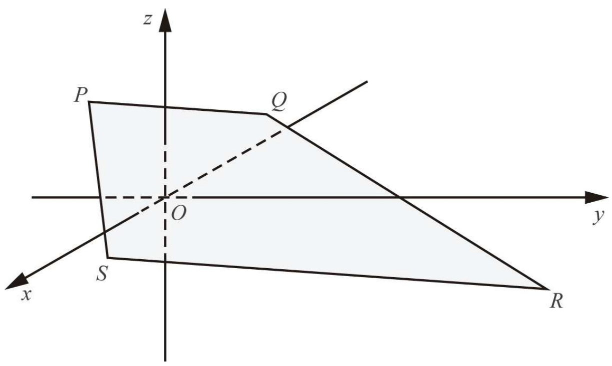
Geometria em $\mathbb{R}^3$ do 11.º – Exames

Perguntas de Exames Nacionais dos últimos 16 anos com resolução e/ou vídeo.
Versão de 9 de janeiro de 2022.
Verifique se existe versão com data mais recente aqui e aceda a mais fichas aqui.

1. Na figura, está representado, num referencial o.n. Oxyz, um trapézio $[PQRS]$, de bases $[PQ]$ e $[RS]$, em que o lado $[PS]$ é perpendicular às bases.
Tem-se $P(1,-1,2)$, $Q(-2,1,1)$ e $R(-5,5,-3)$.



1.1. Qual das condições seguintes define a superfície esférica de centro no ponto R e que passa no ponto Q?
(A) $(x-5)^2+(y+5)^2+(z-3)^2=59$
(B) $(x-5)^2+(y+5)^2+(z-3)^2=41$
(C) $(x+5)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=41$
(D) $(x+5)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=59$

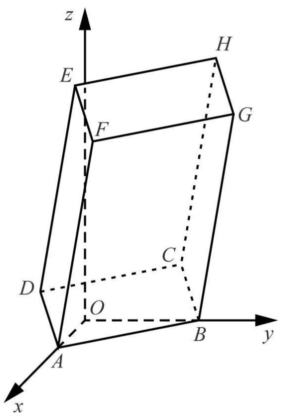
1.2. Determine uma equação do plano perpendicular à reta RS e que passa no ponto P.
Apresente essa equação na forma $ax+by+cz+d=0$.

Resolução, pg. 10

Exame nacional de 2021 - 2.ª fase

2. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$.
Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao eixo Ox e o vértice B pertence ao eixo Oy;
- as coordenadas dos vértices E e G são $(7, 2, 15)$ e $(6, 10, 13)$, respetivamente;
- a reta EF é definida pela equação $(x, y, z) = (1, -2, 19) + k(-3, -2, 2)$, $k \in \mathbb{R}$.



2.1. Qual das equações seguintes define uma reta perpendicular à reta EF e que passa no ponto E?

(A) $(x, y, z) = (7, -3, 3) + k(2, -3, 0)$, $k \in \mathbb{R}$
(B) $(x, y, z) = (7, 2, 15) + k(0, 3, -3)$, $k \in \mathbb{R}$
(C) $(x, y, z) = (7, -10, 3) + k(0, 3, 3)$, $k \in \mathbb{R}$
(D) $(x, y, z) = (7, 2, 15) + k(2, 0, -3)$, $k \in \mathbb{R}$

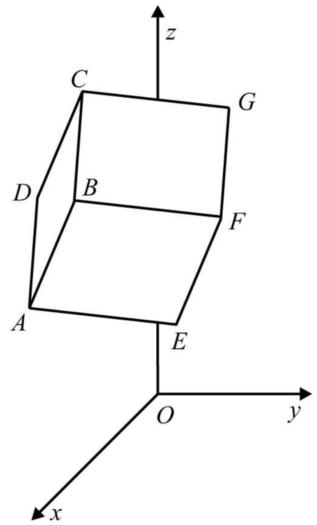
2.2. Determine, sem recorrer à calculadora, a equação reduzida da superfície esférica de centro no ponto B e que passa no ponto D.

Resolução, pg. 11

Exame nacional de 2021 - 1.ª fase

3. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$ (o ponto H não está representado na figura).
Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(7, 1, 4)$;
- o ponto G tem coordenadas $(5, 3, 6)$;
- a reta AE é definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (7, 1, 4) + k(3, -6, 2)$, $k \in \mathbb{R}$.



Resolva os itens **3.1.** e **3.2.** sem recorrer à calculadora.

3.1. Determine uma equação do plano EFG.
Apresente essa equação na forma

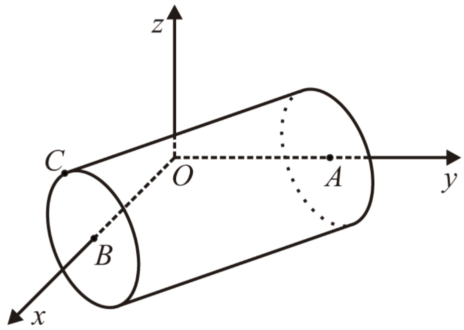
$$ax + by + cz + d = 0.$$

3.2. Determine a equação reduzida da superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo.

Resolução, pg. 12

Exame nacional de 2020 - 2.ª fase

4. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cilindro reto.



Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Oy e é o centro de uma das bases do cilindro, e o ponto B pertence ao eixo Ox e é o centro da outra base;
- o ponto C pertence à circunferência de centro B que delimita uma das bases do cilindro;
- o plano ABC é definido pela equação $3x + 4y + 4z - 12 = 0$.

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.** sem recorrer à calculadora.

4.1. Determine $\overline{BC}$, sabendo que o volume do cilindro é igual a 10π.

4.2. Seja P o ponto de coordenadas $(3, 5, 6)$.
Determine as coordenadas do ponto do plano ABC que se encontra mais próximo do ponto P.

