# Complexos - Exames nacionais

**1.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.
Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição $(1+2i)z+(1-2i)\overline{z}+10=0$ define, no plano complexo, uma reta.
Considere todos os números complexos cujos afixos pertencem a esta reta.
Determine qual deles tem menor módulo.
Apresente esse número complexo na forma $a+bi$, com $a,b\in\mathbb{R}$.

Exame Nacional de 2021 - 2.ª fase

**2.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z=2e^{i\frac{3\pi}{5}}$.
Seja $w$ o número complexo tal que $z\times w=i$.
Qual dos valores seguintes é um argumento do número complexo $w$?

**(A)** $\frac{19\pi}{10}$ **(B)** $\frac{2\pi}{5}$ **(C)** $-\frac{2\pi}{5}$ **(D)** $-\frac{19\pi}{10}$

Exame Nacional de 2021 - 2.ª fase

**3.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = -3+2i$, $z_2 = 1+2i$ e $z_3 = 2-i$.
Seja $w$ o número complexo tal que $w = \frac{z_1 \times z_2}{z_3}$.
Mostre, sem recorrer à calculadora, que a proposição seguinte é verdadeira.

$$|w| = \sqrt{13} \ \wedge \ \operatorname{Arg}(w) \in \left]-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[.$$

Exame Nacional de 2021 - 1.ª fase

**4.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{28}}$.
Seja $w$ o número complexo tal que $w = \frac{z_1}{z_2}$.
Sabe-se que, no plano complexo, o afixo do número complexo $w$ é um dos vértices de um polígono regular com centro na origem do referencial e com outro vértice sobre o semieixo real positivo.
Qual é o número mínimo de vértices desse polígono?

**(A)** $7$ **(B)** $14$ **(C)** $21$ **(D)** $28$

Exame Nacional de 2021 - 1.ª fase

**5.** Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.
Seja $k$ um número real.
Sabe-se que $k+i$ é uma das raízes quadradas do número complexo $3-4i$.
Qual é o valor de $k$?

**(A)** $2$ **(B)** $1$ **(C)** $-1$ **(D)** $-2$

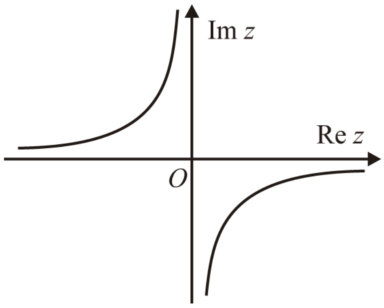
Exame Nacional de 2020 - 2.ª fase

**6.** Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.
Resolva este item sem recorrer à calculadora.
Seja $z_1 = \frac{2}{1-i} + \frac{4}{i^5}$ e seja $z_2$ um número complexo tal que $|z_2| = \sqrt{5}$.
Sabe-se que, no plano complexo, o afixo de $z_1 \times z_2$ tem coordenadas positivas e iguais.
Determine $z_2$.
Apresente a resposta na forma $a+bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

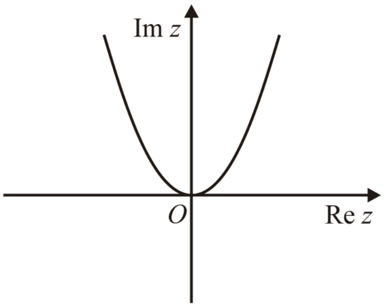
Exame Nacional de 2020 - 2.ª fase

**7.** Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.
Considere, em $\mathbb{C}$, a condição $\operatorname{Re}(z) \times \operatorname{Im}(z) = 1$.
Em qual das opções seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?

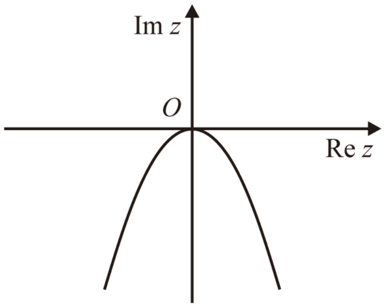
**(A)**



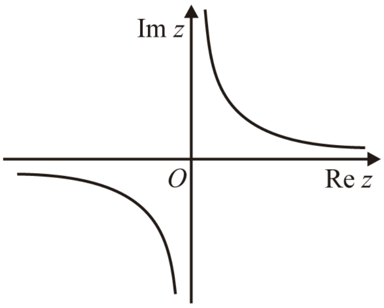

**(B)**




**(C)**




**(D)**




Exame Nacional de 2020 - 1.ª fase

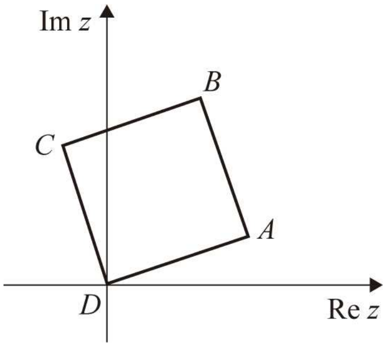
**8.** Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.
Resolva este item sem recorrer à calculadora.
Considere, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 = \bar{z}$.
Sabe-se que, no plano complexo, os afixos dos números complexos não nulos que são soluções desta equação são os vértices de um polígono regular.
Determine o perímetro desse polígono.

Exame Nacional de 2020 - 1.ª fase

**9.** Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, $z_1 = 2 - 3i$ e $z_2 = 1 - 2i$.
Mostre que o afixo (imagem geométrica) do número complexo $w = \dfrac{3z_1 - i\overline{z_2}}{1 + i^7}$ pertence à circunferência de centro no afixo (imagem geométrica) de $z_1$ e raio igual a $\sqrt{53}$.

Exame Nacional de 2019 - 2.ª fase

**10.** Na figura, está representado, no plano complexo, o quadrado $[ABCD]$.




Sabe-se que o ponto $A$ é o afixo (imagem geométrica) de um número complexo $z$ e que o ponto $D$ é o afixo (imagem geométrica) do complexo nulo.
Qual é o número complexo cujo afixo (imagem geométrica) é o ponto $B$?

**(A)** $z(1+i)$ **(B)** $iz$ **(C)** $i^3 z$ **(D)** $z(2+i)$

Exame Nacional de 2019 - 2.ª fase

**11.** Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, $z_1 = 3+4i$ e $z_2 = 4+6i$.
Seja $w = \dfrac{z_1 + i^6 + 2\overline{z_1}}{z_1 - z_2}$.
No plano complexo, a condição $|z| = |w| \wedge \mathrm{Im}(z) \geq 0 \wedge \mathrm{Re}(z) \geq 0$ define uma linha.
Determine o comprimento dessa linha.

Exame Nacional de 2019 - 1.ª fase

**12.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z = -1+2i$.
Seja $\theta$ o menor argumento positivo do número complexo $\overline{z}$ (conjugado de $z$).
A qual dos intervalos seguintes pertence $\theta$?

