

Perguntas de Exames Nacionais dos últimos 16 anos com resolução e/ou vídeo.

Versão de 15 de janeiro de 2022.

Verifique se existe versão com data mais recente [aqui](#) e aceda a mais fichas [aqui](#).

1. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja g a função, de domínio, $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, definida por $g(x) = x \cos x + \sin x$.

Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico da função g tal que a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto tem declive $-\frac{1}{2}$.

[Resolução, pg. 6](#)

Exame nacional de 2021 - 1.ª fase

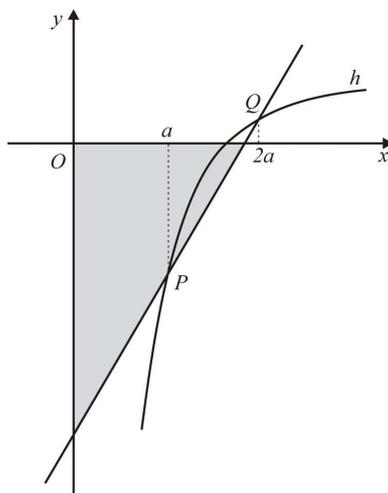
2. Sejam f e g as funções, de domínio \mathbb{R} , definidas, respetivamente, por $f(x) = x^2$ e $g(x) = \cos x$.

Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que a equação $f(x) = g(x)$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]0, \frac{\pi}{3}[$.

[Resolução, pg. 7](#)

Exame nacional de 2020 - 2.ª fase

3. Na figura, está representada, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função h , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $h(x) = \frac{\ln x}{x}$.



Para cada número real a pertencente ao intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ sejam P e Q os pontos do gráfico da função h de abscissas a e $2a$, respetivamente.

Tal como a figura sugere, a reta PQ define, com os eixos coordenados, um triângulo retângulo.

Mostre que existe, pelo menos, um número real a pertencente ao intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ para o qual esse triângulo é isósceles.

Sugestão: comece por identificar o valor do declive da reta PQ para o qual o triângulo é isósceles.

[Resolução, pg. 8](#)

Exame nacional de 2018 - 1.^a fase

4. Seja g uma função contínua, de domínio \mathbb{R} , tal que:

- para todo o número real x , $(g \circ g)(x) = x$;
- para um certo número real a , tem-se $g(a) > a + 1$.

Mostre que a equação $g(x) = x + 1$ é possível no intervalo $]a, g(a)[$.

[Resolução, pg. 9](#)

Exame nacional de 2017 - 1.^a fase

5. Um cubo encontra-se em movimento oscilatório provocado pela força elástica exercida por uma mola.

A Figura 2 esquematiza esta situação. Nesta figura, os pontos O e A são pontos fixos. O ponto P representa o centro do cubo e desloca-se sobre a semirreta $\hat{O}A$.

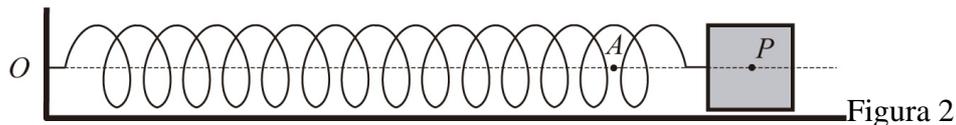


Figura 2

Admita que não existe qualquer resistência ao movimento.

Sabe-se que a distância, em metros, do ponto P ao ponto O é dada por

$$d(t) = 1 + \frac{1}{2} \sin \left(\pi t + \frac{\pi}{6} \right).$$

A variável t designa o tempo, medido em segundos, que decorre desde o instante em que foi iniciada a contagem do tempo ($t \in [0, +\infty[$).

Justifique, recorrendo ao teorema de Bolzano, que houve, pelo menos, um instante, entre ostrês segundos e os quatro segundos após o início da contagem do tempo, em que a distância doponto P ao ponto O foi igual a 1,1 metros.

[Resolução, pg. 10](#)

Exame nacional de 2015 - 2.^a fase

6. Seja f a função, de domínio \mathbb{R} , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x - 1} & \text{se } x < \frac{1}{2} \\ (x + 1) \ln x & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Mostre que a equação $f(x) = 3$ é possível em $]1, e[$, utilizando a calculadora gráfica, determine a única solução desta equação, neste intervalo, arredondada às centésimas.

Na sua resposta:

- recorra ao teorema de Bolzano para provar que a equação $f(x) = 3$ tem, pelo menos, umasolução no intervalo $]1, e[$;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- apresente a solução pedida.