Resolução, pg. 13

Exame nacional de 2020 - 1.ª fase

5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta r definida por

$$x = 1 + 2k \wedge y = 3 - 4k \wedge z = k, \;\; k \in \mathbb{R}.$$

Qual dos seguintes vetores pode ser um vetor diretor de uma reta perpendicular à reta r?

(A) $\overrightarrow{a}(2, 4, 1)$

(B) $\overrightarrow{b}(-3, 1, 0)$

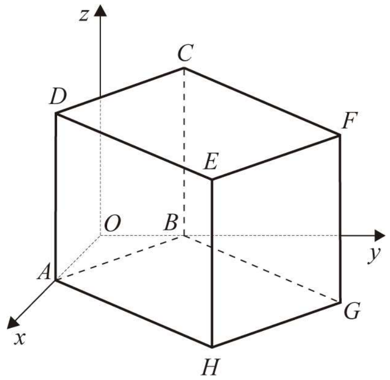
(C) $\overrightarrow{c}(1, 1, 2)$

(D) $\overrightarrow{d}(-4, 2, 0)$

Resolução, pg. 14

Exame nacional de 2019 - 2.ª fase

6. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$.
Sabe-se que:



- o vértice A pertence ao eixo Ox e o vértice B pertence ao eixo Oy;
- o vértice C tem coordenadas $(0, 3, 6)$ e o vértice G tem coordenadas $(6, 11, 0)$;
- o plano ABC é definido pela equação $3x + 4y - 12 = 0$.

6.1 Determine o volume do paralelepípedo $[ABCDEFGH]$.

6.2 Seja P o ponto de coordenadas $(1, -4, 3)$, e seja r a reta que passa pelo ponto P e é perpendicular ao plano ABC.
Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o plano ABC.

Resolução, pg. 15

Exame nacional de 2019 - 2.ª fase

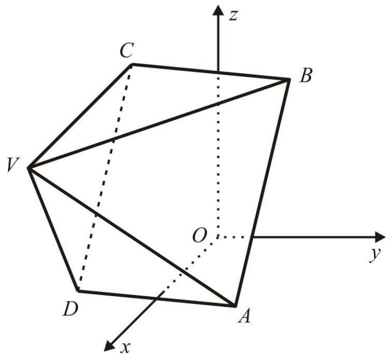
7. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os planos α, β e γ, definidos pelas equações $x + y + z = 1$, $2x + 2y + 2z = 1$ e $x + y = 0$, respetivamente.
A intersecção dos planos α, β e γ é

(A) o conjunto vazio **(B)** um ponto **(C)** uma reta **(D)** um plano

Resolução, pg. 16

Exame nacional de 2019 - 1.ª fase

8. Na figura, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$.
Os vértices A e C têm coordenadas $(2, 1, 0)$ e $(0, -1, 2)$,respetivamente.
O vértice V tem coordenadas $(3, -1, 2)$.



8.1 Determine a amplitude do ângulo VAC.
Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.
Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

8.2 Determine uma equação do plano que contém a base da pirâmide.
Apresente a equação na forma $ax+by+cz+d = 0$.

Resolução, pg. 18

Exame nacional de 2019 - 1.ª fase

9. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os planos α, β e γ definidos pelas equações $y = -x$, $y = z$ e $2x + 3y - z - 1 = 0$, respetivamente.
A intersecção dos planos α, β e γ é

(A) um ponto **(B)** uma reta **(C)** um plano **(D)** o conjunto vazio

Resolução, pg. 17 Exame nacional de 2018 - 2.ª fase

10. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta r definida pela condição

$$x + 1 = 2\lambda \wedge y = 2 - \lambda \wedge z = 3,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Qual das seguintes equações vetoriais define a reta r?

(A) $(x, y, z) = (3, 0, 3) + k(2, -1, 0),\ k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y, z) = (3, 0, 3) + k(2, -1, 3),\ k \in \mathbb{R}$

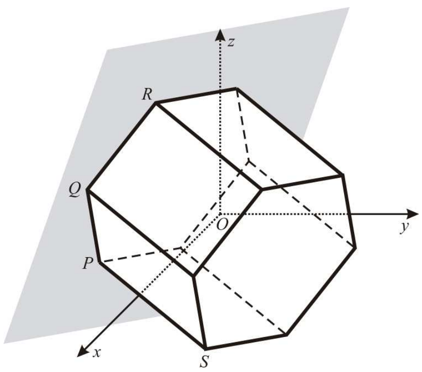
(C) $(x, y, z) = (-1, 2, 0) + k(2, -1, 3),\ k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z) = (-1, 2, 0) + k(2, -1, 0),\ k \in \mathbb{R}$

Resolução, pg. 19 Exame nacional de 2018 - 1.ª fase

11. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma hexagonal regular.
Sabe-se que:

- $[PQ]$ e $[QR]$ são arestas de uma das bases do prisma;
- $\overline{PQ} = 4$.



11.1 Determine o produto escalar $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}$.

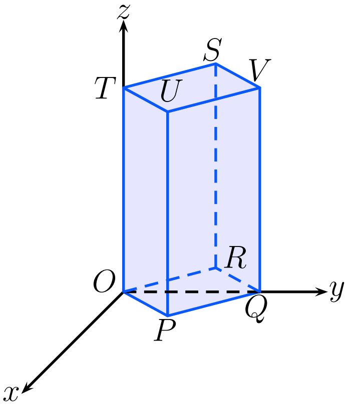
11.2 Sabe-se ainda que:

- o plano PQR tem equação $2x + 3y - z - 15 = 0$;
- uma das arestas laterais do prisma é o segmento de reta $[PS]$, em que S é o ponto de coordenadas $(14, 5, 0)$.

Determine a área lateral do prisma, apresentando o resultado arredondado às décimas.
Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Resolução, pg. 20 Exame nacional de 2018 - 1.ª fase

12. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[OPQRSTUV]$.



Sabe-se que:

- a face $OPQR$ está contida no plano xOy;
- o vértice Q pertence ao eixo Oy e o vértice T pertence ao eixo Oz;
- o plano STU tem equação $z = 3$.