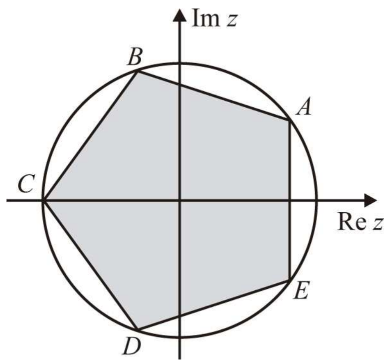
**(A)** $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ **(B)** $\left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ **(C)** $\left]\pi, \dfrac{5\pi}{4}\right[$ **(D)** $\left]\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$

Exame Nacional de 2019 - 1.ª fase

**13.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \dfrac{(2-i)^2 + 1 + i}{1-2i} + 3i^{15}$.
Escreva o complexo $-\frac{1}{2} \times \overline{z}$ na forma trigonométrica.

Exame Nacional de 2018 - 2.ª fase

**14.** Na figura, está representado, no plano complexo, um pentágono regular $[ABCDE]$ inscrito numa circunferência de centro na origem e raio $1$.




Sabe-se que o ponto $C$ pertence ao semieixo real negativo.
Seja $z$ o número complexo cujo afixo (imagem geométrica) é o ponto $A$.
Qual é o valor de $z^5$?

**(A)** $-1$ **(B)** $1$ **(C)** $i$ **(D)** $-i$

Exame Nacional de 2018 - 1.ª fase

**15.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w = 1 + \dfrac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}i^5}{1+2i}$.
Sabe-se que $w$ é uma raiz quarta de um certo complexo $z$.
Determine a raiz quarta de $z$ cujo afixo (imagem geométrica) pertence ao primeiro quadrante.
Apresente o resultado na forma trigonométrica, com argumento pertencente ao intervalo $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exame Nacional de 2018 - 1.ª fase

**16.** Para um certo número real $x$, pertencente ao intervalo $\left]0, \dfrac{\pi}{12}\right[$, o número complexo $z = (\cos x + i \sin x)^{10}$ verifica a condição $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{1}{3}\operatorname{Re}(z)$.
Qual é o valor de $x$ arredondado às centésimas?

**(A)** $0{,}02$ **(B)** $0{,}03$ **(C)** $0{,}12$ **(D)** $0{,}13$

Exame Nacional de 2018 - 1.ª fase

**17.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam

$$z_1 = \frac{1-3i^{19}}{1+i} \quad \text{e} \quad z_2 = -3ke^{i\frac{3\pi}{2}}, \text{com } k \in \mathbb{R}^+.$$

Sabe-se que, no plano complexo, a distância entre a imagem geométrica de $z_1$ e a imagem geométrica de $z_2$ é igual a $\sqrt{5}$.
Qual é o valor de $k$?
Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Exame Nacional de 2017 - 2.ª fase

**18.** Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição

$$\frac{5\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{7\pi}{4} \wedge \operatorname{Im} z \geq -1.$$

No plano complexo, esta condição define uma região.
Qual é a área dessa região?

**(A)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\sqrt{2}$ **(D)** $1$

Exame Nacional de 2017 - 2.ª fase

**19.** Seja $\rho$ um número real positivo, e seja $i$ um número real pertencente ao intervalo $]0, \pi[$.
Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \frac{-1+i}{\left(\rho e^{i\theta}\right)^2}$ e $w = -\sqrt{2}i$.
Sabe-se que $z = w$.
Determine o valor de $\rho$ e o valor de $\theta$.

Exame Nacional de 2017 - 1.ª fase

**20.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z = 3 + 4i$.
Sabe-se que $z$ é uma das raízes de índice $6$ de um certo número complexo $w$.
Considere, no plano complexo, o polígono cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice $6$ desse número complexo $w$.
Qual é o perímetro do polígono?

**(A)** $42$ **(B)** $36$

**(C)** $30$ **(D)** $24$

Exame Nacional de 2017 - 1.ª fase

**21.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam $z_1$ e $z_2$ tais que $z_1 = 2+i$ e $z_1 \times \overline{z_2} = 4-3i$.
Considere a condição $|z - z_1| = |z - z_2|$.
Mostre que o número complexo $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ verifica esta condição e interprete geometricamente este facto.
Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Exame Nacional de 2016 - 2.ª fase

**22.** Seja $z$ um número complexo de argumento $\frac{\pi}{5}$.
Qual dos seguintes valores é um argumento do número complexo $-5iz$?

**(A)** $-\frac{3\pi}{10}$ **(B)** $-\frac{4\pi}{5}$ **(C)** $-\frac{7\pi}{5}$ **(D)** $-\frac{13\pi}{10}$

Exame Nacional de 2016 - 2.ª fase

**23.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = \frac{8e^{i\theta}}{-1+\sqrt{3}i} \text{ e } z_2 = e^{i(2\theta)}.$$

Determine o valor de $\theta$ pertencente ao intervalo, $]0, \pi[$, de modo que $\overline{z_1} \times z_2$ seja um número real.

Exame Nacional de 2016 - 1.ª fase

**24.** Seja $\theta$ um número real pertencente ao intervalo, $\left]\pi, \frac{3}{2}\pi\right[$.
Considere o número complexo $z = -3e^{i\theta}$.
A que quadrante pertence a imagem geométrica do complexo $z$?

**(A)** Primeiro **(B)** Segundo

**(C)** Terceiro **(D)** Quarto

Exame Nacional de 2016 - 1.ª fase

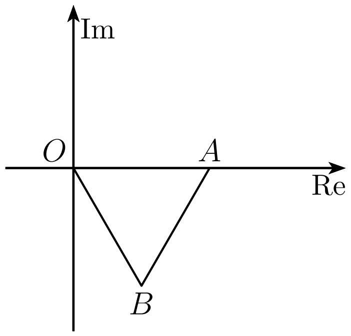
**25.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}}$.
Determine os números complexos $z$ que são solução da equação $z^4 = \overline{z_1}$, sem utilizar a calculadora.
Apresente esses números na forma trigonométrica.

Exame Nacional de 2015 - 2.ª fase

**26.** Na figura, está representado, no plano complexo, um triângulo equilátero $[OAB]$.

Sabe-se que:

- o ponto $O$ é a origem do referencial;
- o ponto $A$ pertence ao eixo real e tem abcissa igual a 1;
- o ponto $B$ pertence ao quarto quadrante e é a imagem geométrica de um complexo $z$.




Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

**(A)** $z = \sqrt{3}e^{i\frac{11\pi}{6}}$

**(B)** $z = e^{i\frac{11\pi}{6}}$

**(C)** $z = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{3}}$

**(D)** $z = e^{i\frac{5\pi}{3}}$

Exame Nacional de 2015 - 2.ª fase

**27.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \dfrac{-2+2i^{19}}{\sqrt{2}e^{i\theta}}$.

Determine os valores de $\theta$ pertencentes ao intervalo $]0, 2\pi[$, para os quais $z$ é um número imaginário puro.

