a função $f$, de domínio $]0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 3x}{x} & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{1}{5}x - \ln x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Mostre que a função $f$ tem um extremo relativo no intervalo $]2, +\infty[$.

Exame nacional de 2010 - $2.^{a}$ fase

**35.** Considere uma função $f$, de domínio $]0, 3[$, cuja derivada $f'$, de domínio $]0, 3[$, é definida por $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x}$.
Estude a função $f$ quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.
Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar os intervalos de monotonia da função $f$;
- assinalar e indicar as coordenadas dos pontos relevantes, com arredondamento às centésimas.

Exame nacional de 2010 - $1.^{a}$ fase

**36.** Numa certa zona de cultivo, foi detectada uma doença que atinge as culturas. A área afetada pela doença começou por alastrar durante algum tempo, tendo depois começado a diminuir.
Admita que a área, em hectares, afetada pela doença, é dada, em função de $t$, por

$$A(t) = 2 - t + 5\ln(t + 1)$$

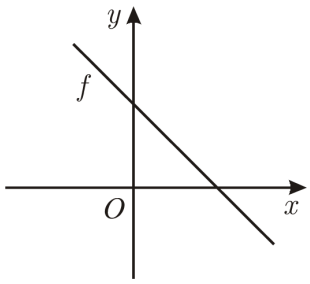
sendo $t$ ($0 \leq t < 16$) o tempo, em semanas, decorrido após ter sido detectada essa doença.
Determine, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, a área máxima afetada pela doença.
Apresente o resultado em hectares, arredondado às centésimas.
**Nota:** A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

Exame nacional de 2009 - $2.^{a}$ fase

**37.** Admita que, numa certa marina, a profundidade da água, em metros, $t$ horas após as zero horas de um certo dia, é dada por $P(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 8$, em que $t \in [0, 24]$.
Determine, recorrendo ao estudo da função derivada, a profundidade mínima, em metros, da água da marina, nesse dia.

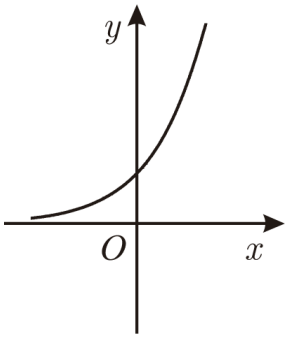
Exame nacional de 2010 - Época especial

**38.** Na figura, está representada, num referencial o.n. $xOy$, parte do gráfico de uma função afim $f$, de domínio $\mathbb{R}$.

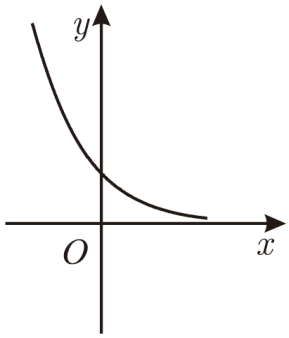



Seja $h$ a função definida por $h(x) = f(x) + e^x$.
Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função $h''$, segunda derivada de $h$?

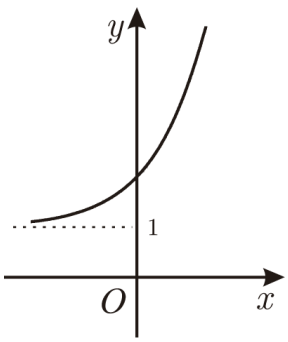
**(A)**



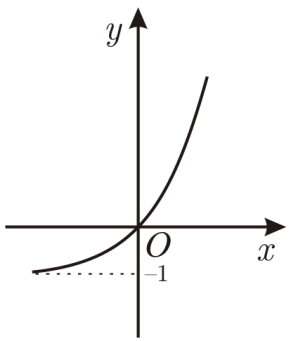

**(B)**




**(C)**




**(D)**




Exame nacional de 2010 - 1.ª fase

**39.** Seja $f$ a função, de domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, definida por $f(x) = \operatorname{sen}(2x) \cos x$.
Determine, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de $f$, no ponto de abcissa $0$.