Seja T' o simétrico do ponto T, relativamente à origem do referencial.

12.1 Escreva uma equação da superfície esférica de diâmetro TT'.

12.2 Determine o valor do produto escalar $\overrightarrow{UP} \cdot \overrightarrow{RS}$.

12.3 Uma equação do plano PQV é $x + y = 2$.
Determine uma condição que defina a reta TQ.

Resolução, pg. 23

Exame nacional de 2017 - 2.ª fase

13. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α definido pela equação

$$3x + 2y + 4z - 12 = 0.$$

13.1 Seja C o ponto de coordenadas $(2, 1, 4)$.
Escreva uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano α que passa no ponto C.

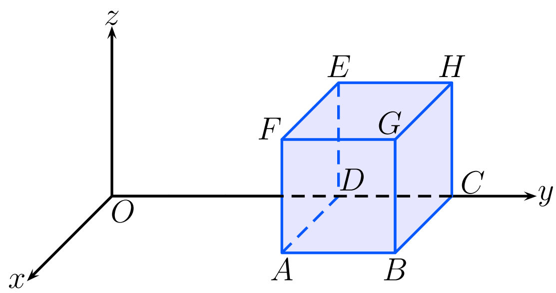
13.2 Seja D o ponto de coordenadas $(4, 2, 2)$.
Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta OD com o plano α.

13.3 Sejam A e B os pontos pertencentes ao plano α, tais que A pertence ao semieixo positivo Ox e B pertence ao semieixo positivo Oy.
Seja P um ponto com cota diferente de zero e que pertence ao eixo Oz.
Justifique, recorrendo ao produto escalar de vetores, que o ângulo APB é agudo.

Resolução, pg. 24

Exame nacional de 2017 - 1.ª fase

14. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$. Sabe-se que:



- a face $[ABCD]$ está contida no plano xOy
- a aresta $[CD]$ está contida no eixo Oy
- o ponto D tem coordenadas $(0, 4, 0)$
- o plano ACG é definido pela equação $x + y - z - 6 = 0$

14.1 Verifique que o vértice A tem abcissa igual a 2.

14.2 Seja r a reta definida pela condição $(x, y, z) = (1, 1, 0) + k(1, -1, 1),\ k \in \mathbb{R}$. Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o plano ACG.

14.3 Seja P o vértice de uma pirâmide regular de base $[EFGH]$. Sabe-se que:

- a cota do ponto P é superior a 2
- o volume da pirâmide é 4

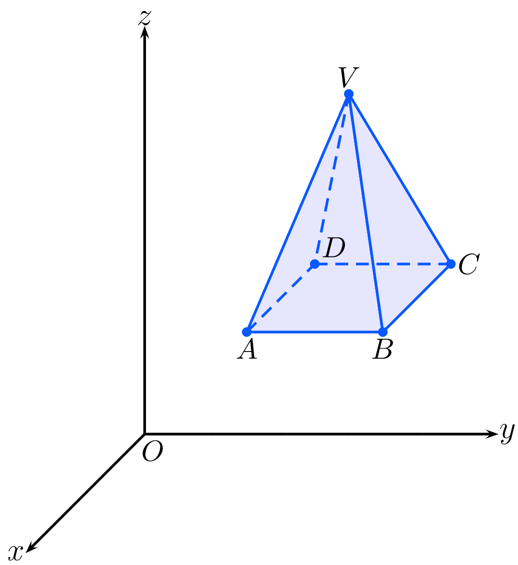
Determine a amplitude do ângulo OGP.
Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.
Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Resolução, pg. 25

Exame nacional de 2016 - 2.ª fase

15. Na figura, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$.

Sabe-se que:



- a base $[ABCD]$ da pirâmide é paralela ao plano xOy
- o ponto A tem coordenadas $(-1, 1, 1)$
- o ponto C tem coordenadas $(-3, 3, 1)$
- o plano BCV é definido pela equação $3y + z - 10 = 0$

15.1 Escreva uma condição que defina a superfície esférica de centro no ponto A e que é tangente ao plano xOy.

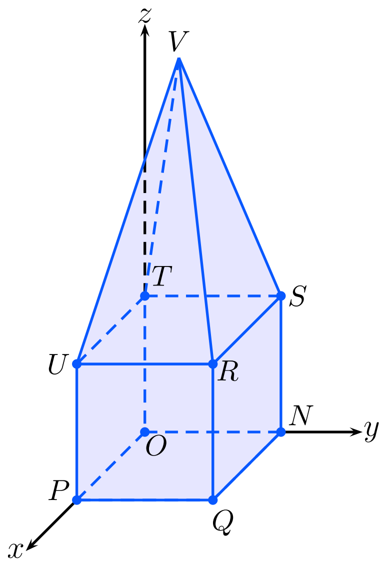
15.2 Determine as coordenadas do ponto V.

15.3 Seja α o plano perpendicular à reta AC e que passa no ponto $P(1,-2,-1)$.
A intersecção dos planos α e BCV é uma reta.
Escreva uma equação vetorial dessa reta.

Resolução, pg. 26 Exame nacional de 2016 - 1.ª fase

16. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro $[NOPQRSTUV]$ que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.
Sabe-se que:

- o vértice P pertence ao eixo Ox;
- o vértice N pertence ao eixo Oy;
- o vértice T pertence ao eixo Oz;
- o vértice R tem coordenadas $(2,2,2)$;
- o plano PQV é definido pela equação $6x+z-12=0$.



16.1 Determine as coordenadas do ponto V.

16.2 Escreva uma equação cartesiana do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta OR.

16.3 Seja A um ponto pertencente ao plano QRS.
Sabe-se que:

- o ponto A tem cota igual ao cubo da abcissa;
- os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{TQ}$ são perpendiculares.