Na resolução deste item, não utilize a calculadora.

Exame Nacional de 2011 - 1.ª fase

**28.** Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição

$$|z+4-4i| = 3 \wedge \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{3}{4}\pi.$$

No plano complexo, esta condição define uma linha.

Qual é o comprimento dessa linha?

**(A)** $\pi$

**(B)** $2\pi$

**(C)** $3\pi$

**(D)** $4\pi$

Exame Nacional de 2011 - 1.ª fase

**29.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = 1,\ z_2 = 5i \ \text{ e } \ z_3 = e^{i\frac{n\pi}{40}},\ n \in \mathbb{N}.$$

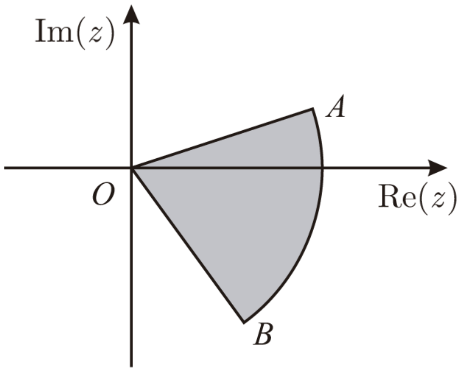
Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

**(a)** O complexo $z_1$ é raiz do polinómio $z^3 - z^2 + 16z - 16$.
Determine, em $\mathbb{C}$, as restantes raízes do polinómio.
Apresente as raízes obtidas na forma trigonométrica.

**(b)** Determine o menor valor de $n$ natural para o qual a imagem geométrica de $z_2 \times z_3$, no plano complexo, está no terceiro quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exame Nacional de 2011 - 1.ª fase

**30.** Na figura, está representado, no plano complexo, a sombreado, um setor circular.




Sabe-se que:

- o ponto $A$ está situado no 1.° quadrante;
- o ponto $B$ está situado no 4.° quadrante;
- $[AB]$ é um dos lados de um polígono regular cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice $5$ do complexo $32e^{i\frac{\pi}{2}}$;
- o arco $AB$ está contido na circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a $\overline{OA}$.

Qual dos números seguintes é o valor da área do sector circular $AOB$?

**(A)** $\frac{\pi}{5}$ **(B)** $\frac{4\pi}{5}$ **(C)** $\frac{2\pi}{5}$ **(D)** $\frac{8\pi}{5}$

Exame Nacional de 2011 - 1.ª fase

**31.** Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.
Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.
Considere $z_1 = 2 + \sqrt{3}i + i^{4n+2014}, \ n \in \mathbb{N}$.
Sabe-se que $z_1$ é uma das raízes cúbicas de um certo complexo $z$.
Determine $z$.
Apresente o resultado na forma algébrica.

Exame Nacional de 2011 - Época especial

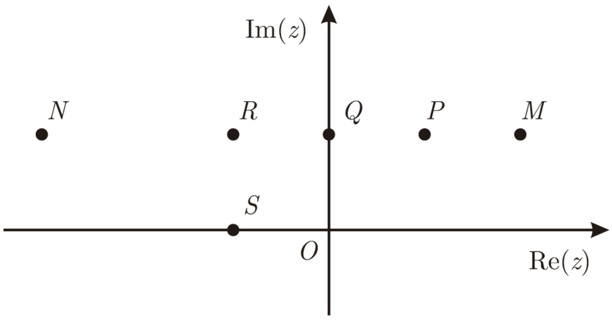
**32.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

**(a)** Seja $w$ o número complexo com coeficiente da parte imaginária positivo que é solução da equação $z^2 + z + 1 = 0$.
Determine $\dfrac{1}{w}$.
Apresente o resultado na forma trigonométrica.

**(b)** Seja $z$ um número complexo.
Mostre que $(\overline{z} + i) \times (z - i) = |z - i|^2$, para qualquer número complexo $z$.
($\overline{z}$ designa o conjugado de $z$)

Exame Nacional de 2011 - Época especial

**33.** Na figura, estão representados, no plano complexo, seis pontos, $M$, $N$, $P$, $Q$, $R$ e $S$.




Sabe-se que:

- o ponto $M$ é a imagem geométrica do número complexo $z_1 = 2 + i$;
- o ponto $N$ é a imagem geométrica do número complexo $z_1 \times z_2$.

Qual dos pontos seguintes pode ser a imagem geométrica do número complexo $z_2$?

**(A)** ponto $P$ **(B)** ponto $Q$ **(C)** ponto $R$ **(D)** ponto $S$

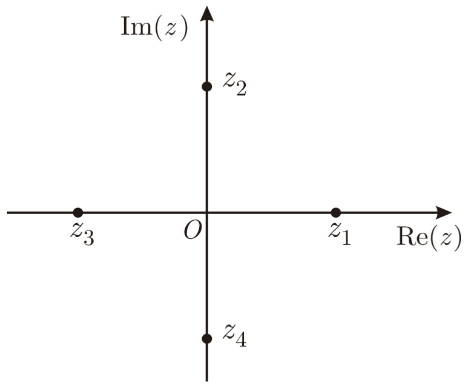
Exame Nacional de 2011 - Época especial

**34.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$.
Qual dos números complexos seguintes é uma das raízes de índice seis de $z$?

**(A)** $\sqrt{2}e^{i\frac{25\pi}{36}}$ **(B)** $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{36}}$ **(C)** $2\sqrt{2}e^{i\frac{25\pi}{36}}$ **(D)** $2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{36}}$

Exame Nacional de 2011 - Época especial

**35.** Na figura, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de quatro números complexos $z_1$, $z_2$, $z_3$ e $z_4$.




Qual é o número complexo que, com $n \in \mathbb{N}$, pode ser igual a $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2}$?

**(A)** $z_1$ **(B)** $z_2$ **(C)** $z_3$ **(D)** $z_4$

Exame Nacional de 2011 - 1.ª fase

**36.** Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.
Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.
Considere $z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$.
No plano complexo, a região definida pela condição

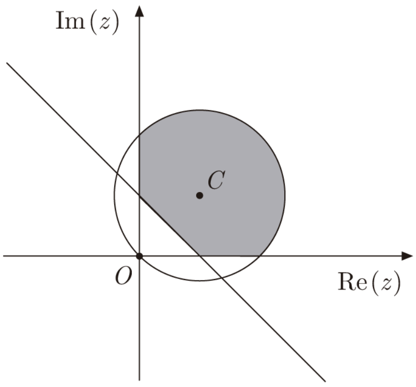
$$|z - z_2| \leq 1 \land \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq 2\pi \land |z| \geq |z - z_2|$$

está representada geometricamente numa das opções I, II, III e IV, apresentadas na página seguinte. (Considere como $\arg(z)$ a determinação que pertence ao intervalo $]0, 2\pi]$).
Sabe-se que, em cada uma das opções:

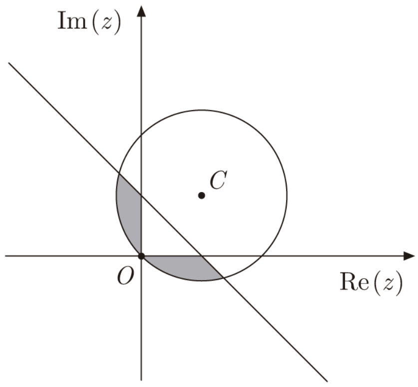
- $O$ é a origem do referencial;
- $C$ é a imagem geométrica de $z_2$;
- $\overline{OC}$ é o raio da circunferência.

