Derivadas - Exames Nacionais

Perguntas de Exames Nacionais dos últimos 16 anos com resolução e/ou vídeo.
Versão de 4 de janeiro de 2022.
Verifique se existe versão com data mais recente aqui e aceda a mais fichas aqui.

1. Seja h a função, de domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ definida por $h(x) = \operatorname{sen} x + \cos^2 x$.
Estude, sem recorrer à calculadora, a função h quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.
Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

Resolução, pg. 20

Exame nacional de 2021 - 2.ª fase

2. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - e^{-x}}{x} & \text{se } x < 0 \\[2ex] \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa -2.

Resolução, pg. 21

Exame Nacional de 2021 - 2.ª fase

3. Seja f a função, de domínio $]0,+\infty[$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} -x^2(1+2\ln x) & \text{se } 0<x\leq 1 \\ \dfrac{5-5e^{x-1}}{x^2+3x-4} & \text{se } x>1 \end{cases}$$

Estude, no intervalo $]0,1[$, a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.
Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

Resolução, pg. 22

Exame nacional de 2021 - 1.ª fase

4. Seja f uma função, de domínio $]0,+\infty[$, cuja derivada, f', de domínio $]0,+\infty[$, é dada por $f'(x)=\dfrac{2+\ln x}{x}$.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{1-x^2}$?

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 2

Resolução, pg. 23

Exame nacional de 2020 - 2.ª fase

5. Seja f uma função, de domínio $]0,+\infty[$, cuja derivada, f', de domínio $]0,+\infty[$, é dada por $f'(x)=\dfrac{2+\ln x}{x}$.

Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.
Na sua resposta, apresente:
– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f.

Resolução, pg. 24

Exame nacional de 2020 - 2.ª fase

6. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x)=\begin{cases} 1+\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-e^x} & \text{se } x<0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ x^2\ln x & \text{se } x>0 \end{cases}$$

Estude a função g quanto à monotonia em $]0,+\infty[$ e determine, caso existam, os extremos relativos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

Resolução, pg. 25

Exame nacional de 2020 - 1.ª fase

7. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

7.1 Estude a função g quanto à monotonia e determine, caso existam, os extremos relativos.

7.2 Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = g(x) + 2x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Sabe-se que o gráfico da função h tem uma assíntota oblíqua.
Qual é o declive dessa assíntota?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** e **(D)** e^2

Resolução, pg. 26

Exame nacional de 2019 - 1.ª fase

8. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$.
Estude a função g quanto à monotonia e determine, caso existam, os extremos relativos.

Resolução, pg. 27

Exame nacional de 2019 - 1.ª fase

9. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{x}{x - \ln x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 1.

Resolução, pg. 29

Exame nacional de 2019 - 1.ª fase

10. Seja g a função, de domínio $[0, \pi]$, definida por $g(x) = 2\sin x + \sin^2 x$.
Seja r a reta tangente ao gráfico da função g que tem declive máximo.
Determine o declive da reta r.
Apresente a sua resposta na forma $\dfrac{a\sqrt{b}}{c}$, com a, b e c números naturais.

Resolução, pg. 30

Exame nacional de 2018 - 2.ª fase

11. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 + \dfrac{e^x}{1-x} & \text{se } x < 1 \\[2ex] \dfrac{\ln(x^2)+2}{x} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Determine $f'(0)$, recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.

Resolução, pg. 32 Exame nacional de 2018 - 2.ª fase

12. Seja f uma função diferenciável no intervalo $[0,2]$ tal que

- $f(0) = 1$
- $\forall x \in [0,2], 0 < f'(x) < 9$

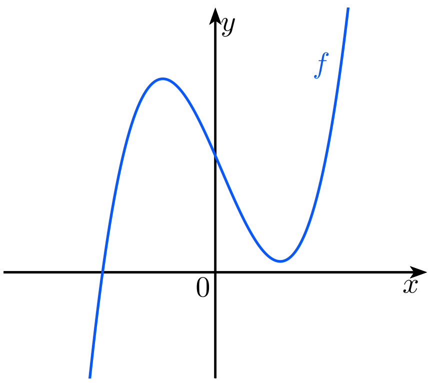
O teorema de Lagrange, aplicado à função f em $[0,2]$, permite concluir que:

(A) $0 < f(2) < 18$ **(B)** $1 < f(2) < 19$ **(C)** $2 < f(2) < 20$ **(D)** $3 < f(2) < 21$

Resolução, pg. 28 Exame nacional de 2018 - 1.ª fase

13. Na figura, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f.
Sabe-se que o único ponto de inflexão do gráfico de f tem abcissa 0.
Seja f'' a segunda derivada da função f.
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $f''(1) + f''(2) < 0$
(B) $f''(-2) + f''(-1) > 0$
(C) $f''(-1) \times f''(-2) < 0$
(D) $f'(1) \times f''(2) > 0$



Resolução, pg. 33 Exame nacional de 2017 - 2.ª fase

14. Seja f a função, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2+\sin x}{\cos x} & \text{se } -\dfrac{\pi}{2} < x \leq 0 \\[2ex] x - \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens **14.1** e **14.2** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

14.1 Estude a função f quanto à existência de assíntota oblíqua do seu gráfico.

14.2 Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, nointervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$.

14.3 Seja r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$.
Além do ponto de tangência, a reta r interseta o gráfico de f em mais dois pontos, A e B, cujas abcissas pertencem ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ (considere que o ponto A é o de menor abcissa).
Determine analiticamente a equação reduzida da reta r e, utilizando a calculadora gráfica, obtenha as abcissas dos pontos A e B.
Apresente essas abcissas arredondadas às centésimas.
Na sua resposta, reproduza, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver o problema.

Resolução, pg. 34

Exame nacional de 2017 - 1.ª fase

15. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Para um certo número real k, a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \frac{k}{x} + f(x)$, tem um extremo relativo para $x = 1$.
Determine esse número k.

Resolução, pg. 37

Exame nacional de 2016 - 2.ª fase

16. Seja g a função definida por $g(x) = -f(x-5)$.
Em qual dos intervalos seguintes o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo?

(A) $]-15, -5[$ **(B)** $]0, 10[$ **(C)** $]-5, 5[$ **(D)** $]5, 15[$

Resolução, pg. 38

Exame nacional de 2016 - 2.ª fase

17. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio, sabe-se que $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{f(x) - f(2)} = 4$.
Qual é o valor de $f'(2)$?

(A) $-\frac{1}{2}$ **(B)** $-\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{1}{4}$

Resolução, pg. 39

Exame nacional de 2016 - 2.ª fase

18. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, cuja derivada, f', de domínio $\mathbb{R}$, é dada por

$$f'(x) = e^x \left(x^2 + x + 1\right).$$

Resolva os itens **18.1** e **18.2** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

18.1 Sejam p e q dois números reais tais que

$$p = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} \quad \text{e} \quad q = -\frac{1}{p}.$$

Determine o valor de q e interprete geometricamente esse valor.

18.2 Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.
Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

Resolução, pg. 40 Exame nacional de 2016 - 1.ª fase

19. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 1 + xe^x & \text{se } x \leq 3 \\ \ln(x-3) - \ln x & \text{se } x > 3 \end{cases}$

Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 4.