[Resolução, pg. 11](#)

Exame nacional de 2015 - 1.^a fase

7. Seja f uma função de domínio $[0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2^x - 9 & \text{se } 0 \leq x < 5 \\ \frac{1 - e^x}{x} & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$$

Em qual dos intervalos seguintes o teorema de Bolzano permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f ?

(A) $]0, 1[$

(B) $]1, 4[$

(C) $]4, 6[$

(D) $]6, 7[$

[Resolução, pg. 12](#)

Exame nacional de 2011 - 1.^a fase

8. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{1-e^{x+1}} & \text{se } x \neq -1 \\ a+2 & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

(a é um número real.)

Seja f' a primeira derivada de f .

Mostre, sem resolver a equação, que $f'(x) = \frac{1}{4}$ tem, pelo menos, uma solução em $]0, 1[$.

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

[Resolução, pg. 13](#)

Exame nacional de 2011 - Época especial

9. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = -x + e^{2x^3-1}$.

Mostre que $f(x) = 1,5$ tem, pelo menos, uma solução em $] -2, -1[$.

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

[Resolução, pg. 14](#)

Exame nacional de 2010 - 2.ª fase

10. A massa de uma substância radioativa diminui com a passagem do tempo.

Supõe-se que, para uma amostra de uma determinada substância, a massa, em gramas, ao fim de t horas de observação, é dada pelo modelo matemático $M(t) = 15 \times e^{-0,02t}$, $t \geq 0$.

Utilize o Teorema de Bolzano para justificar que houve, pelo menos, um instante, entre as 2 horas e 30 minutos e as 4 horas após o início da observação, em que a massa da amostra da substância radioativa atingiu os 14 gramas.

[Resolução, pg. 16](#)

Exame nacional de 2008 - 2.ª fase

11. Considere a função g , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $g(x) = e^{2x} + \ln x$.

Mostre, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, que a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $]0,1; 0,3[$.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos.

[Resolução, pg. 15](#)

Exame nacional de 2009 - 1.ª fase

12. Seja h a função de domínio $] -1, +\infty[$ definida por $h(x) = 4 - x + \ln(x+1)$

(\ln designa logaritmo de base e).

Resolva, usando métodos analíticos, os dois itens seguintes.

Nota:

A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a

arredondamentos, use, pelo menos, duas casas decimais.

Justifique, aplicando o Teorema de Bolzano, que a função h tem, pelo menos, um zero no intervalo $]5, 6[$.

[Resolução, pg. 17](#)

Exame nacional de 2008 - 1.ª fase

- 13.** Seja $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0) = f(2) = 0$ e $f(1) > 0$.
Prove que existe pelo menos um número real c no intervalo $[0, 1]$ tal que $f(c) = f(c + 1)$.
Sugestão: considere a função $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - f(x + 1)$.

[Resolução, pg. 18](#)

Exame nacional de 2006 - 2.ª fase

- 14.** Seja f a função, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln x} & \text{se } 0 < x < 1 \\ xe^{2-x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Sem recorrer à calculadora, mostre que $\exists x \in]4, 5[: f(x) + f(e^{-1}) = 0$.

[Resolução, pg. 19](#)

Exame nacional de 2006 - 1.ª fase

Resoluções

Resolução da pergunta 1

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1](#)

Como $g'(x) = \cos x - x \operatorname{sen} x + \cos x = 2 \cos x - x \operatorname{sen} x$ é a soma e o produto de funções contínuas em \mathbb{R} então g' é contínua em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

$$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

$$g'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}.$$

Com $-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2} < \frac{3\pi}{2}$, o Teorema de Bolzano garante que $\exists c \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[: g'(c) = -\frac{1}{2}$.

Deste modo, a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa c tem declive $-\frac{1}{2}$.

Resolução da pergunta 2

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1](#)

Vídeo da resolução: 

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = \cos x \Leftrightarrow x^2 - \cos x = 0.$$

Seja h a função definida em $[0, \frac{\pi}{3}]$ por $h(x) = x^2 - \cos x$.

Como h é a diferença de funções contínuas então h é contínua em $[0, \frac{\pi}{3}]$.

Por outro lado, $h(0) = -1$ e $h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 0.6 > 0$.

Como $h(0) \times h\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$, o Corolário do Teorema de Bolzano garante que a equação $h(x) = 0$, ou de forma equivalente $f(x) = g(x)$, tem pelo menos uma solução no intervalo $]0, \frac{\pi}{3}[$.