Apenas uma das opções está correta.

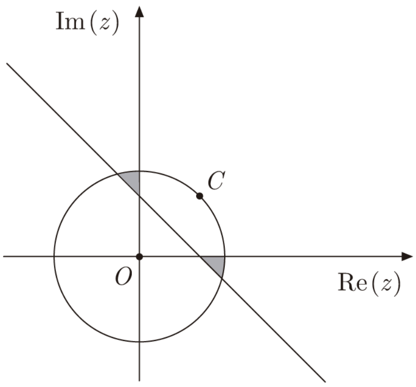
I



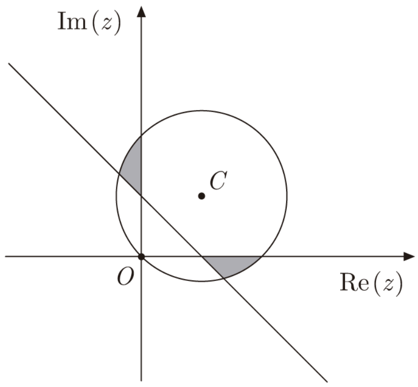

II




III




IV



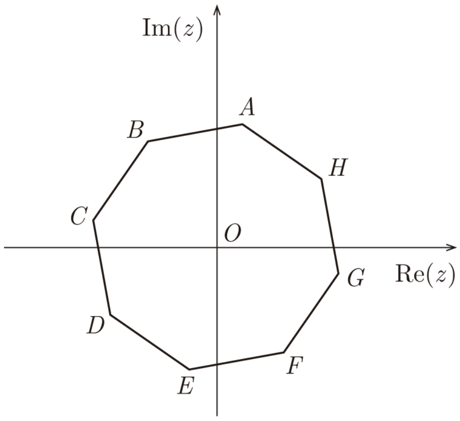

Elabore uma composição na qual:

- indique a opção correta;
- apresente as razões que o levam a rejeitar as restantes opções.

Apresente três razões, uma por cada opção rejeitada.

Exame Nacional de 2011 - Época especial

**37.** Considere, em $\mathbb{C}$, um número complexo $w$.
No plano complexo, a imagem geométrica de $w$ é o vértice $A$ do octógono $[ABCDEFGH]$, representado na figura.
Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice $8$ de um certo número complexo.




Qual dos números complexos seguintes tem como imagem geométrica o vértice $C$ do octógono $[ABCDEFGH]$?

**(A)** $-w$ **(B)** $w+1$ **(C)** $i \times w$ **(D)** $i^8 \times w$

Exame Nacional de 2011 - Época especial

**38.** Sejam $k$ e $p$ dois números reais e sejam $z_1 = (3k+2) + pi$ e $z_2 = (3p-4) + (2-5k)i$ dois números complexos.
Quais são os valores de $k$ e de $p$ para os quais $z_1$ é igual ao conjugado de $z_2$?

**(A)** $k=-1$ e $p=3$ **(B)** $k=1$ e $p=3$
**(C)** $k=0$ e $p=-2$ **(D)** $k=1$ e $p=-3$

Exame Nacional de 2011 - Época especial

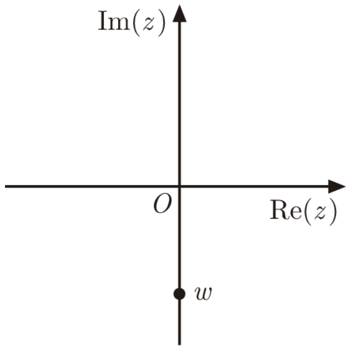
**39.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $z_2 = 3$.
Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

**(a)** Determine o número complexo $w = \dfrac{z_1^4 + 4i}{i}$.
Apresente o resultado na forma trigonométrica.

**(b)** Escreva uma condição, em $\mathbb{C}$, que defina, no plano complexo, a circunferência que tem centro na imagem geométrica de $z_2$ e que passa na imagem geométrica de $z_1$.

Exame Nacional de 2010 - 2.ª fase

**40.** Seja $w$ o número complexo cuja imagem geométrica está representada na figura.

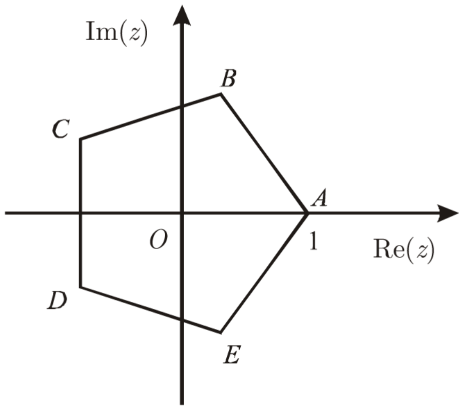



A qual das retas seguintes pertence a imagem geométrica de $w^6$?

**(A)** Eixo real
**(B)** Eixo imaginário
**(C)** Bissectriz dos quadrantes ímpares
**(D)** Bissectriz dos quadrantes pares

Exame Nacional de 2010 - 2.ª fase

**41.** A figura representa um pentágono $[ABCDE]$ no plano complexo.
Os vértices do pentágono são as imagens geométricas das raízes de índice $n$ de um número complexo $w$.
O vértice $A$ tem coordenadas $(1,0)$.




Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o vértice $D$ do pentágono?

**(A)** $5e^{i\frac{6\pi}{5}}$ **(B)** $e^{i\frac{6\pi}{5}}$ **(C)** $e^{-i\frac{\pi}{5}}$ **(D)** $e^{i\frac{\pi}{5}}$

Exame Nacional de 2010 - 2.ª fase

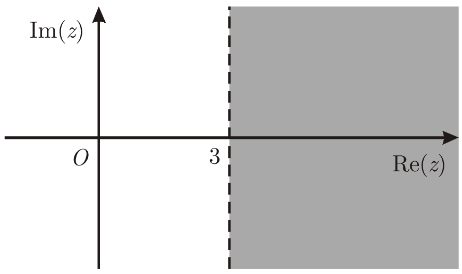
**42.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = e^{i\frac{\pi}{7}}$ e $z_2 = 2 + i$.
Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

**(a)** Determine o número complexo $w = \dfrac{3 - i\,(z_1)^7}{\overline{z_2}}$
($i$ designa a unidade imaginária, e $\overline{z_2}$ designa o conjugado de $z_2$).
Apresente o resultado na forma trigonométrica.