Resolução, pg. 42 Exame nacional de 2015 - 2.ª fase

20. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3\sin^2 x$.
Qual das expressões seguintes define a função f'', segunda derivada de f?

(A) $6\sin(2x)\cos(x)$ **(B)** $6\sin(x)\cos(2x)$

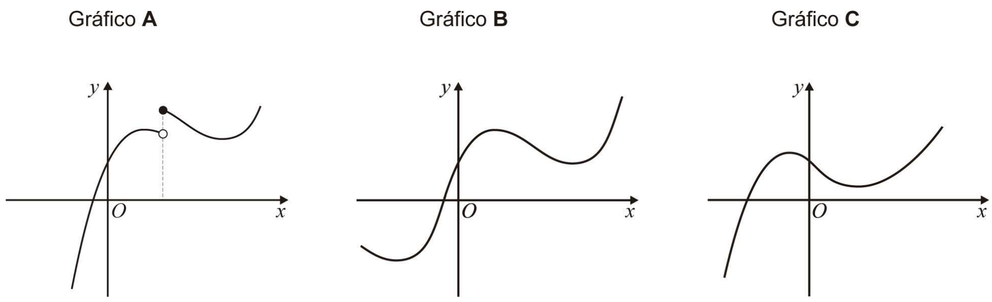
(C) $6\cos(2x)$ **(D)** $6\sin(2x)$

Resolução, pg. 43 Exame nacional de 2015 - 2.ª fase

21. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que:

- f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio;
- $f'(0) > 0$;
- $f''(0) < 0$, para qualquer $x \in]-\infty, 0]$.

Nenhum dos gráficos a seguir apresentados é o gráfico da função f.



Elabore uma composição na qual apresente, para cada um dos gráficos, uma razão pela qual esse gráfico não pode ser o gráfico da função f.

Resolução, pg. 41

Exame nacional de 2015 - 2.ª fase

22. Sejam f e g as funções, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por

$$f(x) = 1 - \cos(3x) \text{ e } g(x) = \sin(3x).$$

Seja a um número real pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Considere as retas r e s tais que:

- a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a;
- a reta s é tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $a + \frac{\pi}{6}$.

Sabe-se que as retas r e s são perpendiculares.
Mostre que $\sin(3a) = -\frac{1}{3}$.

Resolução, pg. 44

Exame nacional de 2015 - 1.ª fase

23. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - \sqrt{e}}{2x - 1} & \text{se } x < \frac{1}{2} \\ (x+1)\ln x & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, no intervalo $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
Na sua resposta, apresente:

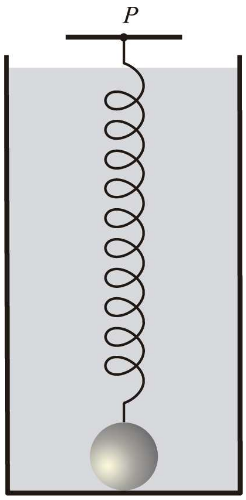
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f.

Resolução, pg. 45

Exame nacional de 2015 - 1.ª fase

24. Na figura, está representado um recipiente cheio de um líquido viscoso.
Tal como a figura ilustra, dentro do recipiente, presa à sua base, encontra-se uma esfera. Essa esfera está ligada a um ponto P por uma mola esticada.
Num certo instante, a esfera é desprendida da base do recipiente e inicia um movimento vertical. Admita que, t segundos após esse instante, a distância, em centímetros, do centro da esfera ao ponto P é dada por

$$d(t) = 10 + (5 - t)e^{-0{,}05t} \quad (t \geq 0)$$



24.1. Sabe-se que a distância do ponto P à base do recipiente é $16\ cm$.
Determine o volume da esfera.
Apresente o resultado em cm^3, arredondado às centésimas.

24.2. Determine o instante em que a distância do centro da esfera ao ponto P é mínima, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Resolução, pg. 46

Exame nacional de 2015 - 1.ª fase

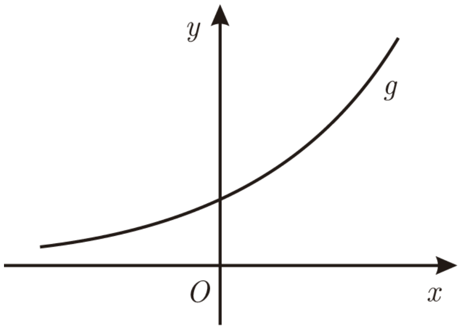
25. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{2 + \ln x}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

O gráfico de f admite uma assíntota horizontal.
Seja P o ponto de intersecção dessa assíntota com a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e.
Determine as coordenadas do ponto P recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Resolução, pg. 47

Exame nacional de 2011 - 1.ª fase

26. Na figura, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função g.

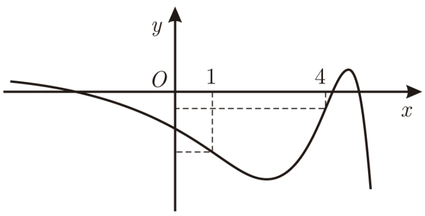


Sabe-se que:

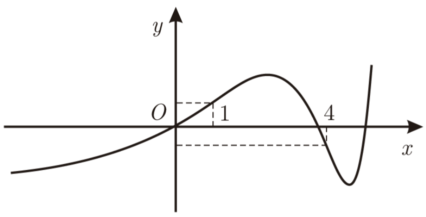
- g é uma função contínua em $\mathbb{R}$;
- g não tem zeros;
- a segunda derivada, f'', de uma certa função f tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $f''(x) = g(x) \times (x^2 - 5x + 4)$;
- $f(1) \times f(4) > 0$.

Apenas uma das opções seguintes pode representar a função f.

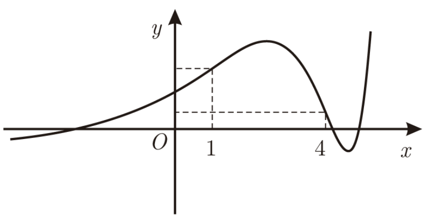
I



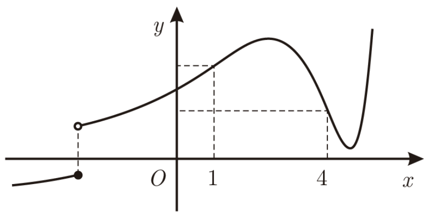
II



III



IV



Elabore uma composição na qual:

- indique a opção que pode representar f;
- apresente as razões que o levam a rejeitar as restantes opções.
  Apresente três razões, uma por cada gráfico rejeitado.