Exame nacional de 2009 - $2.^{\text{a}}$ fase

**40.** Seja $h$ a função de domínio $]-1, +\infty[$ definida por $h(x) = 4 - x + \ln(x+1)$
($\ln$ designa logaritmo de base $e$).
Resolva, usando métodos analíticos, o item seguinte.
Nota:
A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use, pelo menos, duas casas decimais.
Estude a função $h$, quanto à monotonia, no seu domínio.

Exame nacional de 2008 - $1.^{\text{a}}$ fase

**41.** Considere a função $f$, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ ($\ln$ designa logaritmo de base $e$).
Estude, recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, a função $f$ quanto à monotonia e à existência de extremos relativos, indicando os intervalos de monotonia e os valores dos extremos relativos, caso existam.

Exame nacional de 2008 - Época especial

**42.** Considere a função $f$, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \frac{e^x}{x}$.
Determine, recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função $f$ no ponto de abcissa $2$.

Exame nacional de 2008 - Época especial

**43.** Considere a função $f$, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = 1 - \ln(x^2)$.
Estude a função quanto à monotonia e à existência de extremos relativos recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Exame nacional de 2007 - $2.^{\text{a}}$ fase

**44.** Na Figura 1 está representada parte do gráfico de uma função $h$, de domínio $\mathbb{R}_0^+$.

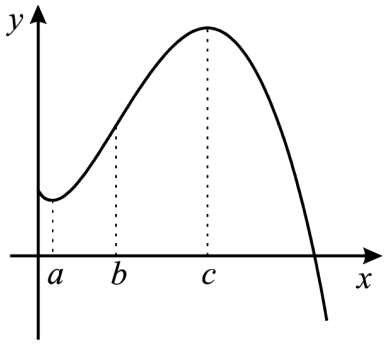



Figura 1

Em cada uma das figuras abaixo está representada parte do gráfico de uma função de domínio $\mathbb{R}_0^+$.
Uma das funções representadas é $h'$, primeira derivada de $h$, e a outra é $h''$, segunda derivada de $h$.

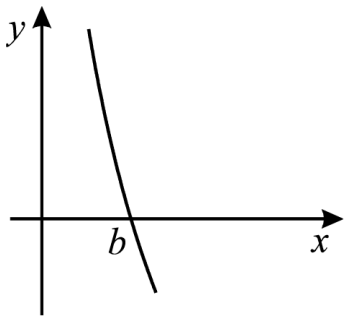



Figura 2

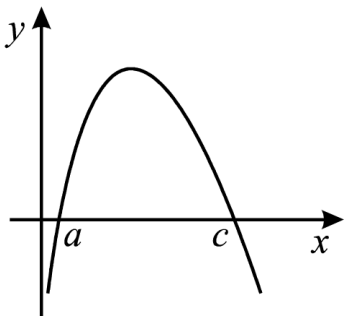



Figura 3

Numa pequena composição, explique em qual das figuras está representado o gráfico da primeira derivada e em qual está representado o gráfico da segunda derivada. Na sua composição, deve referir-se à variação de sinal das funções $h'$ e $h''$, relacionando-a com características da função $h$ (monotonia e sentido das concavidades do seu gráfico).

Exame nacional de 2007 - $2.^{\text{a}}$ fase

**45.** Admita que a intensidade da luz solar, $x$ metros abaixo da superfície da água, é dada, numa certa unidade de medida, por

$$I(x) = ae^{-bx} \quad (x \geq 0)$$

$a$ e $b$ são constantes positivas que dependem do instante e do local onde é efetuada a medição.
Sempre que se atribui um valor $a$ e um valor $b$ obtemos uma função de domínio $\mathbb{R}_0^+$.

**45.1.** Medições efetuadas, num certo instante e em determinado local do oceano Atlântico, mostraram que, a $20$ metros de profundidade, a intensidade da luz solar era metade da sua intensidade à superfície da água.
Determine o valor de $b$ para esse instante e local. Apresente o resultado arredondado às centésimas.

**45.2.** Considere agora $b = 0{,}05$ e $a = 10$.
Estude essa função quanto à monotonia e existência de assíntotas do seu gráfico.
Interprete os resultados obtidos no contexto da situação descrita.