Determine a abcissa do ponto A, recorrendo à calculadora gráfica.
Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver a equação, devidamente identificado(s) (sugere-se a utilização da janela de visualização em que $x \in [-4,4]$ e $y \in [-2,7]$);
- apresente a abcissa do ponto A arredondada às centésimas.

Resolução, pg. 27 Exame nacional de 2016 - 1.ª fase

17. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(0,0,2)$ e $B(4,0,0)$.

17.1. Considere o plano α de equação $x-2y+z+3=0$.
Escreva uma equação do plano que passa no ponto A e é paralelo ao plano α.

17.2. Determine uma equação cartesiana que defina a superfície esférica da qual o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro.

17.3. Seja P o ponto pertencente ao plano xOy tal que:

- a sua abcissa é igual à abcissa do ponto B;

- a sua ordenada é positiva;
- $B\widehat{A}P = \frac{\pi}{3}$.

Determine a ordenada do ponto P.

Resolução, pg. 28

Exame nacional de 2015 - 1.ª fase

Resoluções

Resolução da pergunta 1

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1

1.1. Como

$$\overline{RQ} = \sqrt{(-5+2)^2 + (5-1)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{41}$$

então a condição que define a superfície esférica de centro nem R e que passa no ponto Q é

$$(x+5)^2 + (y-5)^2 + (z+3)^2 = \left(\sqrt{41}\right)^2 \Leftrightarrow (x+5)^2 + (y-5)^2 + (z+3)^2 = 41$$

A opção correta é a **(C)**.

1.2. Uma vez que o quadrilátero é um trapézio então os lados $[PQ]$ e $[RS]$ são paralelos. Consequentemente, $\overrightarrow{RS}$ e $\overrightarrow{QP}$ são colineares e o plano pretendido é perpendicular a $\overrightarrow{QP}$.
$\overrightarrow{QP} = P - Q = (3, -2, 1)$.
Assim, o plano pretendido é definido pela condição $3x-2y+z+d = 0$, $d \in \mathbb{R}$. Substituindo $P(1, -1, 2)$ nesta equação temos

$$3 + 2 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -7.$$

Podemos concluir que a equação do plano pretendido é $3x - 2y + z - 7 = 0$.

Resolução da pergunta 2

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

2.1. Para uma reta ser perpendicular à reta EF, os seus vetores diretores devem ser perpendiculares ao vetor $(-3, -2, 2)$. Como $(2, -3, 0) \cdot (-3, -2, 2) = -6 + 6 + 0 = 0$ e $(0, 3, 3) \cdot (-3, -2, 2) = 0 - 6 + 6 = 0$, as alternativas (A) e (C) são possíveis.
Para verificar a qual delas o ponto E pertence, devemos substituir as suas coordenadas nas equações vetoriais apresentadas. Relativamente a (C) temos

$$(7, 2, 15) = (7, -10, 3) + k(0, 3, 3) \Leftrightarrow (0, 12, 12) = (0, 3k, 3k) \Leftrightarrow k = 4.$$

Deste modo, **(C)** é a resposta correta.

2.2. Comecemos por notar que B é o ponto de interseção do plano FGB com o eixo Oy. Como $(-3, -2, 2)$ é um vetor diretor da reta EF então $\vec{n} = (-3, -2, 2)$ é um vetor normal ao plano FGB. Consequentemente, este é definido por uma equação da forma $-3x - 2y + 2z + d = 0$, para $d \in \mathbb{R}$. Substituindo $G(6, 10, 13)$ nesta equação temos

$$-3 \times 6 - 2 \times 10 + 2 \times 13 + d = 0 \Leftrightarrow d = 12$$

e podemos concluir que $-3x - 2y + 2z + 12 = 0$ é uma equação geral do plano FGB. Substituindo $B(0, b, 0)$ nesta equação temos

$$0 - 2b + 12 = 0 \Leftrightarrow b = 6$$

e podemos concluir que $B(0, 6, 0)$.
O raio da superfície esférica é dado por

$$r = \overline{EG} = \sqrt{(7-6)^2 + (2-10)^2 + (15-13)^2} = \sqrt{69}.$$

A equação reduzida da superfície esférica com centro no ponto B e que passa no ponto D é portanto

$$x^2 + (y-6)^2 + z^2 = 69.$$

Resolução da pergunta 3

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

3.1. Vídeo da resolução:

Podemos observar na figura que a reta AE é perpendicular ao plano. Deste modo e como o vetor de coordenadas $(3, -6, 2)$ é um vetor diretor da reta, podemos concluir que um vetor normal ao plano é $\vec{n} = (3, -6, 2)$.
Consequentemente o plano é definido pela equação

$$3x - 6y + 2z + d = 0,$$

onde $d \in \mathbb{R}$. Substituindo nesta equação $G(5, 3, 6)$ temos

$$3 \times 5 - 6 \times 3 + 2 \times 6 + d = 0 \Leftrightarrow d = -9$$

e podemos concluir que uma equação do plano EFG é

$$3x - 6y + 2z - 9 = 0.$$

3.2. Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

O centro da superfície esférica é o ponto médio de $[AG]$:

$$M_{[AG]} = \left(\frac{7+5}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{4+6}{2}\right) = (6, 2, 5).$$

Como

$$\overline{AG} = \sqrt{(7-5)^2 + (1-3)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

então o raio da superfície esférica é $r = \sqrt{3}$.
A equação reduzida da superfície esférica é

$$(x-6)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 3.$$

Resolução da pergunta 4

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

4.1. Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Sabemos que $A(0,b,0)$ e $B(a,0,0)$, onde $a,b \in \mathbb{R}$. Substituindo na equação do plano ABC temos

$$3\times 0+4b+4\times 0-12=0 \Leftrightarrow b=3$$

e

$$3a+4\times 0+4\times 0-12=0 \Leftrightarrow a=4.$$

Temos portanto $A(0,3,0)$ e $B(4,0,0)$.
A altura do cilindro é

$$\overline{AB}=\sqrt{(0-4)^2+(3-0)^2+(0-0)^2}=5.$$

Como o seu volume é igual a 10π temos

$$A_b\times 5=10\pi \Leftrightarrow A_b=2\pi \Leftrightarrow \pi\times\overline{BC}^2=2\pi \Leftrightarrow \overline{BC}=\pm\sqrt{2}.$$

Podemos concluir que $\overline{BC}=\sqrt{2}$.