Resolução, pg. 48

Exame nacional de 2011 - 1.ª fase

27. Num museu, a temperatura ambiente em graus centígrados, t horas após as zero horas do dia 1 de Abril de 2010, é dada, aproximadamente, por

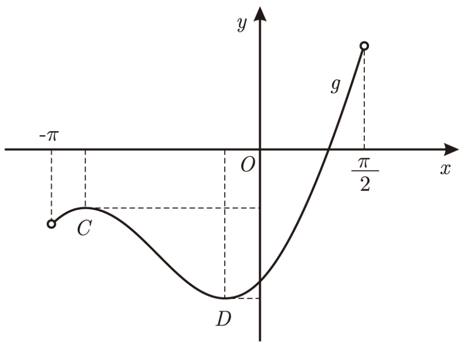
$$T(t) = 15 + 0{,}1t^2 e^{-0{,}15t}, \quad \text{com} \quad t \in [0, 20].$$

Determine o instante em que a temperatura atingiu o valor máximo recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.
Apresente o resultado em horas e minutos, apresentando os minutos arredondados às unidades.
Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

Resolução, pg. 49

Exame nacional de 2011 - 1.ª fase

28. Na figura, está representado, num referencial o.n. xOy, o gráfico da função g, de domínio $\left]-\pi, \frac{\pi}{2}\right[$ definida por $g(x) = x - 2\cos x$.
Sabe-se que C e D são pontos do gráfico de g cujas ordenadas são extremos relativos de g.



Determine os valores exatos das coordenadas dos pontos C e D recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Resolução, pg. 50

Exame nacional de 2011 - 1.ª fase, Prova especial

29. Sejam f e g duas funções deriváveis em $\mathbb{R}$.
Sabe-se que:

- $f(1) = f'(1) = 1$;
- $g(x) = (2x-1) \times f(x)$, para todo o valor real de x.

Qual é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1?

(A) $y = 3x - 2$ **(B)** $y = 3x + 4$ **(C)** $y = 2x - 1$ **(D)** $y = -3x + 2$

Resolução, pg. 51

Exame nacional de 2011 - 1.ª fase, Prova especial

30. De duas funções f e g sabe-se que:

- f tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $f(x) = \pi - 4\,\mathrm{sen}\,(5x)$;
- g tem domínio $\left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$ e g', primeira derivada de g, tem domínio $\left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$ e é definida por $g'(x) = \log_2\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)$.

Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão no intervalo $\left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$.

Resolução, pg. 52

Exame nacional de 2011 - Época especial

31. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

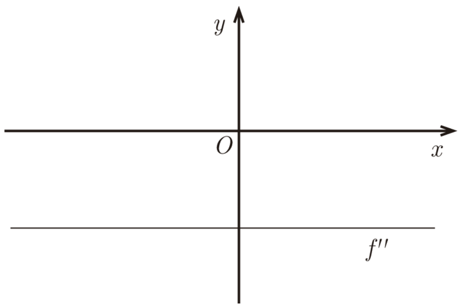
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{1-e^{x+1}} & \text{se } x \neq -1 \\ a+2 & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

(a é um número real.)
Seja f' a primeira derivada de f.
Mostre, sem resolver a equação, que $f'(x) = \frac{1}{4}$ tem, pelo menos, uma solução em $]0, 1[$.
Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

Resolução, pg. 53

Exame nacional de 2011 - Época especial

32. Para um certo número real a, seja a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 - 1$.
Na figura, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f'', segunda derivada da função f.



Qual dos valores seguintes pode ser o valor de a?

(A) 0 **(B)** π **(C)** 3 **(D)** -3

Resolução, pg. 54

Exame nacional de 2011 - Época especial

33. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x + e^{2x^3-1}$.
Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = 0$.

Resolução, pg. 55 Exame nacional de 2010 - 2.ª fase

34. Considere a função f, de domínio $]0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 3x}{x} & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{1}{5}x - \ln x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Mostre que a função f tem um extremo relativo no intervalo $]2, +\infty[$.

Resolução, pg. 56 Exame nacional de 2010 - 2.ª fase

35. Considere uma função f, de domínio $]0, 3[$, cuja derivada f', de domínio $]0, 3[$, é definida por $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x}$.
Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.
Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar os intervalos de monotonia da função f;
- assinalar e indicar as coordenadas dos pontos relevantes, com arredondamento às centésimas.

Resolução, pg. 57 Exame nacional de 2010 - 1.ª fase

36. Numa certa zona de cultivo, foi detectada uma doença que atinge as culturas. A área afetada pela doença começou por alastrar durante algum tempo, tendo depois começado a diminuir.
Admita que a área, em hectares, afetada pela doença, é dada, em função de t, por

$$A(t) = 2 - t + 5\ln(t + 1)$$

sendo t ($0 \leq t < 16$) o tempo, em semanas, decorrido após ter sido detectada essa doença.
Determine, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, a área máxima afetada pela doença.
Apresente o resultado em hectares, arredondado às centésimas.
Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

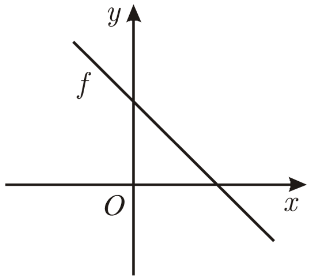
Resolução, pg. 60 Exame nacional de 2009 - 2.ª fase

37. Admita que, numa certa marina, a profundidade da água, em metros, t horas após as zero horas de um certo dia, é dada por $P(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 8$, em que $t \in [0, 24]$.
Determine, recorrendo ao estudo da função derivada, a profundidade mínima, em metros, da água da marina, nesse dia.

Resolução, pg. 59

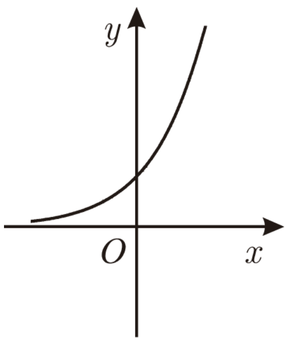
Exame nacional de 2010 - Época especial

38. Na figura, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função afim f, de domínio $\mathbb{R}$.

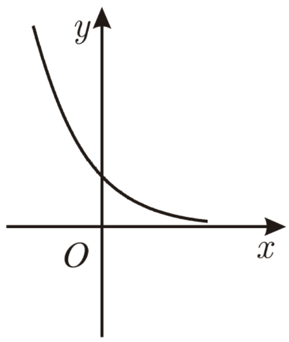


Seja h a função definida por $h(x) = f(x) + e^x$.
Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função h'', segunda derivada de h?

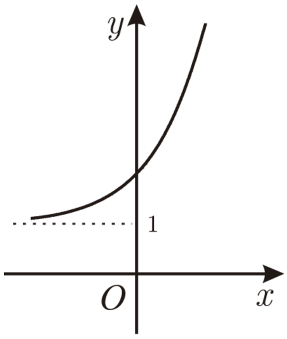
(A)



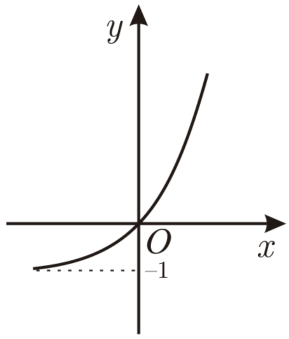
(B)



(C)



(D)



Resolução, pg. 58

Exame nacional de 2010 - 1.ª fase

39. Seja f a função, de domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, definida por $f(x) = \operatorname{sen}(2x)\cos x$.
Determine, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa 0.

