



Exponencial e logarítmica - Calculadora

Perguntas de Exames Nacionais dos últimos 16 anos com resolução e/ou vídeo.

Versão de 21 de janeiro de 2022.

Verifique se existe versão com data mais recente [aqui](#) e aceda a mais fichas [aqui](#).

1. Num laboratório cuja temperatura ambiente é constante, aqueceu-se uma substância até atingir uma certa temperatura, superior à temperatura ambiente, e, a seguir, deixou-se arrefecer essa substância durante uma hora.

Admita que a temperatura dessa substância, em graus Celsius, t minutos após o início do arrefecimento, é dada por

$$T(t) = 20 + 100e^{-kt}, \quad 0 \leq t \leq 60$$

em que k é uma constante real positiva.

Considere $k = 0,04$.

Sabe-se que, durante os primeiros t_2 minutos, a taxa média de variação da função T foi iguala $-2,4$.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de t_2 , sabendo que esse valor existe e é único.

Apresente o resultado em minutos e segundos (segundos arredondados às unidades).

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente a(s) abscissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às milésimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

[Resolução, pg. 9](#)

Exame Nacional de 2021 - 2.^a fase

2. O nível, N , de um som, medido em decibéis, é função da sua intensidade, I , medida em microwatt por metro quadrado ($\mu W/m^2$), de acordo com a igualdade

$$N = 60 + 10 \log_{10} I, \text{ com } I > 0.$$

Relativamente ao som de um certo despertador, sabe-se que, aumentando a sua intensidade em $150 \mu W/m^2$, o seu nível passa a ser 1,4% do quadrado do nível inicial.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor da intensidade inicial do som desse despertador, sabendo-se que pertence ao intervalo $[20, 80]$ e que, neste intervalo, esse valor é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) obter o valor pedido;
- apresente esse valor em $\mu W/m^2$, arredondado às unidades.

Resolução, pg. 10

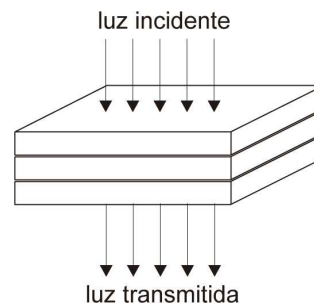
Exame Nacional de 2019 - 2.ª fase

3. Um feixe de luz incide perpendicularmente sobre um conjunto de três placas sobrepostas, homogêneas e iguais, feitas de um material transparente. A figura ilustra a situação. Admita que a potência, L , da luz transmitida, após atravessar o conjunto de placas, é dada por

$$L = I(1 - R)^6 e^{-3\lambda}$$

em que:

- I é a potência da luz incidente;
- R é o coeficiente de reflexão do material ($0 < R < 1$);
- λ é o coeficiente de absorção do material, por centímetro ($\lambda > 0$).



Relativamente ao material de que as placas são feitas, sabe-se que o coeficiente de reflexão, R , e o coeficiente de absorção, λ , têm o mesmo valor numérico.

Sabe-se ainda que a potência da luz transmitida é igual a metade da potência da luz incidente.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor comum dos coeficientes de absorção e de reflexão do material, sabendo-se que esse valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor pedido arredondado às milésimas.

4. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} & \text{se } x < 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ 3 + \frac{\sin(x-1)}{1-x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Na figura, estão representados, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função g e um triângulo $[OAP]$.

Sabe-se que:

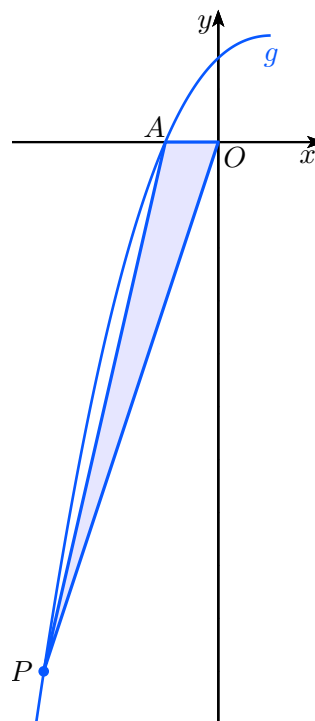
- o ponto A é o ponto de abscissa negativa que é a intersecção do gráfico da função g com o eixo das abscissas;
- o ponto P é um ponto do gráfico da função g , de abscissa e ordenada negativas;
- a área do triângulo $[OAP]$ é igual a 5.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abscissa do ponto P .

Apresente o valor obtido arredondado às décimas.

Na sua resposta:

- determine analiticamente a abscissa do ponto A ;
- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação.



5. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ \frac{2+\ln x}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

Existem dois pontos no gráfico de f cujas ordenadas são o cubo das abscissas.