**(b)** Mostre que $|z_1 + z_2|^2 = 6 + 4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)$.

Exame Nacional de 2010 - 1.ª fase

**43.** Na figura, está representada, no plano complexo, a sombreado, parte do semiplano definido pela condição $\text{Re}(z) > 3$.




Qual dos números complexos seguintes tem a sua imagem geométrica na região representada a sombreado?

**(A)** $\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ **(B)** $3\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ **(C)** $\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ **(D)** $3\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$

Exame Nacional de 2010 - 1.ª fase

**44.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = 3e^{i\left(\frac{\pi}{8}-\theta\right)}$, com $\theta \in \mathbb{R}$.
Para qual dos valores seguintes de $\theta$ podemos afirmar que $z$ é um número imaginário puro?

**(A)** $-\dfrac{\pi}{2}$ **(B)** $\dfrac{\pi}{2}$ **(C)** $\dfrac{\pi}{8}$ **(D)** $\dfrac{5\pi}{8}$

Exame Nacional de 2010 - 1.ª fase

**45.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número complexo

$$z = \frac{(-1-i)^8}{\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2} \times e^{i\frac{5\pi}{2}}.$$

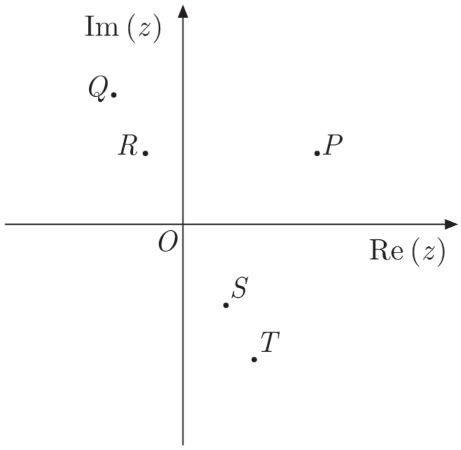
Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

**(a)** Verifique que $z = 16e^{i\frac{\pi}{4}}$.

**(b)** Determine a área do polígono cujos vértices, no plano complexo, são as imagens geométricas das raízes quartas de $z$.

Exame Nacional de 2010 - Época especial

**46.** Na figura, estão representados, no plano complexo, os pontos $P$, $Q$, $R$, $S$ e $T$.
O ponto $P$ é a imagem geométrica de um número complexo $z$




Qual dos pontos seguintes, representados na figura, é a imagem geométrica do número complexo $-i \times z$?

**(A)** $Q$ **(B)** $R$ **(C)** $S$ **(D)** $T$

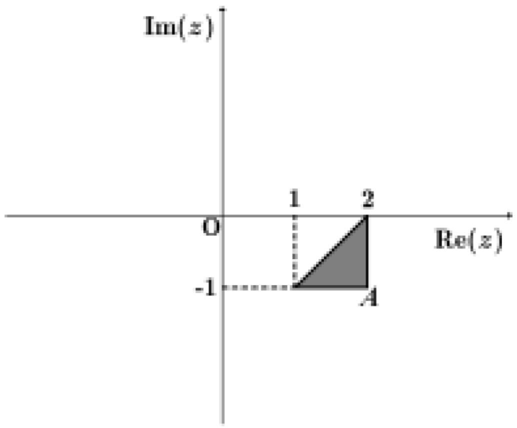
Exame Nacional de 2010 - Época especial

**47.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o conjunto
$A = \{z \in \mathbb{C} : i \times (z + \overline{z}) = 0\}$ ($i$ designa a unidade imaginária, e $\overline{z}$ designa o conjugado de $z$).
Qual das retas seguintes pode ser a representação geométrica, no plano complexo, do conjunto $A$?

**(A)** o eixo real
**(B)** o eixo imaginário
**(C)** a bissetriz dos quadrantes pares
**(D)** a bissetriz dos quadrantes ímpares

Exame Nacional de 2010 - Época especial

**48.** Na figura, está representada uma região do plano complexo. O ponto $A$ tem coordenadas $(2, -1)$.




Qual das condições seguintes define em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a região sombreada, incluindo a fronteira?

**(A)** $|z-1| \geq |z-(2-i)| \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 2 \wedge \operatorname{Im}(z) \geq -1$
**(B)** $|z-1| \leq |z-(2-i)| \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 2 \wedge \operatorname{Im}(z) \geq -1$
**(C)** $|z+1| \geq |z-(2+i)| \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 2 \wedge \operatorname{Im}(z) \geq -1$
**(D)** $|z-1| \geq |z-(2-i)| \wedge \operatorname{Im}(z) \leq 2 \wedge \operatorname{Re}(z) \geq -1$

Exame Nacional de 2009 - 2.ª fase

**49.** No conjunto dos números complexos, seja $z = \dfrac{\left(e^{i\frac{\pi}{7}}\right)^7 + (2+i)^3}{4e^{i\frac{3\pi}{2}}}$.
Determine $z$ na forma algébrica, **sem recorrer à calculadora**.

Exame Nacional de 2009 - 2.ª fase

**50.** Considere, em $\mathbb{C}$, um número complexo $w$, cuja imagem geométrica no plano complexo é um ponto $A$, situado no $1.°$ quadrante. Sejam os pontos $B$ e $C$, respetivamente, as imagens geométricas de $\overline{w}$ (conjugado de $w$) e de $(-w)$.
Sabe-se que $\overline{BC} = 8$ e que $|w| = 5$.
Determine a área do triângulo $[ABC]$.

Exame Nacional de 2009 - 2.ª fase

**51.** Seja $k$ um número real, e $z_1 = (k - i)(3 - 2i)$ um número complexo.
Qual é o valor de $k$, para que $z_1$ seja um número imaginário puro?

**(A)** $-\frac{3}{2}$ **(B)** $-\frac{2}{3}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{3}{2}$

Exame Nacional de 2009 - 2.ª fase

**52.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \frac{i}{1-i} - i^{18}$ e $z_2 = e^{i\frac{5}{6}\pi}$.

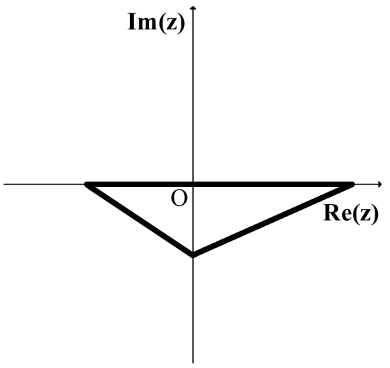
**(a)** Determine $z_1$ na forma trigonométrica, sem recorrer à calculadora.