Resolução, pg. 61 Exame nacional de 2009 - 2.ª fase

40. Seja h a função de domínio $]-1, +\infty[$ definida por $h(x) = 4 - x + \ln(x + 1)$
($\ln$ designa logaritmo de base e).
Resolva, usando métodos analíticos, o item seguinte.
Nota:
A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use, pelo menos, duas casas decimais.
Estude a função h, quanto à monotonia, no seu domínio.

Resolução, pg. 62 Exame nacional de 2008 - 1.ª fase

41. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ ($\ln$ designa logaritmo de base e).
Estude, recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, a função f quanto à monotonia e à existência de extremos relativos, indicando os intervalos de monotonia e os valores dos extremos relativos, caso existam.

Resolução, pg. 63 Exame nacional de 2008 - Época especial

42. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \frac{e^x}{x}$.
Determine, recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 2.

Resolução, pg. 64 Exame nacional de 2008 - Época especial

43. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = 1 - \ln(x^2)$.
Estude a função quanto à monotonia e à existência de extremos relativos recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Resolução, pg. 65 Exame nacional de 2007 - 2.ª fase

44. Na Figura 1 está representada parte do gráfico de uma função h, de domínio $\mathbb{R}_0^+$.

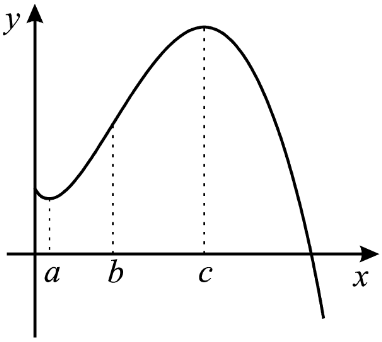


Figura 1

Em cada uma das figuras abaixo está representada parte do gráfico de uma função de domínio $\mathbb{R}_0^+$.
Uma das funções representadas é h', primeira derivada de h, e a outra é h'', segunda derivada de h.

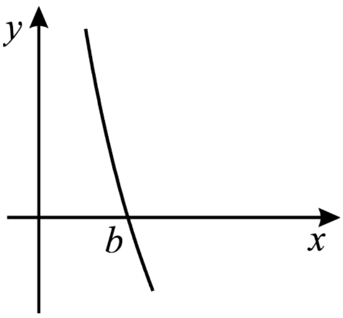


Figura 2

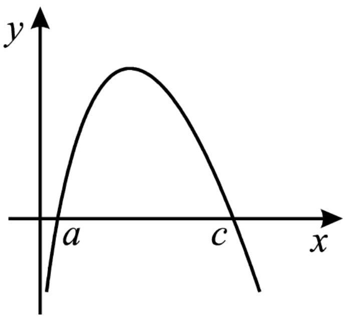


Figura 3

Numa pequena composição, explique em qual das figuras está representado o gráfico da primeira derivada e em qual está representado o gráfico da segunda derivada. Na sua composição, deve referir-se à variação de sinal das funções h' e h'', relacionando-a com características da função h (monotonia e sentido das concavidades do seu gráfico).

Resolução, pg. 66 Exame nacional de 2007 - 2.ª fase

45. Admita que a intensidade da luz solar, x metros abaixo da superfície da água, é dada, numa certa unidade de medida, por

$$I(x) = ae^{-bx} \quad (x \geq 0)$$

a e b são constantes positivas que dependem do instante e do local onde é efetuada a medição.
Sempre que se atribui um valor a e um valor b obtemos uma função de domínio $\mathbb{R}_0^+$.

45.1. Medições efetuadas, num certo instante e em determinado local do oceano Atlântico, mostraram que, a 20 metros de profundidade, a intensidade da luz solar era metade da sua intensidade à superfície da água.
Determine o valor de b para esse instante e local. Apresente o resultado arredondado às centésimas.

45.2. Considere agora $b = 0{,}05$ e $a = 10$.
Estude essa função quanto à monotonia e existência de assíntotas do seu gráfico.
Interprete os resultados obtidos no contexto da situação descrita.

Resolução, pg. 67

Exame nacional de 2007 - 1.ª fase

46. Considere as funções f e g, definidas em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = e^{x-1} \ \text{ e } \ g(x) = \operatorname{sen} x.$$

Considere ainda a função h, definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = f'(x) - g'(x)$.
Sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, resolva os dois itens seguintes:

46.1 Mostre que a função h tem, pelo menos, um zero no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

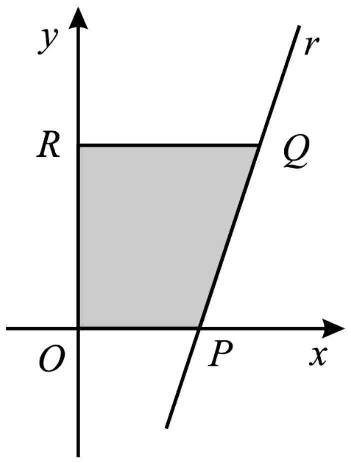
46.2 Tendo em conta **46.1**, justifique que existe $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que as retas tangentes aos gráficos de f e g, nos pontos de abcissa a, são paralelas.

Resolução, pg. 68

Exame nacional de 2007 - 1.ª fase

47. Seja f a função, de domínio $]1, +\infty[$, definida por $f(x) = x + x\ln(x-1)$.
Resolva a seguinte questão sem recorrer à calculadora.
Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy, uma reta r e um trapézio $[OPQR]$.

- Q tem abcissa 2 e pertence ao gráfico de f (o qual não está representado na figura);
- r é tangente ao gráfico de f no ponto Q;
- P é o ponto de intersecção da reta r com o eixo Ox;
- R pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à do ponto Q.



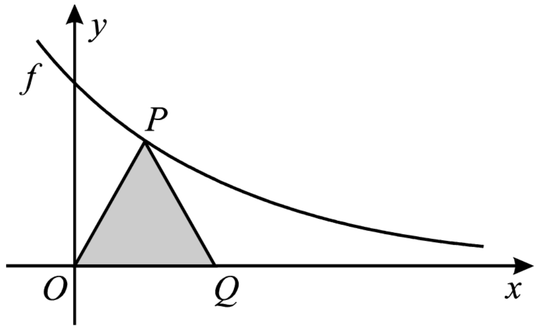
Determine a área do trapézio $[OPQR]$. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Resolução, pg. 69

Exame nacional de 2006 - 2.ª fase

48. Na figura estão representados:

- parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{-x}$;
- um triângulo **isósceles** $[OPQ]$ ($\overline{PO} = \overline{PQ}$), em que:
  - O é a origem do referencial;
  - P é um ponto do gráfico de f;
  - Q pertence ao eixo das abcissas.



Considere que o ponto P se desloca no primeiro quadrante (eixos não incluídos), ao longo do gráfico de f.
O ponto Q acompanha o movimento do ponto P, deslocando-se ao longo do eixo das abcissas, de tal modo que $\overline{PO}$ permanece sempre igual a $\overline{PQ}$.
Seja A a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, que faz corresponder, à abcissa x do ponto P, a área do triângulo $[OPQ]$.