4.2. Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

O ponto do plano ABC que se encontra mais próximo do ponto P é a projeção ortogonal de P no plano ABC.
Um vetor normal ao plano ABC é $\vec{n}=(3,4,4)$. Por outro lado, uma equação vetorial da reta que contém P e é perpendicular ao plano ABC é dada por:

$$(x,y,z)=(3,5,6)+k(3,4,4),\ k\in\mathbb{R}.$$

O ponto de interseção desta reta com o plano ABC é o ponto que pretendemos.

$$\begin{aligned}
&\begin{cases}(x,y,z)=(3,5,6)+k(3,4,4)\\ 3x+4y+4z-12=0\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases}x=3+3k\\ y=5+4k\\ z=6+4k\\ 3x+4y+4z-12=0\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases}--\\ --\\ --\\ 9+9k+20+16k+24+16k-12=0\end{cases} \vee \begin{cases}x=0\\ y=1\\ z=2\\ k=-1\end{cases}
\end{aligned}$$

Podemos concluir que as coordenadas do ponto do plano ABC que se encontra mais próximo do ponto P são $(0,1,2)$.

Resolução da pergunta 5

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Como $x = 1 + 2k \wedge y = 3 - 4k \wedge z = k,\ k \in \mathbb{R}$ podemos concluir que $\overrightarrow{r} = (2, -4, 1)$ é um vetor diretor da reta r.
Como

$$\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{c} = (2, -4, 1) \cdot (1, 1, 2) = 2 - 4 + 2 = 0$$

então $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{r}$.
A opção correta é a **(C)**.

Resolução da pergunta 6

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

6.1. Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

O volume do paralelepípedo $[ABCDEFGH]$ é dada pelo produto da área da base vezes a altura, ou seja

$$\overline{AB} \times \overline{BG} \times \overline{BC}.$$

Para obter a área da base, vamos começar por determinar as coordenadas do ponto A.
Uma vez que A pertence ao eixo Ox, as suas coordenadas são da forma $A(a, 0, 0)$ para alguma constante $a \in \mathbb{R}$.
Substituindo na equação do plano ABC temos:

$$3 \times a + 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow a = 4.$$

Assim, $A(4, 0, 0)$.
Como $B(0, 3, 0)$ e $C(0, 3, 6)$ então
$\overline{AB} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2 + (0-0)^2} = 5;$
$\overline{BG} = \sqrt{(0-6)^2 + (3-11)^2 + (0-0)^2} = 10$
e o volume do paralelepípedo é $5 \times 10 \times 6 = 300$ unidades de volume.

6.2. Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Sabemos que um plano definido por uma equação da forma $ax + by + cz + d = 0$ admite o vetor de coordenadas $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ como vetor normal.
Por conseguinte, $\overrightarrow{n}(3, 4, 0)$ são as coordenadas de um vetor normal ao plano ABC e

$$(x, y, z) = (1, -4, 3) + k(3, 4, 0), \ k \in \mathbb{R}$$

é uma equação vetorial da reta r.
A solução do sistema seguinte dá-nos as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano ABC.

$$\begin{cases} 3x + 4y - 12 = 0 \\ (x, y, z) = (1, -4, 3) + k(3, 4, 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(1 + 3k) + 4(4k - 4) - 12 = 0 \\ (x, y, z) = (1 + 3k, -4 + 4k, 3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 25k = 25 \\ --- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ (x, y, z) = (4, 0, 3). \end{cases}$$

Logo, as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano ABC são $(4, 0, 3)$.

Voltar ao enunciado da pergunta

Resolução da pergunta 7

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Note-se que $\vec{n}_\alpha(1,1,1)$ e $\vec{n}_\beta(2,2,2)$ são vetores normais aos planos α e β, respetivamente. Como $\vec{n}_\beta = 2\vec{n}_\alpha$, os planos α e β são paralelos. Por outro lado,

$$x+y+z=1 \Leftrightarrow 2x+2y+2z=2 \not\Leftrightarrow 2x+2y+2z=1$$

permite-nos concluir que os planos α e β são estritamente paralelos. Consequentemente, a interseção dos três planos é o conjunto vazio.
Um outro modo de concluir o pretendido é através da resolução do sistema seguinte:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=1 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y+2z=2 \\ 2x+2y+2z=1 \\ --- \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1=2 \\ --- \\ --- \end{cases}$$

Como o sistema é impossível, a interseção dos três planos é o conjunto vazio.
Podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

Resolução da pergunta 9

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

A resolução do sistema seguinte conduz-nos a conclusões relativamente à interseção dos três planos.

$$\begin{cases} y=-x \\ y=z \\ 2x+3y-z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=-x \\ 2x-3x+x-1=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=-x \\ -1=0 \end{cases}$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(D)**.