**(b)** Determine o menor valor de $n \in \mathbb{N}$, tal que $(-iz_2)^n = -1$.

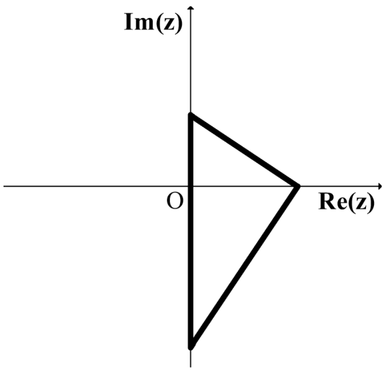
Exame Nacional de 2009 - 1.ª fase

**53.** Seja $b$ um número real positivo, e $z_1 = bi$ um número complexo.
Em qual dos triângulos seguintes os vértices podem ser as imagens geométricas dos números complexos $z_1$, $(z_1)^2$ e $(z_1)^3$?

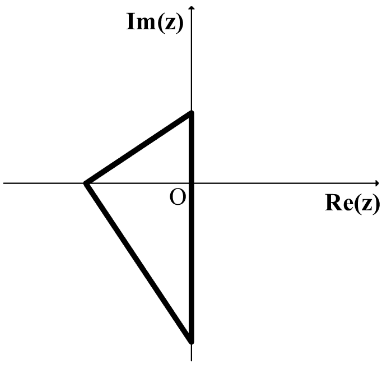
**(A)**



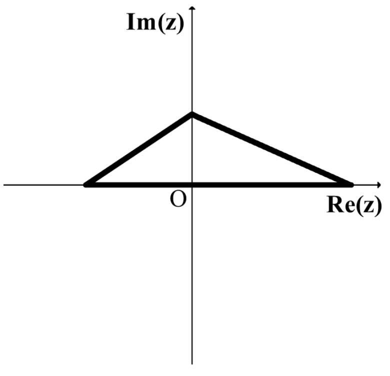

**(B)**




**(C)**




**(D)**




Exame Nacional de 2009 - 1.ª fase

**54.** Seja $z$ um número complexo, em que um dos argumentos é $\frac{\pi}{3}$.

Qual dos valores seguintes é um argumento de $\frac{2i}{\overline{z}}$, sendo $\overline{z}$ o conjugado de $z$?

**(A)** $\frac{\pi}{6}$ **(B)** $\frac{2}{3}\pi$ **(C)** $\frac{5}{6}\pi$ **(D)** $\frac{7}{6}\pi$

Exame Nacional de 2009 - 1.ª fase

**55.** Determine o valor de $\theta$, pertencente ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, de modo que a imagem geométrica do número complexo $\left(2e^{i\theta}\right)^2 \times \left(1+\sqrt{3}i\right)$ pertença à bissetriz do 3.º quadrante.

Exame Nacional de 2009 - Época especial

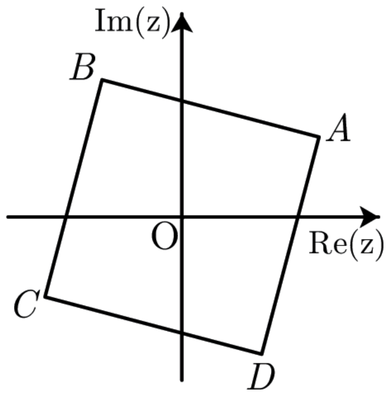
**56.** Considere, em $C$, o número complexo $z_1 = 3 - 2i$.

Determine, sem recorrer à calculadora, o número complexo $z = \dfrac{z_1 + z_1^2 + 2i^{43}}{8e^{i\frac{3\pi}{2}}}$.

Apresente o resultado na forma algébrica.

Exame Nacional de 2009 - 1.ª fase

**57.** Considere, em $\mathbb{C}$, o número complexo $w = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.
No plano complexo, a imagem geométrica de $w$ é um dos vértices do quadrado $[ABCD]$, com centro na origem $O$, representado na figura.




Qual dos números complexos seguintes tem como imagem geométrica o vértice $D$ do quadrado?

**(A)** $2e^{i\frac{3\pi}{2}}$ **(B)** $2e^{i\frac{7\pi}{4}}$ **(C)** $2e^{i\frac{11\pi}{6}}$ **(D)** $2e^{i\frac{5\pi}{3}}$

Exame Nacional de 2008 - 2.ª fase

**58.** Seja $\theta$ um número real pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Considere o número complexo $z = i.e^{i\theta}$.
Qual dos números complexos seguintes é o conjugado de $z$?

**(A)** $e^{i\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ **(B)** $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ **(C)** $e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$ **(D)** $e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)}$

Exame Nacional de 2008 - 2.ª fase

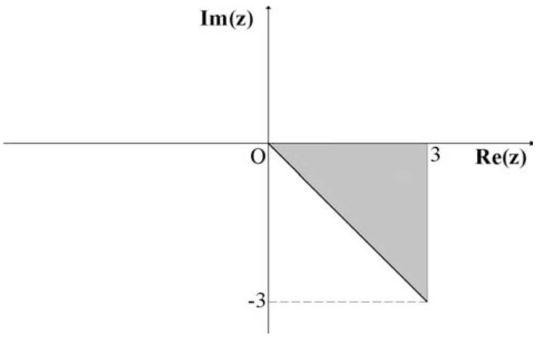
**59.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 - i$ ($i$ designa a unidade imaginária).
Sem recorrer à calculadora, determine o valor de $\dfrac{2z_1 - i^{18} - 3}{1 - 2i}$.
Apresente o resultado na forma algébrica.

Exame Nacional de 2008 - 2.ª fase

**60.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 - i$ ($i$ designa a unidade imaginária).
Considere $z_1$ uma das raízes quartas de um certo número complexo $z$.
Determine uma outra raiz quarta de $z$, cuja imagem geométrica é um ponto pertencente ao $3.^\circ$ quadrante.
Apresente o resultado na forma trigonométrica.

Exame Nacional de 2008 - 2.ª fase

**61.** Considere a figura, representada no plano complexo.




Qual é a condição, em $\mathbb{C}$, que define a região sombreada da figura, incluindo a fronteira?

**(A)** $\text{Re}(z) \leq 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$ **(B)** $\text{Re}(z) \leq 3 \wedge 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}$
**(C)** $\text{Im}(z) \leq 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq (0)$ **(D)** $\text{Re}(z) \geq 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$

Exame Nacional de 2008 - 2.ª fase

**62.** Seja $z$ um número complexo de argumento $\dfrac{\pi}{6}$.
Qual dos seguintes valores é um argumento de $(-z)$?

**(A)** $-\frac{\pi}{6}$ **(B)** $\frac{5}{6}\pi$ **(C)** $\pi$ **(D)** $\frac{7}{6}\pi$

Exame Nacional de 2008 - 2.ª fase

**63.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ e $z_2 = 8e^{i\times 0}$ ($i$ designa a unidade imaginária).

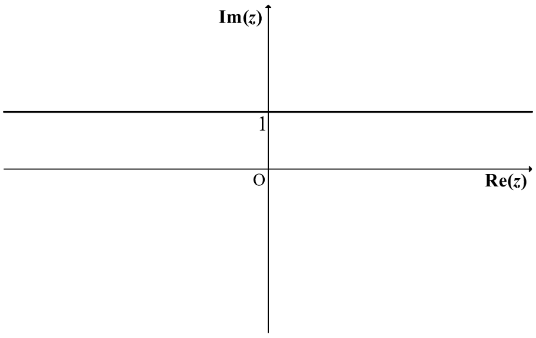
**(a)** Mostre, sem recorrer à calculadora, que $-z_1$ é uma raiz cúbica de $z_2$.