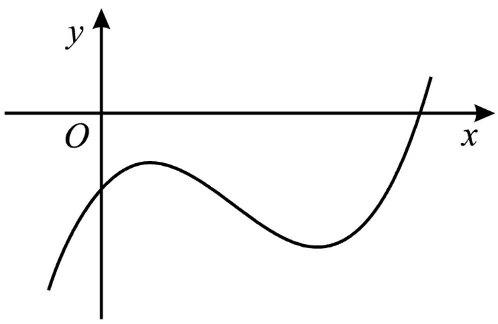
48.1 Mostre que, para cada $x \in \mathbb{R}^+$ se tem $A(x) = xe^{-x}$.

48.2 **Sem recorrer à calculadora**, estude a função A quanto à monotonia e conclua qual é o valor máximo que a área do triângulo $[OPQ]$ pode assumir.

Resolução, pg. 71

Exame nacional de 2006 - 1.ª fase

49. Na figura abaixo está parte do gráfico de uma função h, de domínio $\mathbb{R}$.



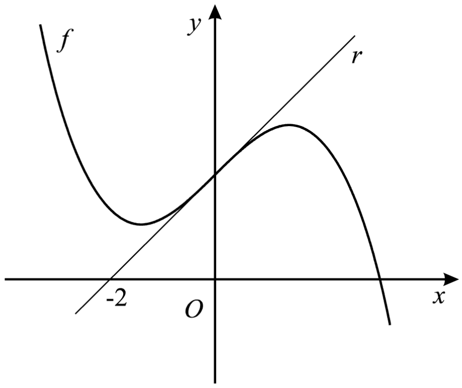
Sejam h' e h'' a primeira e a segunda derivadas de h, respetivamente.
Admita que estas duas funções também têm domínio $\mathbb{R}$.
Qual das expressões seguintes designa um número positivo?

(A) $h(0) + h''(0)$ **(B)** $h(0) - h'(0)$
(C) $h'(0) - h''(0)$ **(D)** $h'(0) \times h''(0)$

Resolução, pg. 70

Exame nacional de 2006 - 2.ª fase

50. Na figura está representada parte do gráfico de uma função polinomial f.
Tal como a figura sugere, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0]$ e voltada para baixo em $[0, +\infty[$.



A reta r tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0 é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares e interseta o eixo Ox no ponto de abcissa -2.
Sabendo que f' e f'' designam, respetivamente, a primeira e a segunda derivadas de f, indique o valor de $f(0) + f'(0) + f''(0)$.

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

Resolução, pg. 72 Exame nacional de 2006 - 1.ª fase

51. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln x} & \text{se } 0 < x < 1 \\ xe^{2-x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2.
Seja s a reta que passa na origem do referencial e é paralela à reta r.
A reta s interseta o gráfico de f num ponto.
Utilizando a sua calculadora, determine as coordenadas desse ponto. Apresente os valores arredondados às centésimas. Explique como procedeu, apresentando o gráfico, ou gráficos, obtido(s) na calculadora.

Resolução, pg. 73 Exame nacional de 2006 - 1.ª fase, Época especial

52. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$ sabe-se que a sua segunda derivada é dada por $f''(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 5)(x + 6)^2$.
Quantos pontos de inflexão tem o gráfico de f?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

Resolução, pg. 75 Exame nacional de 2006 - 1.ª fase

53. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln x} & \text{se } 0 < x < 1 \\ xe^{2-x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Sem recorrer à calculadora, estude a função f quanto à monotonia, no intervalo $]0,1[$.

Resolução, pg. 74

Exame nacional de 2006 - 1.ª fase

54. Considere a função g, definida no intervalo $]1,7[$ por $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \ln x}{x}$
($\ln$ designa logaritmo na base e).
Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, visualize o gráfico da função g e reproduza-o na sua folha de prova.
Com base nesse gráfico e utilizando as ferramentas adequadas da sua calculadora, resolva o seguinte problema:
Seja g' a função derivada de g. O conjunto solução da inequação $g'(x) < 0$ é um intervalo aberto $]a,b[$. Determine os valores de a e de b. Apresente os resultados arredondados às centésimas.
Justifique a sua resposta.

Resolução, pg. 76

Exame nacional de 2007 - 2.ª fase

Resoluções

Resolução da pergunta 1

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1

$D_h = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Temos
$h'(x) = \cos x - 2\cos x \operatorname{sen} x = \cos x - \operatorname{sen}(2x)$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \operatorname{sen}(2x) \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vamos agora atribuir valores inteiros a k em cada uma das duas famílias de soluções de modo a encontrar as soluções pertencentes ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
No caso de $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$,

- para $k = -1$ temos $x = -\frac{\pi}{2} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- para $k = 0$ temos $x = \frac{\pi}{6} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- para $k = 1$ temos $x = \frac{5\pi}{6} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Podemos concluir que esta família admite a solução $\frac{\pi}{6}$ no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
No caso de $x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi$,

- para $k = -1$ temos $x = -\frac{3\pi}{2} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- para $k = 0$ temos $x = \frac{\pi}{2} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Podemos concluir que esta família não admite soluções no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Deste modo, $\frac{\pi}{6}$ é o único zero de h'.
Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de h' e da monotonia de h.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h	1	$\nearrow$	Max	$\searrow$	N.D.

Nota:
$h'(0) = 1 > 0$.
$h'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$.Logo, h é crescente em $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ e decrescente em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$.
$h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$ é máximo local e$h(0) = 1$ é mínimo local.

Resolução da pergunta 2

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1

Para $x < 0$,

$$f'(x) = \frac{(1 + e^{-x})\,x - x + e^{-x}}{x^2}.$$

O declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa -2 é dado por

$$f'(-2) = \frac{(1 + e^2) \times (-2) + 2 + e^2}{4} = -\frac{e^2}{4}.$$

Podemos que concluir que a sua equação reduzida é da forma $y = -\frac{e^2}{4}x + b$, $b \in \mathbb{R}$. Substituindo nesta equação as coordenadas do ponto de tangência

$$T\,(-2, f(-2)) = \left(-2, \frac{-2 - e^2}{-2}\right) = \left(-2, \frac{2 + e^2}{2}\right)$$

temos

$$\frac{2 + e^2}{2} = -\frac{e^2}{4} \times (-2) + b \Leftrightarrow b = 1.$$

Deste modo, $y = -\frac{e^2}{4}x + 1$ é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -2.

Resolução da pergunta 3

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

Para $x \in]0,1[$,

$$f'(x) = -2x(1 + 2\ln x) - x^2 \times \frac{2}{x} = x(-2 - 4\ln x - 2) = x(-4 - 4\ln x).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee \ln x = -1) \wedge x \in]0,1[\Leftrightarrow x = e^{-1}.$$

Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de f' e da monotonia de f em $]0,1[$.

x	0		e^{-1}		1
x		$+$	$+$	$+$	
$-4-4\ln x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	max	$\searrow$	

Podemos concluir que f é decrescente em $[e^{-1}, 1[$ e crescente em $]0, e^{-1}]$.
$f\left(e^{-1}\right) = -e^{-2}\left(1 + 2\ln e^{-1}\right) = e^{-2}$ é máximo relativo.