Determine as coordenadas desses pontos recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

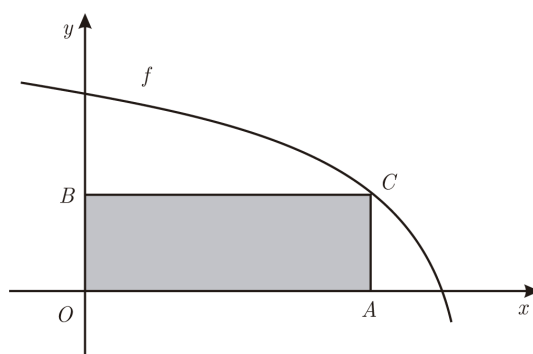
- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;

- assinalar esses pontos;
- indicar as coordenadas desses pontos com arredondamento às centésimas.

Resolução, pg. 13

Exame Nacional de 2011 - 1.ª fase

6. Na figura, está representada, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função f , de domínio $] -\infty, 6[$, definida por $f(x) = 2 + 15 \ln \left(3 - \frac{1}{2}x \right)$. Considere que um ponto C se desloca ao longo do gráfico de f , e que C tem coordenadas positivas. Para cada posição do ponto C , considere o retângulo $[OACB]$, em que o ponto A pertence ao eixo das abcissas e o ponto B pertence ao eixo das ordenadas.



Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abscissa do ponto A para a qual a área do retângulo $[OACB]$ é máxima.

Na sua resposta, deve:

- escrever a expressão que dá a área do retângulo $[OACB]$ em função da abscissa do ponto A ;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abscissa do ponto A com arredondamento às centésimas.

Resolução, pg. 14

Exame Nacional de 2011 - Prova especial

7. Considere a função f , de domínio $]0, \pi[$, definida por $f(x) = \ln x \times \cos x$.

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- A é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo Ox , que se situa mais próximo da origem O ;
- B é o ponto de intersecção do gráfico da função f com a reta bissetriz dos quadrantes pares.

Determine a área do triângulo $[OAB]$, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora. Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as coordenadas dos pontos A e B , arredondando às milésimas as coordenadas do ponto B ;
- desenhar o triângulo $[OAB]$, assinalando os pontos que representam os seus vértices;
- apresentar o resultado pedido, com arredondamento às centésimas.

Resolução, pg. 16

Exame Nacional de 2010 - Época especial

8. Considere a função f , de domínio $]0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 3x}{x} & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ \frac{1}{5}x - \ln x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Determine a área do triângulo $[ABC]$, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Sabe-se que:

- A , B e C são pontos do gráfico da função f ;
- A e B são os pontos cujas abcissas são as soluções, no intervalo $]0, 2]$, da equação $f(x) = f(15)$;
- C é o ponto cuja ordenada é o mínimo da função f , no intervalo $]0, 2]$, e cuja abcissa pertence ao intervalo $]0, 2]$.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as coordenadas dos pontos A , B e C , com arredondamento às centésimas;
- apresentar o resultado pedido, com arredondamento às décimas.

Resolução, pg. 15

Exame Nacional de 2010 - 2.ª fase

9. Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = e^{2x} + \ln x$.

O gráfico de g contém um único ponto A com abcissa pertencente ao intervalo $]0, 2]$ e cuja ordenada é igual ao dobro da abcissa.

Traduza esta situação por meio de uma equação.

Resolva a equação, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Indique as coordenadas do ponto A , com aproximação às décimas.

Reproduza, na folha de respostas, o gráfico, ou os gráficos, visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial.

Assinale o ponto A em que se baseou para dar a sua resposta.

Resolução, pg. 17

Exame Nacional de 2009 - 1.ª fase

10. Seja a função f , de domínio $[0, \pi]$, definida por $f(x) = e^x \cos x$.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, um valor, aproximado às décimas, da área do trapézio $[OABC]$, em que:

- O é a origem do referencial;
- A é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo Oy ;
- B é o ponto do gráfico de f , tal que a reta AB é paralela ao eixo Ox ;
- C é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo Ox .

Reproduza, na folha de respostas, o gráfico visualizado na calculadora, incluindo o referencial. Desenhe o trapézio $[OABC]$, assinalando os pontos que representam os seus vértices.

Nota: Nas coordenadas dos vértices em que é necessário fazer arredondamentos, utilize duas casas decimais.

Resolução, pg. 18

Exame Nacional de 2009 - Especial

11. Considere, num referencial ortonormado xOy , os gráficos das funções f e g , de domínio $[0, 3]$, definidas por $f(x) = \ln(x + 2)$ e $g(x) = e - e^{x-1}$.

($\ln$ designa logaritmo de base e).