**(b)** No plano complexo, sejam $A$ e $B$ as imagens geométricas de $z_1$ e de $z_2$ respetivamente.
Determine o comprimento do segmento $[AB]$.

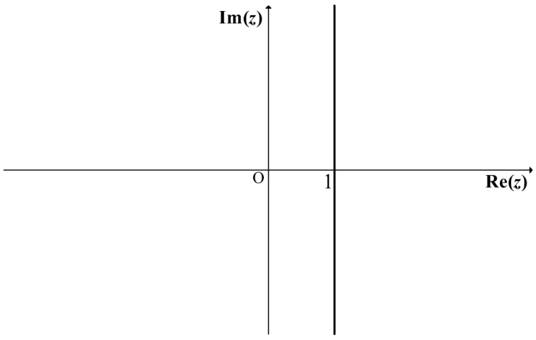
Exame Nacional de 2008 - 1.ª fase

**64.** Considere, em $\mathbb{C}$, a condição $z + \overline{z} = 2$.
Em qual das figuras seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definidos por esta condição?

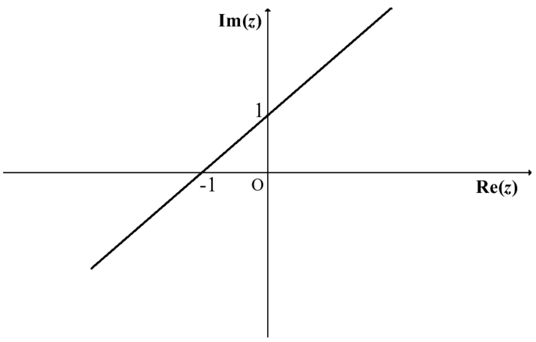
**(A)**



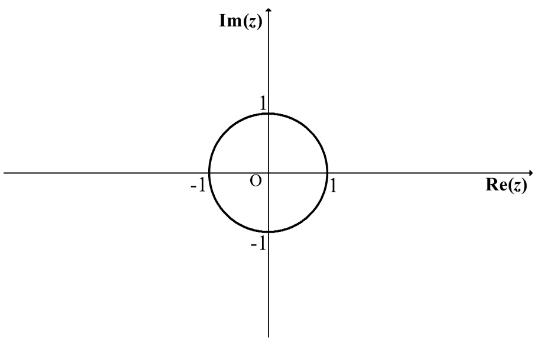

**(B)**




**(C)**




**(D)**




Exame Nacional de 2008 - 1.ª fase

**65.** Seja $z = 3i$ um número complexo.
Qual dos seguintes valores é um argumento de $z$?

**(A)** $0$ **(B)** $\frac{1}{2}\pi$ **(C)** $\pi$ **(D)** $\frac{3}{2}\pi$

Exame Nacional de 2008 - 1.ª fase

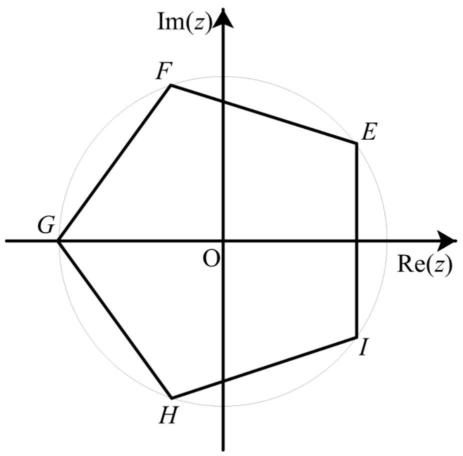
**66.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam os números $z_1 = (1-i)\cdot\left(1+e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$ e $z_2 = 8e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ($i$ designa a unidade imaginária).

**(a)** Determine, sem recorrer à calculadora, o número complexo $w = \frac{z_1}{z_2}$.
Apresente o resultado na forma trigonométrica.

**(b)** Considere o número complexo $z = \overline{z_2}$.
No plano complexo, sejam $A$ e $B$ as imagens geométricas de $z$ e de $z_2$, respetivamente.
Determine a área do triângulo $[AOB]$, em que $O$ é a origem do referencial.

Exame nacional de 2008 - Época especial

**67.** Na figura está representado, no plano complexo, o polígono $[EFGHI]$, inscrito numa circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a $2$. Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice $5$ de um certo número complexo; um dos vértices pertence ao eixo real.




Qual é o vértice do polígono $[EFGHI]$ que é a imagem geométrica de $2e^{-i\frac{3\pi}{5}}$?

**(A)** $E$ **(B)** $F$ **(C)** $H$ **(D)** $I$

Exame nacional de 2008 - Época especial

**68.** Qual das seguintes condições, na variável complexa $z$, define, no plano complexo, uma circunferência?

**(A)** $|z+4|=5$
**(B)** $|z|=|z+2i|$
**(C)** $0 \leq \arg(z) \leq \pi$
**(D)** $\text{Re}(z)+\text{Im}(z)=2$

Exame nacional de 2008 - Época especial

**69.** Em $C$ conjunto dos números complexos, sejam:

$$z_1 = 3 + yi \quad \text{e} \quad z_2 = 4iz_1$$

($i$ é a unidade imaginária e $y$ designa um número real).

**(a)** Considere que, para qualquer número complexo $z$ não nulo, $\arg(z)$ designa o argumento de $z$ que pertence ao intervalo $[0, 2\pi[$.
Admitindo que $\arg(z_1) = \alpha$ e que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, determine o valor de $\arg(-z_2)$ em função de $\alpha$.

**(b)** Sabendo que $\text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2)$, determine $z_2$.
Apresente o resultado na forma algébrica.

Exame nacional de 2007 - 2.ª fase

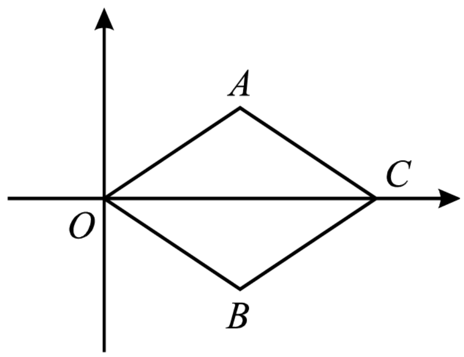
**70.** Em $\mathbb{C}$ conjunto dos números complexos, seja $i$ a unidade imaginária.
Seja $n$ um número natural tal que $i^n = -i$.
Indique qual dos seguintes é o valor de $i^{n+1}$.

