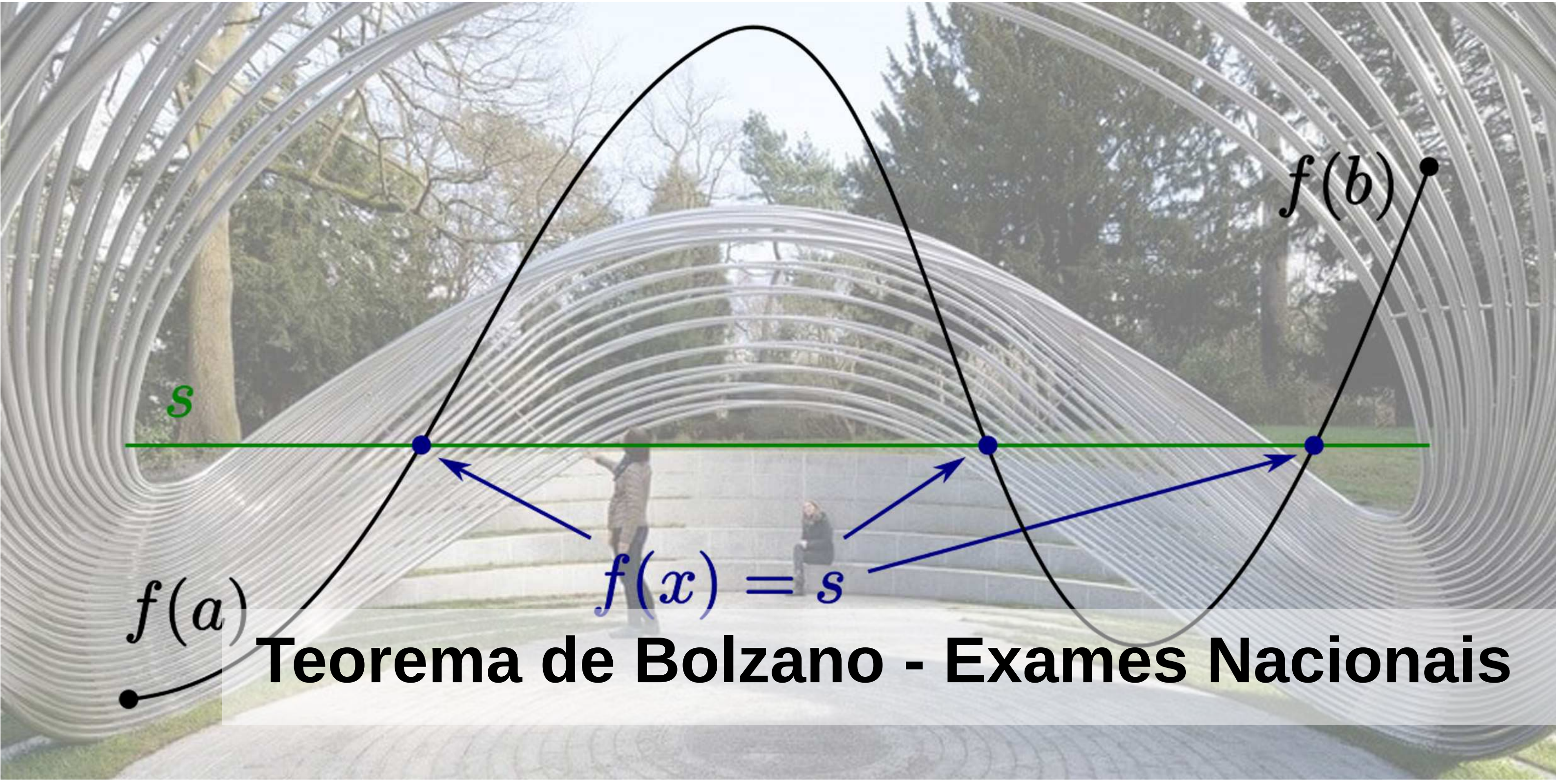


Teorema de Bolzano - Exames Nacionais

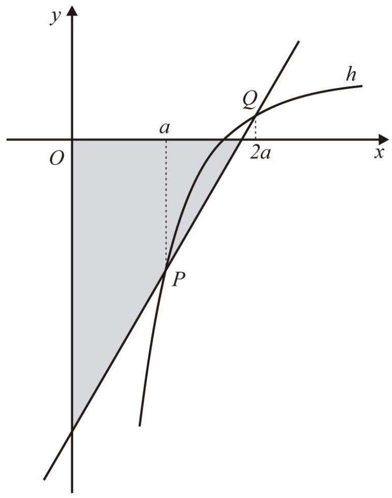
1. Resolva este item sem recorrer à calculadora.
Seja g a função, de domínio, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, definida por $g(x) = x\cos x + \operatorname{sen} x$.
Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico da função g tal que a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto tem declive $-\dfrac{1}{2}$.

Exame nacional de 2021 - 1.ª fase

2. Sejam f e g as funções, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por $f(x) = x^2$ e $g(x) = \cos x$.
Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que a equação $f(x) = g(x)$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $\left]0, \dfrac{\pi}{3}\right[$.

Exame nacional de 2020 - 2.ª fase

3. Na figura, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.



Para cada número real a pertencente ao intervalo $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ sejam P e Q os pontos do gráfico da função h de abcissas a e $2a$, respetivamente.
Tal como a figura sugere, a reta PQ define, com os eixos coordenados, um triângulo retângulo.
Mostre que existe, pelo menos, um número real a pertencente ao intervalo $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ para o qual esse triângulo é isósceles.
Sugestão: comece por identificar o valor do declive da reta PQ para o qual o triângulo é isósceles.