Resolução da pergunta 4

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

Vídeo da resolução:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{1-x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{1-x}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x}$$
$$= -\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{2} = -f'(1)\times\frac{1}{2} = -\frac{2+\ln 1}{1}\times\frac{1}{2} = -1.$$

Resolução da pergunta 5

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (2 + \ln x) \times 1}{x^2} = \frac{-1 - \ln x}{x^2}.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -1 - \ln x = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}.$$

Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de f'' e da concavidade do gráfico de f em $]0, +\infty[$.

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$-1 - \ln x$	N.D.	$+$	0	$-$
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	N.D.	$+$	0	$-$
f	N.D.	$\cup$	P.I.	$\cap$

Podemos concluir que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $\left]0, \frac{1}{e}\right]$ e voltada para baixo em $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$.O ponto de abcissa $\frac{1}{e}$ é ponto de inflexão do gráfico de f.

Resolução da pergunta 6

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Comecemos por determinar $g'(x)$ no intervalo $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + x.$$

Estudemos agora a existência de pontos críticos em $]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2x \ln x + x = 0 \wedge x \in]0, +\infty[\Leftrightarrow x\,(2 \ln x + 1) = 0 \wedge x \in]0, +\infty[\\ &\Leftrightarrow \left(x = 0 \vee x = e^{-\frac{1}{2}}\right) \wedge x \in]0, +\infty[\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de g' e da monotonia de g em $]0, +\infty[$.

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
x	N.D.	$+$	$+$	$+$
$2\ln x + 1$	N.D.	$-$	0	$+$
$g'(x)$	N.D.	$-$	0	$+$
g	N.D.	$\searrow$	min	$\nearrow$

Podemos concluir que

$$g\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = e^{-1} \ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2e}$$

é mínimo relativo.
g é monótona decrescente em $\left]0, e^{-\frac{1}{2}}\right]$ e monótona crescente em $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$.

Resolução da pergunta 7

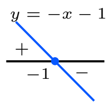
Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

Vídeos da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):
7.1 **7.2** **7.1** $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Para estudar a monotonia e a existência de extremos da função g vamos começar por determinar a derivada e os seus zeros.
$g'(x) = \dfrac{-e^{-x} \times x - e^{-x} \times 1}{x^2} = \dfrac{e^{-x}(-x-1)}{x^2}$.

$$\begin{aligned} & g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(-x-1) = 0 \wedge x^2 \neq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(e^{-x} = 0 \vee -x-1 = 0\right) \wedge x \neq 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = -1. \end{aligned}$$

Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de g' e da monotonia de g.

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
e^{-x}	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$-x-1$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
x^2	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	ND	$-$
g	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$



Podemos concluir que g é crescente em $]-\infty, -1]$ e decrescente em $[-1, 0[$ e em $]0, +\infty[$.
$g(-1) = \frac{e}{-1} = -e$ é máximo relativo.

7.2 O declive da assíntota oblíqua é dado por

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x}.$$

Como $h(x) = g(x) + 2x - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{e^{-x}}{x} + 2x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} &= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x^2} + 2 - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{0}{+\infty} + 2 - \frac{1}{+\infty} = 2. \end{aligned}$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(B)**.

Resolução da pergunta 8

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

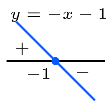
Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Para estudar a monotonia e a existência de extremos da função g vamos começar por determinar a derivada e os seus zeros.
$g'(x) = \dfrac{-e^{-x} \times x - e^{-x} \times 1}{x^2} = \dfrac{e^{-x}(-x-1)}{x^2}$.

$$\begin{aligned} & g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(-x-1) = 0 \wedge x^2 \neq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(e^{-x} = 0 \vee -x-1 = 0\right) \wedge x \neq 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = -1. \end{aligned}$$

Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de g' e da monotonia de g.

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
e^{-x}	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$-x-1$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
x^2	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	ND	$-$
g	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$



Podemos concluir que g é crescente em $]-\infty, -1]$ e decrescente em $[-1, 0[$ e em $]0, +\infty[$.
$g(-1) = \frac{e}{-1} = -e$ é máximo relativo.

Resolução da pergunta 12

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Uma vez que f é diferenciável em $[0, 2]$ então, pelo teorema da derivabilidade e continuidade, também é contínua em $[0, 2]$. Assim, pelo Teorema de Lagrange

$$\exists c \in]0, 2[\colon f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}.$$

Como $f(0) = 1$ então

$$\exists c \in]0, 2[\colon f'(c) = \frac{f(2) - 1}{2}.$$

Por outro lado, como $0 < f'(x) < 9$ então

$$0 < f'(c) < 9 \Leftrightarrow 0 < \frac{f(2) - 1}{2} < 9 \Leftrightarrow 1 < f(2) < 19.$$

A opção correta é a **(B)**.

Resolução da pergunta 9

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Se $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1(x - \ln x) - x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(1 - \ln x)^2} \\ &= \frac{x - \ln x - x + 1}{(1 - \ln x)^2} \\ &= \frac{1 - \ln x}{(1 - \ln x)^2}. \end{aligned}$$

Assim, $f'(1) = \frac{1-\ln 1}{(1-\ln 1)^2} = 1$ e a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1 é da forma $y = x + b$, $b \in \mathbb{R}$.
Como $f(1) = \frac{1}{1-\ln 1} = 1$ então $T(1, 1)$ é um ponto da reta tangente em estudo.
Substituindo as coordenadas de T na equação $y = x + b$ temos

$$1 = 1 + b \Leftrightarrow b = 0.$$

Podemos concluir que $y = x$ é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

Resolução da pergunta 10

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Sabemos que o declive da reta tangente ao gráfico de uma função num ponto é igual ao valor da sua derivada nesse ponto. Para encontrar o declive da reta r vamos determinar o máximo absoluto de g' estudando a monotonia de g'.
$g'(x) = 2\cos x + 2\sin x \cos x = 2\cos x + \sin(2x)$.
$g''(x) = -2\sin x + 2\cos(2x)$.

$$
\begin{aligned}
& g''(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \cos(2x) \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(2x) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\pi}{2} - x = 2x + 2k\pi \vee \frac{\pi}{2} - x = -2x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Para encontrar as soluções desta equação no conjunto $[0, \pi]$ vamos atribuir valores inteiros a k.
Comecemos com $x = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}k\pi$.

- $k = -2 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{4}{3}\pi = \dfrac{3}{2}\pi \notin [0, \pi]$;
- $k = -1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2}{3}\pi = \dfrac{5}{6}\pi \in [0, \pi]$;
- $k = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} \in [0, \pi]$;
- $k = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{3\pi}{6} \notin [0, \pi]$.

Relativamente a $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ temos:

- $k = -1 \Rightarrow x = -\dfrac{5}{2}\pi \notin [0, \pi]$;
- $k = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} \notin [0, \pi]$;
- $k = 1 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}\pi \notin [0, \pi]$.

Podemos concluir que

$$
g''(x) = 0 \wedge x \in [0, \pi] \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right\}.
$$

Estudemos agora a monotonia e os extremos de g' numa tabela.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$g''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g'		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$;
$g'(\pi) = 2\cos\pi + \sin(2\pi) = -2$.
Podemos assim concluir que o máximo absoluto de g' no intervalo $[0, \pi]$ é $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, sendo este o declive da reta r.