**(A)** $1$
**(B)** $i$
**(C)** $-1$
**(D)** $-i$

Exame nacional de 2007 - 2.ª fase

**71.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = e^{i\alpha}$ ($\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$).

**(a)** Na figura está representado, no plano complexo, o paralelogramo $[AOBC]$.



$A$ e $B$ são as imagens geométricas de $z$ e $\overline{z}$, respetivamente.
$C$ é a imagem geométrica de um número complexo, $w$.
Justifique que $w = 2\cos\alpha$.

**(b)** Determine o valor de $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ para o qual $\dfrac{z^3}{i}$ é um número real.

Exame nacional de 2006 - 2.ª fase

**72.** Qual das opções seguintes apresenta duas raízes quadradas de um mesmo número complexo?

**(A)** $1$ e $i$
**(B)** $-1$ e $i$
**(C)** $1-i$ e $1+i$
**(D)** $1-i$ e $-1+i$

Exame nacional de 2006 - 2.ª fase

**73.** Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; $i$ designa a unidade imaginária.

**(a)** Considere $z_1 = (2-i)\left(2+e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$ e $z_2 = \frac{1}{5}e^{-i\frac{\pi}{7}}$.
**Sem recorrer à calculadora**, escreva o número complexo $\dfrac{z_1}{z_2}$ na forma trigonométrica.

**(b)** Seja $z$ um número complexo cuja imagem geométrica, no no plano complexo, é um ponto $A$ situado no primeiro quadrante.
Seja $B$ a imagem geométrica de $\overline{z}$, conjugado de $z$. Seja $O$ a origem do referencial.
Sabe-se que o triângulo $[AOB]$ é equilátero e tem perímetro $6$.
Represente o triângulo $[AOB]$ e determine $z$ na forma algébrica.

Exame nacional de 2006 - 2.ª fase

**74.** Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; $i$ designa a unidade imaginária.
onsidere que, para qualquer número complexo $z$ não nulo, $\arg(z)$ designa o argumento de $z$ que pertence ao intervalo $[0, 2\pi[$.
Represente a região do plano complexo definida pela condição, em $\mathbb{C}$,

$$\frac{1}{2} \leq |z| \leq 1 \ \wedge\ \frac{3\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{5\pi}{4}$$

e determine a sua **área**.

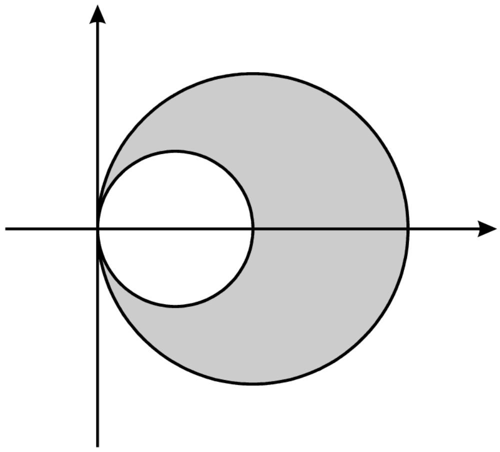
Exame nacional de 2006 - 1.ª fase

**75.** Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; $i$ designa a unidade imaginária.

**Sem recorrer à calculadora**, determine $\dfrac{4+2i\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^6}{3+i}$ apresentando o resultado final na forma trigonométrica.

Exame nacional de 2006 - $1.^{a}$ fase

**76.** Na figura estão representadas, no plano complexo, duas circunferências, ambas com centro no eixo real, tendo uma delas raio $1$ e a outra raio $2$.



A origem do referencial é o único ponto comum às duas circunferências.
Qual das condições seguintes define a região sombreada, incluindo a fronteira?

**(A)** $|z-1| \geq 1 \ \wedge \ |z-2| \leq 2$

**(B)** $|z-1| \geq 2 \ \wedge \ |z-2| \leq 1$

**(C)** $|z-1| \leq 1 \ \wedge \ |z-2| \geq 2$

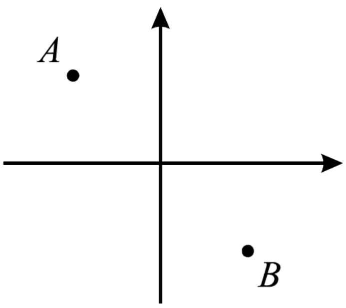
**(D)** $|z-1| \leq 1 \ \wedge \ |z-2| \geq 1$

Exame nacional de 2006 - $2.^{a}$ fase

**77.** Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; $i$ designa a unidade imaginária.
Considere a equação $iz^3 - \sqrt{3} - i = 0$.
Uma das soluções desta equação tem a sua imagem geométrica no terceiro quadrante do plano complexo.
**Sem recorrer à calculadora**, determine essa solução, escrevendo-a na forma trigonométrica.

Exame nacional de 2006 - $1.^{a}$ fase

**78.** Os pontos $A$ e $B$, representados na figura, são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes quadradas de um certo número complexo $z$.




Qual dos números complexos seguintes pode ser $z$?

**(A)** $1$ **(B)** $i$ **(C)** $-1$ **(D)** $-i$

Exame nacional de 2006 - 1.ª fase

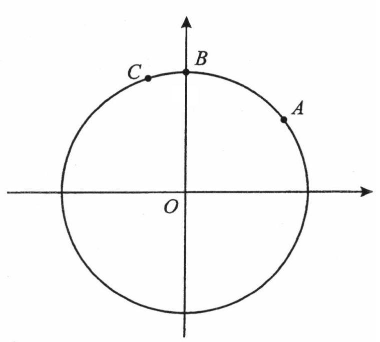
**79.** Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; $i$ designa a unidade imaginária.
Seja $B$ a região do plano complexo definida pela condição.

$$|z| \leq 2 \ \wedge \ \mathrm{Re}(z) \geq 0 \ \wedge \ |z-1| \leq |z-i|.$$

Represente graficamente $B$ e determine a sua área.

Exame nacional de 2006 - 1.ª fase

**80.** Na figura está representada, no plano complexo, uma circunferência centrada na origem do referencial.




Os pontos $A$, $B$ e $C$ pertencem a essa circunferência.
O ponto $A$ é a imagem geométrica de $4+3i$.
o ponto $B$ pertence ao eixo imaginário.
O arco $BC$ tem $18$ graus de amplitude.Em cada uma das quatro alternativas que se seguem, está escrito um número complexo na forma trigonométrica (os argumentos estão expressos

em radianos).Qual deles tem por imagem geométrica o ponto $C$?

**(A)** $7e^{i\frac{2\pi}{3}}$

**(B)** $7e^{i\frac{3\pi}{5}}$

**(C)** $5e^{i\frac{2\pi}{3}}$

**(D)** $5e^{i\frac{3\pi}{5}}$

Exame nacional de 2006 - Época especial