Resolução da pergunta 8

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

8.1

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Para determinar a amplitude do ângulo VAC vamos determinar os vetores $\overrightarrow{AV}$ e $\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{AV} = V - A = (3, -1, 2) - (2, 1, 0) = (1, -2, 2)$.
$\overrightarrow{AC} = C - A = (0, -1, 2) - (2, 1, 0) = (-2, -2, 2)$.

$$\begin{aligned}
&\cos\left(\overrightarrow{AV}\widehat{\ }\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AV}|| \times ||\overrightarrow{AC}||} \\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(\overrightarrow{AV}\widehat{\ }\overrightarrow{AC}\right) = \frac{(1, -2, 2) \cdot (-2, -2, 2)}{||(1, -2, 2)|| \times ||(-2, -2, 2)||} \\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(\overrightarrow{AV}\widehat{\ }\overrightarrow{AC}\right) = \frac{-2 + 4 + 4}{\sqrt{1 + 4 + 4} \times \sqrt{4 + 4 + 4}} \\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(\overrightarrow{AV}\widehat{\ }\overrightarrow{AC}\right) = \frac{6}{3\sqrt{12}} \\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{AV}\widehat{\ }\overrightarrow{AC} \approx 55°.
\end{aligned}$$

8.2

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Para determinar uma equação do plano que contém a base da pirâmide, vamos começar por determinar um vetor normal ao plano.
Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AC]$. Então

$$M = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{1-1}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (1, 0, 1).$$

Como $\overrightarrow{MV}$ é um vetor normal ao plano ABC e

$$\overrightarrow{MV} = V - M = (3, -1, 2) - (1, 0, 1) = (2, -1, 1),$$

a sua equação cartesiana é da forma

$$2x - y + z + d = 0,$$

onde $d \in \mathbb{R}$.
Substituindo $A(2, 1, 0)$ na equação temos

$$2 \times 2 - 1 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$$

e podemos concluir que $2x - y + z - 3 = 0$ é uma equação do plano pretendido.

Resolução da pergunta 10

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Como

$$x+1=2\lambda \wedge y=2-\lambda \wedge z=3 \Leftrightarrow x=-1+2\lambda \wedge y=2-\lambda \wedge z=3 \wedge z=3$$

então podemos concluir que $A(-1,2,3)$ é um ponto de r e que $\vec{r}=(2,-1,0)$ é um dos seus vetores diretores.
Nesta fase, como as opções **(A)** e **(D)** apresentam $\vec{r}$ como vetor diretor então estamos inclinados para estas opções.
Relativamente à opção **(A)**, averiguemos se $(3,0,3)$ é ponto de r.
Substituindo as suas coordenadas na equação da reta r dada temos

$$\frac{3+1}{2}=\frac{0-2}{-1} \wedge 3=3 \Leftrightarrow 2=2 \wedge 3=3.$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

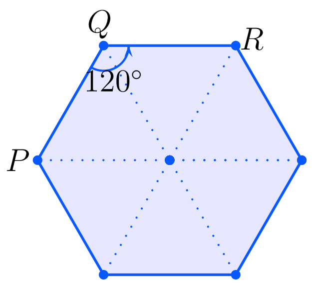
Resolução da pergunta 11

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

11.1

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Podemos observar na figura seguinte que
$P\hat{Q}R = 120°$.



Pela definição de produto escalar temos

$$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = ||\overrightarrow{QP}|| \times ||\overrightarrow{QR}|| \times \cos(120°)$$
$$= 4 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -8.$$

11.2

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Vamos começar por determinar as coordenadas do ponto P, ponto de interseção da reta PS com o plano PQR.
Para isso, comecemos por notar que, como $\vec{n} = (2, 3, -1)$ é um vetor normal ao plano PQR, então $(x, y, z) = (14, 5, 0) + k(2, 3, -1),\ k \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial da reta PS.
Temos portanto:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z - 15 = 0 \\ \\ (x, y, z) = (14, 5, 0) + k(2, 3, -1) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(14 + 2k) + 3(5 + 3k) - (-k) - 15 = 0 \\ \\ (x, y, z) = (14 + 2k, 5 + 3k, -k) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ \\ (x, y, z) = (14 + 2k, 5 + 3k, -k) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ \\ (x, y, z) = (10, -1, 2) \, . \end{cases}$$

Podemos concluir que $P\,(10, -1, 2)$.

$$\begin{aligned} \overline{PS} &= \sqrt{(10-14)^2 + (-1-5)^2 + (2-0)^2} \\ &= \sqrt{56}. \end{aligned}$$

Deste modo, a área lateral (6 faces laterais) arredondada às décimas é

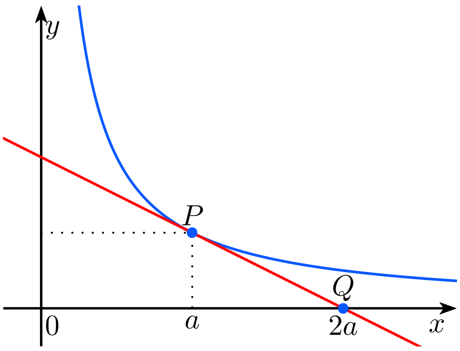
$$6 \times \overline{PQ} \times \overline{PS} = 6 \times 4 \times \sqrt{56} \approx 179.6.$$

Voltar ao enunciado da pergunta

Resolução da pergunta ??

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. **??**

Comecemos por notar que como $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$ então f é decrescente em $\mathbb{R}^+$. A título meramente ilustrativo, consideremos o gráfico da seguinte figura.



A hipótese de $\overline{OP} = \overline{PQ}$ traduz-se no facto de o triângulo $[OPQ]$ ser isósceles. Consequentemente, a abcissa de Q é o dobro da de P. O declive da reta PQ é portanto $m = \dfrac{0 - f(a)}{2a - a} = -\dfrac{f(a)}{a}$. Logo, $f'(a) = -\dfrac{f(a)}{a}$ e

$$f'(a) + \frac{f(a)}{a} = -\frac{f(a)}{a} + \frac{f(a)}{a} = 0.$$

Resolução da pergunta 12

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6

12.1 Como $T \in Oz$ então $T(0,0,3)$. A superfície esférica pretendida tem centro no ponto $(0,0,0)$. Assim, a sua equação é $x^2+y^2+z^2=3^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=9$.
12.2 Temos $\overrightarrow{UP} = \overrightarrow{TO} = O - T = (0,0,-3)$ e $\overrightarrow{RS} = -\overrightarrow{TO} = (0,0,3)$. Assim, $\overrightarrow{UP} \cdot \overrightarrow{RS} = (-0,0,-3)\cdot(0,0,3) = 0+0-9 = -9$.
12.3 Comecemos por notar que Q é o ponto de interseção de PQV com Oy.