Determine a área de um triângulo $[OAB]$, com aproximação às décimas, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Para construir o triângulo $[OAB]$, percorra os seguintes passos:

- visualize as curvas representativas dos gráficos das duas funções, no domínio indicado;
- reproduza, na sua folha de respostas, o referencial e as curvas visualizadas na calculadora;
- assinale, ainda:
 - a origem O do referencial;
 - o ponto A de intersecção do gráfico das duas funções, indicando as suas coordenadas, com aproximação às décimas;
 - o ponto B de intersecção do gráfico da função g com o eixo Ox .

Resolução, pg. 20

Exame Nacional de 2008 - 1.ª fase

12. Considere a função f , de domínio $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right]$, definida por $f(x) = \frac{\ln(2x - 1)}{2x + 1}$, e a função g , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x - 2$ ($\ln$ designa logaritmo de base e).

Indique as soluções inteiras da inequação $f(x) > g(x)$, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Para resolver esta inequação, percorra os seguintes passos:

- visualize as curvas representativas dos gráficos das duas funções;
- reproduza, na sua folha de respostas, o referencial e as curvas visualizadas na calculadora;

- assinala, ainda, os pontos A e B , de intersecção dos gráficos das duas funções, indicando as suas coordenadas, com aproximação às décimas.

Resolução, pg. 19

Exame Nacional de 2008 - 2.ª fase

13. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

No intervalo $]0, 5]$, a reta de equação $y = 6$ interseca o gráfico da função f nos pontos A e B . Determine a distância de A a B , com aproximação às décimas, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Apresente o gráfico, ou os gráficos, em que se baseou para dar a sua resposta, assinalando os pontos A e B e indicando as suas coordenadas com aproximação às décimas.

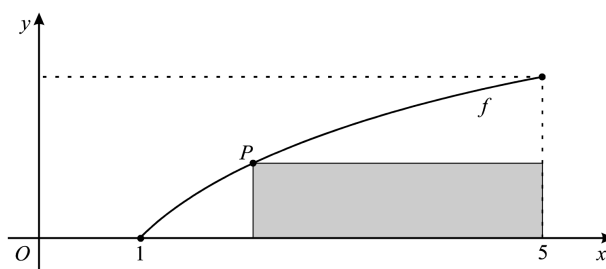
Resolução, pg. 21

Exame nacional de 2008 - Época especial

14. Seja f a função, de domínio $[1, 5]$, definida por $f(x) = \ln x$.

($\ln$ designa logaritmo na base e).

Na figura está representado, em referencial ortonormado xOy , o gráfico da função f .



Considere que um ponto P se desloca ao longo do gráfico de f . Para cada posição do ponto P , considere o retângulo em que um dos lados está contido no eixo Ox , outro na reta de equação $x = 5$ e os outros dois nas retas vertical e horizontal que passam pelo ponto P .

Exprima a área do retângulo em função da abscissa de P , e, recorrendo à calculadora gráfica, determine a abscissa de P (aproximada às centésimas) para a qual a área do retângulo é máxima. Apresente os elementos recolhidos na utilização da calculadora:

- o gráfico obtido;
- o ponto de ordenada máxima e respectivas coordenadas.

Resolução, pg. 22

Exame nacional de 2007 - 1.ª fase

15. Considere a função f definida no intervalo $[1, 2]$ por $f(x) = \cos(x - 1) + \ln x$ ($\ln$ designa logaritmo de base e).

Para um certo valor real positivo a e para um certo valor real b , a função g , definida no intervalo $[1, 2]$ por $g(x) = a \cdot f(x) + b$, tem por contradomínio o intervalo $[4, 5]$.

Utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora, determine os valores de a e de b arredondados às centésimas.

Explique como procedeu. Na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que tenha visualizado na calculadora, bem como coordenadas relevantes de algum, ou alguns, pontos. Sempre que, em valores intermédios, proceder a arredondamentos, conserve um mínimo de três casas decimais.

[Resolução, pg. 23](#)

Exame nacional de 2006 - 1.^a fase

Resoluções

Resolução da pergunta 1

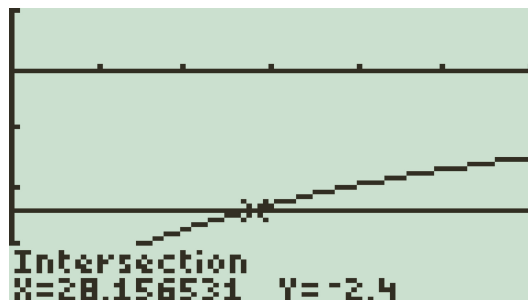
[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1](#)

Uma equação que permite resolver o problema é

$$\begin{aligned} tmv_{[0,t_2]}T &= -2,4 \Leftrightarrow \frac{T(t_2) - T(0)}{t_2 - 0} = -2,4 \\ \Leftrightarrow \frac{20 + 100e^{-0,04t_2} - 120}{t_2} &= -2,4 \Leftrightarrow \frac{100e^{-0,04t_2} - 100}{t_2} = -2,4. \end{aligned}$$

No gráfico seguinte, obtido através de uma calculadora gráfica, estão representados os gráficos de

$y = \frac{100e^{-0,04x} - 100}{x}$ e $y = -2,4$ no intervalo $[0, 60]$ e assinalado o seu ponto de interseção.