Resolução da pergunta 11

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3+\frac{e^h}{1-h}-4}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1+h}{h(1-h)}\\
&\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{1-h}+\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(1-h)}\\
&= 1\times 1+1=2.
\end{aligned}
$$

Resolução da pergunta 13

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

Como a concavidade do gráfico de f é voltada para cima em $[0, +\infty[$ então $f''(1) > 0$ e $f''(2) > 0$. Consequentemente, $f''(1) \times f''(2) > 0$.
A opção correta é a **(D)**.

Resolução da pergunta 14

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

14.1 Como o domínio de f é $\left]-\frac{\pi}{2},+\infty\right[$ então só temos que estudar a existência de assíntota oblíqua quando $x\to+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\ln x}{x}$
$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=1-0=1;$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-\ln x)=-\infty.$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ não é um número real podemos concluir que o gráfico de f não admite assíntotas oblíquas.

14.2 Comecemos por determinar $f'(x)$ no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$:

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=\left(\frac{2+\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cos x-(2+\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}\\
&=\frac{\cos^2 x+2\sin x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1+2\sin x}{\cos^2 x}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f'(x)=0\Leftrightarrow 1+2\sin x=0\wedge\cos^2 x\neq 0\\
\Leftrightarrow\ &\sin x=-\frac{1}{2}\wedge\cos x\neq 0\\
\Leftrightarrow\ &\left(x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\vee x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right)\wedge x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Notemos que a restrição $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ não condiciona as soluções no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ pois

$$\cos x>0,\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[\Rightarrow\cos^2 x>0,\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[.$$

Para determinar as soluções da equação pertencentes ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ vamos atribuir valores inteiros de k em cada uma das famílias de soluções.
Para $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ temos

- para $k=-1$ temos $x=-\dfrac{\pi}{6}-2\pi=-\dfrac{13}{6}\pi<-\dfrac{\pi}{2}$;
- para $k=0$ temos $x=-\dfrac{\pi}{6}\in\left]-\dfrac{\pi}{2},0\right[$;
- para $k=1$ temos $x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi=\dfrac{11}{6}\pi>0$;

Podemos concluir que $-\frac{\pi}{6}$ é a única solução desta família em $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$.
Para $\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ temos

- para $k=-1$ temos $x=\frac{7\pi}{6}-2\pi=-\frac{5\pi}{6}<-\frac{\pi}{2}$;
- para $k=0$ temos $x=\frac{7\pi}{6}>0$;

Podemos concluir que esta família de soluções não tem nenhuma solução em $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$.
Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de f' e da monotonia de f em $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$.

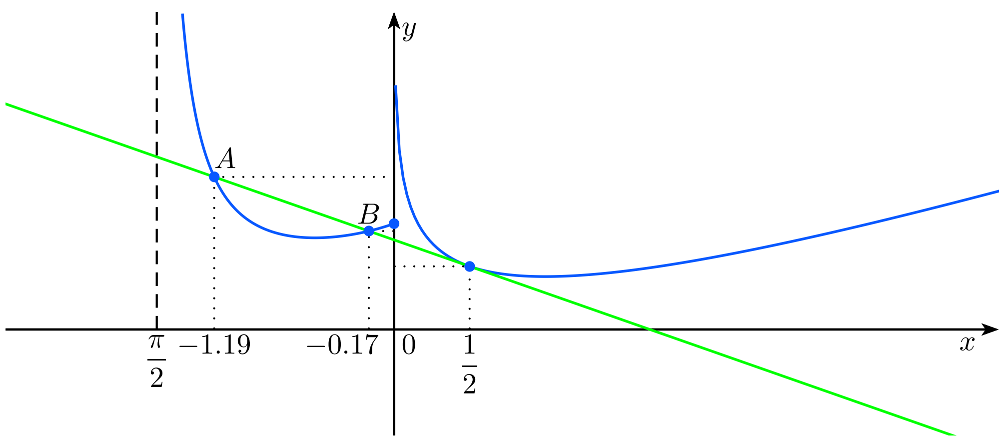
x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		0
$1+2\sin x$		$-$	0	$+$	
$\cos^2 x$		$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	min	$\nearrow$	0

Podemos concluir que f é decrescente em $\left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right]$ e crescente em $\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$.
f tem um mínimo relativo em $x=-\frac{\pi}{6}$.

14.3 Como para $x>0$ temos $f'(x)=1-\frac{1}{x}$, a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$ tem declive igual a $f'(2)=1-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-1$.
Consequentemente a reta tangente é da forma $y=-x+b$ para $b\in\mathbb{R}$.
Uma vez que o ponto de tangência é $(2,f(2))=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\ln 2\right)$, substituindo na equação anterior vem

$$\frac{1}{2}+\ln 2=-\frac{1}{2}+b\Leftrightarrow b=1+\ln 2.$$

Podemos concluir que a equação reduzida da reta tangente é $y=-x+1+\ln 2$.
Na figura seguinte estão representados parte do gráfico de f, a reta de equação $y=-x+1+\ln 2$ e os pontos A e B.



Podemos concluir que as abcissas de A e B são respetivamente $x_A \approx -1.19$ e $x_B \approx -0.17$.

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

Resolução da pergunta 15

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

Como g é uma função derivável em $\mathbb{R}^+$, por ser a soma de funções deriváveis, então $g(1)$ ser extremo relativo implica que $g'(1) = 0$.
Como

$$g'(x) = \frac{-k}{x^2} + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{-k + 1 - \ln x}{x^2}$$

então

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{-k + 1 - \ln 1}{1^2} = 0 \Leftrightarrow -k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1.$$

Resolução da pergunta 16

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

O gráfico de $g(x) = -f(x-5)$ resulta de deslocar o gráfico de f cinco unidades para a direita e fazendo o seu simétrico relativamente ao eixo Ox. Deste modo, obtemos a seguinte tabela de variação de sinal de f'' e das concavidades do gráfico de g.

x	$-\infty$	-5		5		15	$+\infty$
g''	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
g	$\cup$	0	$\cap$	0	$\cup$	0	$\cap$

Logo, o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $]-5, 5[$.
Podemos concluir que a opção correta é a **(C)**.

Resolução da pergunta 17

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{f(x)-f(2)}=4 \Leftrightarrow \lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{f(x)-f(2)}=4\\
\Leftrightarrow &\lim_{x\to 2} x \times \frac{1}{\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}}=4\\
\Leftrightarrow &\frac{2}{f'(2)}=4 \Leftrightarrow f'(2)=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

A opção correta é a **(C)**.

Resolução da pergunta 18

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6

18.1 Podemos concluir através da definição de derivada de uma função num ponto que

$$p = f'(-1) = e^{-1}\left((-1)^2 - 1 + 1\right) = \frac{1}{e}.$$

Consequentemente $q = -\dfrac{1}{\frac{1}{e}} = -e$.

Geometricamente, como p é o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1 e a reta normal neste ponto tem declive $-\frac{1}{p}$, podemos concluir que o declive da reta normal ao gráfico de f no ponto de abcissa -1 é $-e$.

18.2 Para estudar o sentido das concavidades de f devemos começar por calcular $f''(x)$:

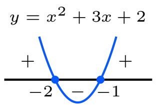
$$f''(x) = e^x\left(x^2 + x + 1\right) + e^x(2x+1) = e^x\left(x^2 + 3x + 2\right).$$

O passo seguinte é determinar os zeros de f''.