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x=0 \wedge z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=0 \wedge z=0 \end{cases}$$

Logo, $Q(0,2,0)$.
Por outro lado, $\overrightarrow{TQ} = Q - T = (0,2,0)-(0,0,3) = (0,2,-3)$. Assim, a reta TQ pode ser definida, por exemplo, pela equação vetorial

$$(x,y,z) = (0,2,0) + k(0,2,-3),\ k \in \mathbb{R}.$$

Resolução da pergunta 13

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6

13.1 Um vetor normal do plano α é $\vec{n} = (3, 2, 4)$.
Consequentemente, $\vec{n}$ é um vetor diretor de qualquer reta perpendicular ao plano α.
Uma equação vetorial da reta pretendida é portanto

$$(x, y, z) = (2, 1, 4) + k(3, 2, 4), k \in \mathbb{R}.$$

13.2 Como $\overrightarrow{OD} = D - O = (4, 2, 2)$, uma equação vetorial da reta OD é

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(4, 2, 2), k \in \mathbb{R}.$$

Vamos agora resolver o sistema seguinte para obter o ponto de interseção da reta OD com o plano α:

$$\begin{cases} (x, y, z) = (0, 0, 0) + k(4, 2, 2) \\ 3x + 2y + 4z - 12 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x, y, z) = (4k, 2k, 2k) \\ 3 \times 4k + 2 \times 2k + 4 \times 2k - 12 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x, y, z) = (4k, 2k, 2k) \\ 24k = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y, z) = (2, 1, 1) \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Podemos concluir que o ponto de interseção da reta OD com o plano α é $(2, 1, 1)$.
13.3 Como $A(a, 0, 0)$ e $B(0, b, 0)$ para $a > 0$ e $b > 0$ então temos:

- $3a + 2 \times 0 + 4 \times 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow a = 4$;
- $3 \times 0 + 2b + 4 \times 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow b = 6$.

Logo $A(4, 0, 0)$ e $B(0, 6, 0)$.
Seja $P(0, 0, c)$ com $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Como $\overrightarrow{PA} = A - P = (4, 0, 0) - (0, 0, c) = (4, 0, -c)$
e $\overrightarrow{PB} = B - P = (0, 6, 0) - (0, 0, c) = (0, 6, -c)$ então

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 4 \times 0 + 0 \times 6 - c \times (-c) = c^2.$$

Como $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ então $c^2 > 0$.
Como o produto escalar é positivo então o ângulo $A\widehat{P}B$ é agudo.

Resolução da pergunta 14

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 7

14.1 O ponto C é o ponto de interseção de Oy com o plano ACG. Deste modo,
$\begin{cases} x = 0 \wedge z = 0 \\ x + y - z - 6 = 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} - - -- \\ y = 6 \end{cases}$
Logo $C(0, 6, 0)$ e podemos concluir que o lado do cubo mede $\overline{DC} = 2$ unidades de comprimento. Deste modo, $A(2, 4, 0)$ e conclui-se que a abcissa de A é 2.
14.2 O ponto pretendido é a solução do sistema seguinte.

$$\begin{cases} (x, y, z) = (1, 1, 0) + k(1, -1, 1) \\ x + y - z - 6 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 1 - k \\ z = k \\ - - - - - - \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} - - - - - - \\ - - - - - - \\ - - - - - - \\ 1 + k + 1 - k - k - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \\ z = -4 \\ k = -4 \end{cases}$$

Podemos concluir que o ponto de interseção é $(-3, 5, -4)$.
14.3 A figura seguinte ilustra a situação.Como a área da base da pirâmide é $2 \times 2 = 4$, o seu volume ser 4 implica que, sendo h a sua altura $\frac{4\times h}{3} = 4 \Leftrightarrow h = 3$. Logo $P(1, 5, 5)$.
Assim,$\cos\left(O\widehat{G}P\right) = \frac{\overrightarrow{GO}\cdot\overrightarrow{GP}}{\|\overrightarrow{GO}\|\times\|\overrightarrow{GP}\|}$.
$\overrightarrow{GO} = O - G = (0, 0, 0) - (2, 6, 2) = (-2, -6, -2)$.
$\overrightarrow{GP} = P - G = (1, 5, 5) - (2, 6, 2) = (-1, -1, 3)$.
Logo,

$$\cos\left(O\widehat{G}P\right) = \frac{(-2, -6, -2) \cdot (-1, -1, 3)}{\sqrt{4 + 36 + 4} \times \sqrt{1 + 1 + 9}}$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(O\widehat{G}P\right) = \frac{2 + 6 - 6}{\sqrt{44} \times \sqrt{11}}$$
$$\Leftrightarrow O\widehat{G}P \approx 85^\circ.$$

Resolução da pergunta 15

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 7

15.1 Uma vez que o centro da superfície esférica é o ponto A, que tem cota 1, então o seu raio é 1.
Consequentemente, a sua equação é

$$(x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1.$$

15.2 Como a pirâmide é quadrangular regular então V tem a mesma abcissa e ordenada que o ponto médio do segmento de reta $[AC]$:

$$\begin{aligned} M_{[AC]} &= \left(\frac{x_A+x_C}{2}, \frac{y_A+y_C}{2}, \frac{z_A+z_C}{2}\right) \\ &= \left(\frac{-1-3}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = (-2,2,1)\,. \end{aligned}$$