Exame nacional de 2007 - 1.ª fase

**46.** Considere as funções $f$ e $g$, definidas em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = e^{x-1} \text{ e } g(x) = \operatorname{sen} x.$$

Considere ainda a função $h$, definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = f'(x) - g'(x)$.
Sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, resolva os dois itens seguintes:

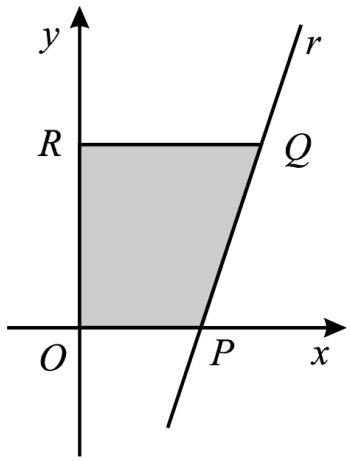
**46.1** Mostre que a função $h$ tem, pelo menos, um zero no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

**46.2** Tendo em conta **46.1**, justifique que existe $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que as retas tangentes aos gráficos de $f$ e $g$, nos pontos de abcissa $a$, são paralelas.

Exame nacional de 2007 - 1.ª fase

**47.** Seja $f$ a função, de domínio $]1, +\infty[$, definida por $f(x) = x + x\ln(x-1)$.
Resolva a seguinte questão sem recorrer à calculadora.
Na figura estão representados, em referencial o.n. $xOy$, uma reta $r$ e um trapézio $[OPQR]$.

- $Q$ tem abcissa $2$ e pertence ao gráfico de $f$ (o qual não está representado na figura);
- $r$ é tangente ao gráfico de $f$ no ponto $Q$;
- $P$ é o ponto de intersecção da reta $r$ com o eixo $Ox$;
- $R$ pertence ao eixo $Oy$ e tem ordenada igual à do ponto $Q$.

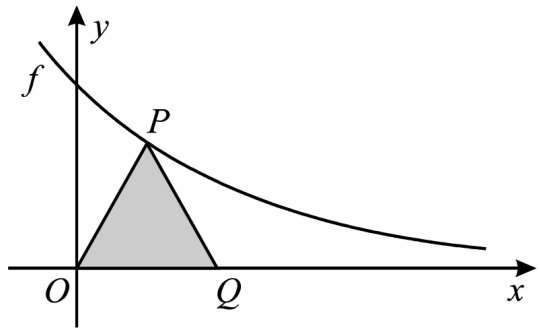



Determine a área do trapézio $[OPQR]$. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Exame nacional de 2006 - 2.ª fase

**48.** Na figura estão representados:

- parte do gráfico da função $f$, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{-x}$;
- um triângulo **isósceles** $[OPQ]$ ($\overline{PO} = \overline{PQ}$), em que:
  - $O$ é a origem do referencial;
  - $P$ é um ponto do gráfico de $f$;
  - $Q$ pertence ao eixo das abcissas.



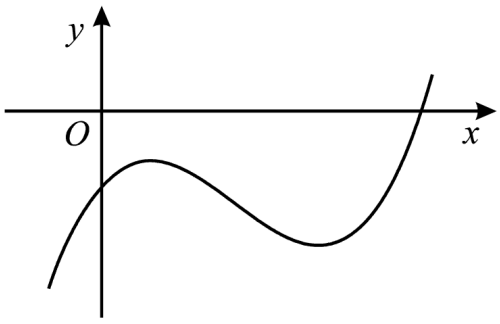

Considere que o ponto $P$ se desloca no primeiro quadrante (eixos não incluídos), ao longo do gráfico de $f$.
O ponto $Q$ acompanha o movimento do ponto $P$, deslocando-se ao longo do eixo das abcissas, de tal modo que $\overline{PO}$ permanece sempre igual a $\overline{PQ}$.
Seja $A$ a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, que faz corresponder, à abcissa $x$ do ponto $P$, a área do triângulo $[OPQ]$.