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow e^x\left(x^2+3x+2\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x = 0 \vee x^2+3x+2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \varnothing \vee x = -2 \vee x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1. \end{aligned}$$

Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de f'' e da concavidade de f.

x	$-\infty$	-2		-1	$+\infty$
e^x	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2+3x+2	$+$	0	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$		$\cap$		$\cup$



Podemos concluir que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -2]$ e em $[-1, +\infty[$ e voltada para baixo em $[-2, -1]$.Os pontos de abcissas -2 e -1 são pontos de inflexão do gráfico de f.

Resolução da pergunta 21

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6

Como f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio então f é contínua em todos os pontos do seu domínio. Como o Gráfico A representa uma função descontínua num ponto do seu domínio então não pode ser o gráfico de f.
O Gráfico B não pode ser o gráfico de f porque, como $f''(0) < 0$, para qualquer $x \in]-\infty, 0]$, o gráfico de f tem em $x \in]-\infty, 0]$ a concavidade voltada para baixo. Note-se que o Gráfico B tem neste intervalo a concavidade voltada para cima.
Relativamente ao Gráfico C, como representa uma função decrescente e derivável numa vizinhança de 0 então a sua função derivada é negativa nesta vizinhança. Como por hipótese $f'(0) > 0$ então o Gráfico C não pode ser o gráfico de f.

Resolução da pergunta 19

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6

Comecemos por recordar que, por definição, a reta tangente ao gráfico de uma função num ponto x_0 é a reta que tem como declive $f'(x_0)$ e contém o ponto $(x_0, f(x_0))$, denominado por ponto de tangência.

Como para $x > 3$ temos $f'(x) = (\ln(x-3) - \ln x)' = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x}$ então

$$f'(4) = \frac{1}{4-3} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

e a equação reduzida da reta tangente pretendida é da forma $y = \frac{3}{4}x + b$ onde $b \in \mathbb{R}$. Substituindo o ponto de tangência é $(4, f(4)) = (4, \ln 1 - \ln 4) = (4, -\ln 4)$ nesta equação vem

$$-\ln 4 = \frac{3}{4} \times 4 + b \Leftrightarrow b = -\ln 4 - 3$$

e podemos concluir que a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 4 é $y = \dfrac{3}{4}x - \ln 4 - 3$.

Resolução da pergunta 20

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6

Como

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(3\sin^2 x\right)' = 3 \times 2 \times \sin x \times \cos x \\
&= 6 \sin x \times \cos x
\end{aligned}
$$

então

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= (6 \sin x \times \cos x)' \\
&= 6 (\cos x \cos x + \sin x \times (-\sin x)) \\
&= 6 \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 6 \cos (2x) \, .
\end{aligned}
$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(C)**.

Resolução da pergunta 22

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 7

Como o declive da reta r é $m_r = f'(a)$, o declive da reta s é $m_s = g'\left(a+\frac{\pi}{6}\right)$ e as retas são perpendiculares então

$$m_r = -\frac{1}{m_s} \Leftrightarrow f'(a) = -\frac{1}{g'\left(a+\frac{\pi}{6}\right)}.$$

Sendo $f'(x) = 3\sin(3x)$ e $g'(x) = 3\cos(3x)$ então

$$\begin{aligned}
&f'(a) = -\frac{1}{g'\left(a+\frac{\pi}{6}\right)} \Leftrightarrow 3\sin(3a) = -\frac{1}{3\cos\left(3\left(a+\frac{\pi}{6}\right)\right)} \\
&\Leftrightarrow 3\sin(3a) = -\frac{1}{3\cos\left(3a+\frac{\pi}{2}\right)} \\
&\Leftrightarrow 3\sin(3a) = -\frac{1}{-3\sin\left(3a\right)} \Leftrightarrow 9\sin^2(3a) = 1 \\
&\Leftrightarrow \sin(3a) = \pm\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Como $a \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow 3a \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ então
$\sin(3a) = -\frac{1}{3}$.

Resolução da pergunta 23

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 7

Para estudar o sentido das concavidades de f devemos começar por calcular $f''(x)$ en $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$:

$$f'(x) = \ln x + (x+1) \times \frac{1}{x} = \ln x + \frac{x+1}{x}.$$

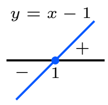
$$f''(x) = \left(\ln x + \frac{x+1}{x}\right)' = \frac{1}{x} + \frac{x-(x+1)}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}.$$

O passo seguinte é determinar os zeros de f''.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de f'' e da concavidade de f.

x	$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$
f''	$-$	$-$	0	$+$
f		$\cap$		$\cup$



Podemos concluir que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$ e voltada para cima em $[1, +\infty[$.
O ponto $(1, f(1)) = (1, 0)$ é o único ponto de inflexão do gráfico de f.

Resolução da pergunta 24

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 8

24.1. Como $d(0) = 10 + 5e^0 = 15$ e a distância de P à base do recipiente é 16 então o raio da esfera é igual a $16 - 15 = 1$ e o seu volume é

$$\frac{4}{3}\pi \times 1^3 = \frac{4}{3}\pi \; cm^3 \approx 4.19 \; cm^3.$$

24.2. Para obter o pretendido vamos estudar a monotonia de d.

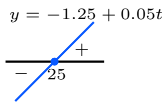
$$\begin{aligned} d'(t) &= 0 - e^{-0.05t} + (5-t) \times (-0.05)e^{-0.05t} \\ =& e^{-0.05t}\left(-1 - 0.25 + 0.05t\right) \Leftrightarrow e^{-0.05t}\left(-1.25 + 0.05t\right). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} d'(t) &= 0 \Leftrightarrow e^{-0.05t} = 0 \vee -1.25 + 0.05t = 0 \\ \Leftrightarrow& t \in \varnothing \vee t = 25 \Leftrightarrow t = 25 \end{aligned}$$

então 25 é o único ponto crítico.
Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de d' e da monotonia de d.

x	0		25	$+\infty$
$e^{-0.05t}$		$+$	$+$	$+$
$-1.25 + 0.05t$		$-$	0	$+$
$d'(t)$		$-$	0	$+$
d	0	$\searrow$	min	$\nearrow$ $\quad 0$



Podemos concluir que a distância é mínima quando $t = 25$. Corresponde portanto a 25 segundos após se ter iniciado o movimento.

Resolução da pergunta 25

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 8

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 26

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 9

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 27

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 10

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 28

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 10

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 29

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 10

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 30

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 11

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 31

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 11

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 32

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 11

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 33

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 12

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 34

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 12

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 35

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 12

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 38

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 13

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 37

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 13

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 36

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 12

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 39

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 14

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 40

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 14

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 41

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 14

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 42

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 14

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 43

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 14

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 44

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 15

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 45

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 15

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 46

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 16

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

46.1

46.2

Resolução da pergunta 47

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 16

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 49

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 17

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 48

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 17

Vídeos da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

48.1

48.2

Resolução da pergunta 50

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 18

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 51

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 18

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 53

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 19

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 52

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 18

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 54

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 19

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):