Logo, o ponto $V(-2,2,c)$ onde $c \in \mathbb{R}$.
Substituindo este ponto na equação do plano BCV vem

$$3\times 2+c-10=0 \Leftrightarrow c=4.$$

Podemos assim concluir que $V(-2,2,4)$.
15.3 Como o plano α é perpendicular à reta AC e

$$\overrightarrow{AC}=C-A=(-3,3,1)-(-1,1,1)=(-2,2,0)$$

então é da forma $-2x+2y+0z+d=0$ onde d é uma constante real.
Substituindo as coordenadas de $P(1,-2,-1)$ nesta equação vem

$$-2\times 1+2\times(-2)+d=0 \Leftrightarrow d=6$$

e podemos concluir que uma equação do plano α é $-2x+2y+6=0$.
Para encontrar uma equação da reta que resulta da interseção dos planos α e BCV vamos resolver o sistema

$$\begin{cases} -2x+2y+6=0 \\ 3y+z-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=2x-6 \\ 3y=-z+10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x-3 \\ y=\frac{-z+10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x-3=y=\frac{z-10}{-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-10}{-3}.$$

Obtivemos uma equação cartesiana da reta pretendida e podemos concluir que a reta contém o ponto $(3,0,10)$ e tem a direção do vetor $(1,1,-3)$.
Uma equação vetorial desta reta é

$$(x,y,z)=(3,0,10)+k(1,1,-3),\ k\in\mathbb{R}.$$

Voltar ao enunciado da pergunta

Resolução da pergunta 16

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 8

16.1 O ponto V tem como coordenadas $(1, 1, c)$ onde $c \in \mathbb{R}$ uma vez que, como a pirâmide é regular, a projeção de V no plano xOy é $(1, 1, 0)$. Por outro lado, como V pertence ao plano PQV terá que verificar a sua equação geral:

$$6 \times 1 + c - 12 = 0 \Leftrightarrow c = 6.$$

Podemos portanto concluir que $V(1, 1, 6)$.
16.2 Como o plano é perpendicular à reta OR então admite como vetor normal

$$\vec{n} = \overrightarrow{OR} = R - O = (2, 2, 2) - (0, 0, 0) = (2, 2, 2).$$

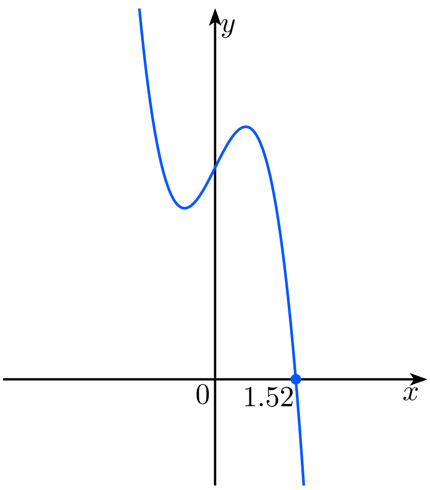
Assim, a sua equação geral é da forma $2x + 2y + 2z + d = 0$ onde $d \in \mathbb{R}$. Substituindo as coordenadas de $P(2, 0, 0)$ nesta equação vem

$$2 \times 2 + 2 \times 0 + 2 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -4$$

e podemos concluir que a equação geral do plano pedido é $2x + 2y + 2z - 4 = 0$.
16.3 Como o plano QRS é perpendicular a Oy tem de equação $y = 2$. Consequentemente $A(a, 2, c)$ para $a, c \in \mathbb{R}$. A hipótese de a cota de A ser igual ao cubo da abcissa traduz-se na igualdade $c = a^3$. Nesta fase já sabemos que $A(a, 2, a^3)$ para $a \in \mathbb{R}$.
Como $\overrightarrow{OA} = A - O = (a, 2, a^3)$ e $\overrightarrow{TQ} = Q - T = (2, 2, 0) - (0, 0, 2) = (2, 2, -2)$ então os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{TQ}$ são perpendiculares se e só se

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{TQ} = 0 \Leftrightarrow (a, 2, a^3) \cdot (2, 2, -2) = 0 \Leftrightarrow 2a + 4 - 2a^3 = 0.$$

A figura seguinte apresenta parte do gráfico de $y = 2a + 4 - 2a^3$ obtido numa calculadora gráfica conjuntamente com o seu zero no intervalo $[-4, 4]$.



Podemos concluir que a abcissa de A arredondada às centésimas é 1.52.

Voltar ao enunciado da pergunta

Resolução da pergunta 17

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 8

17.1. Um vetor normal ao plano α é $\vec{n} = (1, -2, 1)$.
Como planos paralelos têm vetores normais perpendiculares, o plano pretendido também tem $\vec{n}$ como vetor normal. Consequentemente é da forma

$$x - 2y + z + d = 0$$

onde d é uma constante real.
Substituindo nesta equação as coordenadas do ponto $A(0, 0, 2)$ vem

$$0 - 2 \times 0 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$$

e podemos concluir que uma equação do plano paralelo ao plano α que contém o ponto A é $x - 2y + z - 2 = 0$.

17.2. O centro da circunferência pretendida é o ponto médio de $[AB]$:

$$\begin{aligned} M_{[AB]} &= \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right) \\ &= \left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{2+0}{2} \right) = (2, 0, 1)\,. \end{aligned}$$

O seu raio é metade da distância entre A e B:

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2}\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(0-4)^2 + (0-0)^2 + (2-0)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{20}. \end{aligned}$$

A equação da superfície esférica pretendida é

$$\begin{aligned} &(x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{20} \right)^2 \\ \Leftrightarrow &(x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5. \end{aligned}$$

17.3. Nas condições apresentadas podemos considera que $P(4, b, 0)$ onde $b > 0$.
Por outro lado, como $\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 0, -2)$ e $\overrightarrow{AP} = P - A = (4, b, -2)$

$$\begin{aligned} &\cos\left(B\widehat{A}P\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{16 + 0 + 4}{\sqrt{20} \times \sqrt{20 + b^2}} \\ \Leftrightarrow &\frac{1}{2}\left(\sqrt{20} \times \sqrt{20 + b^2}\right) = 20 \Leftrightarrow 20\left(20 + b^2\right) = 40^2 \\ \Leftrightarrow &b^2 = 60 \Leftrightarrow b = \pm 2\sqrt{15}. \end{aligned}$$

Como a ordenada de P é positiva então $b = 2\sqrt{15}$.