Exame nacional de 2018 - 1.ª fase

4. Seja g uma função contínua, de domínio $\mathbb{R}$, tal que:

- para todo o número real x, $(g \circ g)(x) = x$;
- para um certo número real a, tem-se $g(a) > a + 1$.

Mostre que a equação $g(x) = x + 1$ é possível no intervalo $]a, g(a)[$.

Exame nacional de 2017 - 1.ª fase

5. Um cubo encontra-se em movimento oscilatório provocado pela força elástica exercida por uma mola.
A Figura 2 esquematiza esta situação. Nesta figura, os pontos O e A são pontos fixos. O ponto P representa o centro do cubo e desloca-se sobre a semirreta $\dot{O}A$.

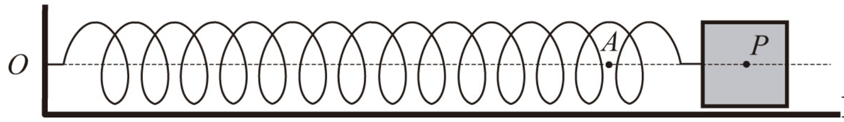


Figura 2

Admita que não existe qualquer resistência ao movimento.
Sabe-se que a distância, em metros, do ponto P ao ponto O é dada por

$$d(t) = 1 + \frac{1}{2}\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right).$$

A variável t designa o tempo, medido em segundos, que decorre desde o instante em que foi iniciada a contagem do tempo ($t \in [0, +\infty[$).
Justifique, recorrendo ao teorema de Bolzano, que houve, pelo menos, um instante, entre ostrês segundos e os quatro segundos após o início da contagem do tempo, em que a distância doponto P ao ponto O foi igual a $1{,}1$ metros.

Exame nacional de 2015 - 2.ª fase

6. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - \sqrt{e}}{2x - 1} & \text{se } x < \frac{1}{2} \\[2ex] (x+1)\ln x & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Mostre que a equação $f(x) = 3$ é possível em $]1, e[$, utilizando a calculadora gráfica, determine a única solução desta equação, neste intervalo, arredondada às centésimas.
Na sua resposta:

- recorra ao teorema de Bolzano para provar que a equação $f(x) = 3$ tem, pelo menos, umasolução no intervalo $]1, e[$;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- apresente a solução pedida.

Exame nacional de 2015 - 1.ª fase

7. Seja f uma função de domínio $[0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2^x - 9 & \text{se } 0 \leq x < 5 \\ \dfrac{1 - e^x}{x} & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$$

Em qual dos intervalos seguintes o teorema de Bolzano permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f?

(A) $]0, 1[$ **(B)** $]1, 4[$ **(C)** $]4, 6[$ **(D)** $]6, 7[$

Exame nacional de 2011 - 1.ª fase

8. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{1-e^{x+1}} & \text{se } x \neq -1 \\ a+2 & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

(a é um número real.)
Seja f' a primeira derivada de f.
Mostre, sem resolver a equação, que $f'(x) = \dfrac{1}{4}$ tem, pelo menos, uma solução em $]0,1[$.
Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

Exame nacional de 2011 - Época especial

9. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x + e^{2x^3-1}$.
Mostre que $f(x) = 1{,}5$ tem, pelo menos, uma solução em $]-2,-1[$.
Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

Exame nacional de 2010 - 2.ª fase

10. A massa de uma substância radioativa diminui com a passagem do tempo.
Supõe-se que, para uma amostra de uma determinada substância, a massa, em gramas, ao fim de t horas de observação, é dada pelo modelo matemático $M(t) = 15 \times e^{-0{,}02t}$, $t \geq 0$.
Utilize o Teorema de Bolzano para justificar que houve, pelo menos, um instante, entre as 2 horas e 30 minutos e as 4 horas após o início da observação, em que a massa da amostra da substância radioativa atingiu os 14 gramas.

Exame nacional de 2008 - 2.ª fase

11. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = e^{2x} + \ln x$.
Mostre, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, que a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $]0{,}1; 0{,}3[$.
Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos.

Exame nacional de 2009 - 1.ª fase

12. Seja h a função de domínio $]-1,+\infty[$ definida por $h(x) = 4 - x + \ln(x+1)$
($\ln$ designa logaritmo de base e).
Resolva, usando métodos analíticos, os dois itens seguintes.
Nota:
A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a

arredondamentos, use, pelo menos, duas casas decimais.
Justifique, aplicando o Teorema de Bolzano, que a função h tem, pelo menos, um zero no intervalo $]5,6[$.

Exame nacional de 2008 - $1.^{a}$ fase

13. Seja $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0)=f(2)=0$ e $f(1)>0$.
Prove que existe pelo menos um número real c no intervalo $[0,1]$ tal que $f(c)=f(c+1)$.
Sugestão: considere a função $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, definida por $g(x)=f(x)-f(x+1)$.

Exame nacional de 2006 - $2.^{a}$ fase

14. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x}{\ln x} & \text{se } 0<x<1\\ xe^{2-x} & \text{se } x\geq 1\end{cases}$$

Sem recorrer à calculadora, mostre que $\exists x\in]4,5[: f(x)+f\left(e^{-1}\right)=0$.

Exame nacional de 2006 - $1.^{a}$ fase