**48.1** Mostre que, para cada $x \in \mathbb{R}^+$ se tem $A(x) = xe^{-x}$.

**48.2** **Sem recorrer à calculadora**, estude a função $A$ quanto à monotonia e conclua qual é o valor máximo que a área do triângulo $[OPQ]$ pode assumir.

Exame nacional de 2006 - 1.ª fase

**49.** Na figura abaixo está parte do gráfico de uma função $h$, de domínio $\mathbb{R}$.

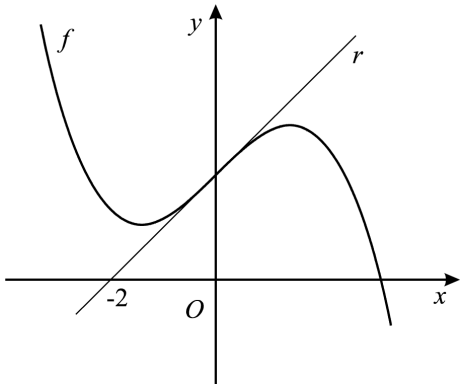



Sejam $h'$ e $h''$ a primeira e a segunda derivadas de $h$, respetivamente.
Admita que estas duas funções também têm domínio $\mathbb{R}$.
Qual das expressões seguintes designa um número positivo?

**(A)** $h(0) + h''(0)$
**(B)** $h(0) - h'(0)$
**(C)** $h'(0) - h''(0)$
**(D)** $h'(0) \times h''(0)$

Exame nacional de 2006 - 2.ª fase

**50.** Na figura está representada parte do gráfico de uma função polinomial $f$.
Tal como a figura sugere, o gráfico de $f$ tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0]$ e voltada para baixo em $[0, +\infty[$.




A reta $r$ tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa $0$ é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares e interseta o eixo $Ox$ no ponto de abcissa $-2$.
Sabendo que $f'$ e $f''$ designam, respetivamente, a primeira e a segunda derivadas de $f$, indique o valor de $f(0) + f'(0) + f''(0)$.

**(A)** $1$ **(B)** $2$ **(C)** $3$ **(D)** $4$

Exame nacional de 2006 - $1.^{a}$ fase

**51.** Seja $f$ a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln x} & \text{se } 0 < x < 1 \\ xe^{2-x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Seja $r$ a reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa $2$.
Seja $s$ a reta que passa na origem do referencial e é paralela à reta $r$.
A reta $s$ interseta o gráfico de $f$ num ponto.
Utilizando a sua calculadora, determine as coordenadas desse ponto. Apresente os valores arredondados às centésimas. Explique como procedeu, apresentando o gráfico, ou gráficos, obtido(s) na calculadora.

Exame nacional de 2006 - $1.^{a}$ fase, Época especial

**52.** De uma função $f$, de domínio $\mathbb{R}$ sabe-se que a sua segunda derivada é dada por $f''(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 5)(x + 6)^2$.
Quantos pontos de inflexão tem o gráfico de $f$?

**(A)** $1$ **(B)** $2$ **(C)** $3$ **(D)** $4$

Exame nacional de 2006 - $1.^{a}$ fase

**53.** Seja $f$ a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln x} & \text{se } 0 < x < 1 \\ xe^{2-x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

**Sem recorrer à calculadora**, estude a função $f$ quanto à monotonia, no intervalo $]0, 1[$.

Exame nacional de 2006 - $1.^{\text{a}}$ fase

**54.** Considere a função $g$, definida no intervalo $]1, 7[$ por $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \ln x}{x}$
($\ln$ designa logaritmo na base $e$).
**Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora**, visualize o gráfico da função $g$ e reproduza-o na sua folha de prova.
**Com base nesse gráfico** e utilizando as ferramentas adequadas da sua calculadora, resolva o seguinte problema:
*Seja $g'$ a função derivada de $g$. O conjunto solução da inequação $g'(x) < 0$ é um intervalo aberto $]a, b[$. Determine os valores de $a$ e de $b$. Apresente os resultados arredondados às centésimas.*
Justifique a sua resposta.

Exame nacional de 2007 - $2.^{\text{a}}$ fase