Podemos concluir que $t_2 \approx 28,157$.

Como $0,157 \times 60 \approx 9$, podemos concluir que o valor de t_2 corresponde a 28 minutos e 9 segundos.

Resolução da pergunta 2

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

A afirmação “aumentando a intensidade do som em $150 \mu W/m^2$, o seu nível passa a ser 1,4% do quadrado do nível inicial” traduz-se através da equação

$$N(I + 150) = 0.014 \times [N(I)]^2.$$

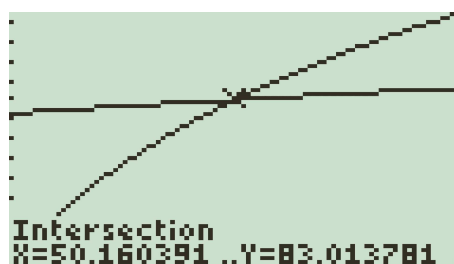
Introduzindo na calculadora gráfica as expressões

$$y = N(x + 150) = 60 + 10 \log_{10}(x + 150)$$

e

$$y = 0.014 \times [N(x)]^2 = 0.014 (60 + 10 \log_{10} x)^2$$

e recorrendo às suas potencialidades, obtemos os gráficos seguintes e o seu ponto de interseção no intervalo $[20, 80]$.



Podemos concluir que $x \approx 50$.

Assim, a intensidade inicial do som do despertador em causa é aproximadamente $50 \mu W/m^2$.

Resolução da pergunta 3

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Os dados do enunciado indicam que $R = \lambda$ e $L = \frac{I}{2}$.

Substituindo na equação dada e simplificando obtemos:

$$\begin{aligned} L &= I (1 - R)^6 e^{-3\lambda} \\ \Leftrightarrow \frac{I}{2} &= I (1 - \lambda)^6 e^{-3\lambda} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= (1 - \lambda)^6 e^{-3\lambda}. \end{aligned}$$

Introduzindo na calculadora gráfica as funções $y = \frac{1}{2}$ e $y = (1 - x)^6 e^{-3x}$ e recorrendo às suas potencialidades obtemos os gráficos seguintes e o seu ponto de interseção.



Logo, $R = \lambda \approx 0.075$.

Resolução da pergunta 4

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3](#)

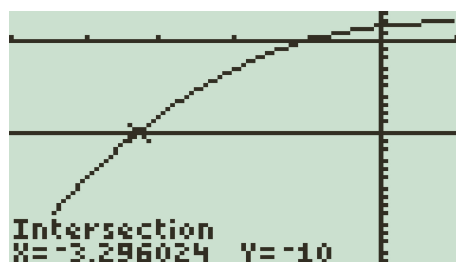
A abscissa de A é um zero de g . Como é negativa, vamos recorrer a $g(x)$ para $x < 1$:

$$\begin{aligned}g(x) = 0 \wedge x < 1 &\Leftrightarrow \frac{1 - x^2}{1 - e^{x-1}} = 0 \wedge x < 1 \\&\Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \wedge 1 - e^{x-1} \neq 0 \wedge x < 1 \\&\Leftrightarrow (x = 1 \vee x = -1) \wedge x - 1 \neq 0 \wedge x < 1 \\&\Leftrightarrow x = -1.\end{aligned}$$

Sendo y_P a ordenada de P , a área do triângulo $[OAP]$ ser 5 traduz-se na equação:

$$\frac{\overline{OA} \times |y_P|}{2} = 5 \Leftrightarrow \frac{1 \times |y_P|}{2} = 5 \Leftrightarrow |y_P| = 10.$$

Para determinar x_P , a abscissa de P , devemos resolver a equação $g(x) = -10$ para $x < 1$. Recorrendo à calculadora gráfica obtemos parte dos gráficos de $y = -10$ e $y = g(x)$ e uma aproximação do seu ponto de interseção $P(-3.3; -10)$.



Logo, a abscissa de P é aproximadamente -3.3 .

Resolução da pergunta 5

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 6

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 8

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 7

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 9

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 10

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 12

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 11

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 13

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 7](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 14

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 7](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 15

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 7](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 