Resolução da pergunta 3

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

De acordo com o enunciado temos

$$P(a, h(a)) = \left(a, \frac{\ln a}{a} \right); \quad Q(a, h(2a)) = \left(2a, \frac{\ln(2a)}{2a} \right).$$

O declive da reta PQ é

$$m_{PQ} = \frac{\frac{\ln(2a)}{2a} - \frac{\ln a}{a}}{2a - a} = \frac{\ln(2a) - 2 \ln a}{2a^2}.$$

Seja $f(a) = \frac{\ln(2a) - 2 \ln a}{2a^2}$.

Para o triângulo da figura ser isósceles, o declive da reta PQ tem que ser igual a 1, ou seja $f(a) = 1$.

Como

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln 1 - 2 \ln \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 \ln 4 > 2 \ln e = 2 > 1;$$

$$f(1) = \frac{\ln 2 - 2 \ln 1}{2} = \frac{\ln 2}{2} < \frac{\ln e^2}{2} = 1$$

então $f(1) < 1 < f\left(\frac{1}{2}\right)$. Como f é contínua em $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, por ser a diferença, divisão e composição de funções contínuas, então o Teorema de Bolzano garante que a equação $f(a) = 1$ tem pelo menos uma solução no intervalo $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

Resolução da pergunta 4

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2](#)

Como $g(x) = x + 1 \Leftrightarrow g(x) - x - 1 = 0$ vamos considerar a função h definida por $h(x) = g(x) - x - 1$.

Neste caso, como $g(x) - x - 1 = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0$, basta-nos provar que a equação $h(x) = 0$ tem pelo menos uma solução em $]a, g(a)[$.

Notemos agora que

- $h(a) = g(a) - a - 1 > 0$ pois $g(a) > a + 1 \Leftrightarrow g(a) - a - 1 > 0$;
- $h(g(a)) = g(g(a)) - g(a) - 1 = a - g(a) - 1 < 0$ pois $g(a) > a + 1 \Leftrightarrow -g(a) < -a - 1 \Leftrightarrow (a - 1) - g(a) < (a - 1) - a - 1 \Leftrightarrow a - g(a) - 1 < -2 < 0$.

Como h é a diferença de funções contínuas em \mathbb{R} então é contínua em \mathbb{R} . Consequentemente h é contínua em $[a, g(a)]$.

Como $h(a) \times h(g(a)) < 0$ o Corolário do Teorema de Bolzano garante que a equação $h(x) = 0$ tem pelo menos uma solução em $]a, g(a)[$.

Resolução da pergunta 5

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2](#)

Comecemos por notar que como f é a soma, o produto e a composição de funções contínuas então é contínua em $[0, +\infty[$. Consequentemente f é contínua em $[3, 4]$.

Como

$$\begin{aligned} f(3) &= 1 + \frac{1}{2} \sin\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2} \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{4} = 0.75 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(4) &= 1 + \frac{1}{2} \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 1.25 \end{aligned}$$

então $f(3) < 1.1 < f(4)$ e podemos concluir pelo Teorema de Bolzano que houve, pelo menos, um instante, entre os três segundos e os quatro segundos após o início da contagem do tempo, em que a distância do ponto P ao ponto O foi igual a 1,1 metros.

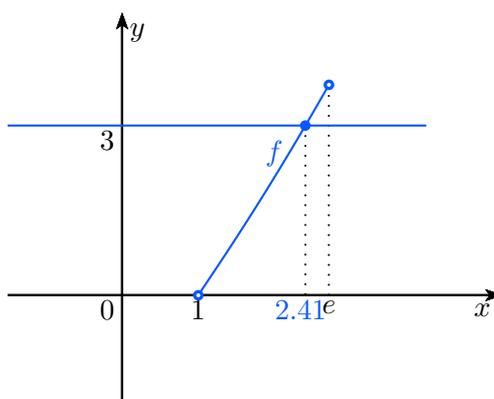
Resolução da pergunta 6

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3](#)

Como para $x > \frac{1}{2}$ a função f está definida pelo produto de funções contínuas então f é contínua em $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$. Assim, f é em particular contínua em $[1, e]$.

Como $f(1) = 0 < 3$ e $f(e) = (e + 1) \ln e = e + 1 > 3$ então $f(1) < 3 < f(e)$ e podemos concluir pelo Teorema de Bolzano que f tem pelo menos uma solução no intervalo $]1, e[$.

No gráfico seguinte, obtido através de uma calculadora gráfica, estão representados os gráficos de $y = f(x)$ e $y = 3$.



Podemos concluir que a solução pedida aproximada às centésimas é 2.41.

Resolução da pergunta 7

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 8

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 9

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 11

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 10

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 12

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 13

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 14

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 