Assíntotas - Exames Nacionais

Perguntas de Exames Nacionais dos últimos 16 anos com resolução e/ou vídeo.
Versão de 4 de janeiro de 2022.
Verifique se existe versão com data mais recente aqui e aceda a mais fichas aqui.

1. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - e^{-x}}{x} & \text{se } x < 0 \\[2ex] \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais ao seu gráfico e, caso estas existam, escreva as respetivas equações.

Resolução, pg. 13 Exame Nacional de 2021 - 2.ª fase

2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.
Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = \dfrac{x^3}{2x^2 - \ln x}$.
Estude a função h quanto à existência de assíntota oblíqua ao seu gráfico e, caso esta exista, escreva a sua equação reduzida.

Resolução, pg. 12 Exame Nacional de 2021 - 1.ª fase

3. Seja f a função definida em $]-\infty, 2]$ por $f(x) = x + \ln(e^x + 1)$.
O gráfico de f tem uma assíntota oblíqua. Determine uma equação dessa assíntota.

Resolução, pg. 15 Exame nacional de 2020 - 1.ª fase

4. Seja h a função, de domínio $]-\infty, 4[$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} 1 + xe^{x-1} & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\operatorname{sen}(x-1)} & \text{se } 1 < x < 4 \end{cases}$$

Mostre que o gráfico da função h tem uma assíntota horizontal e apresente uma equação dessa assíntota.

Resolução, pg. 14

Exame nacional de 2020 - 2.ª fase

5. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, definida por $h(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$.
Estude a função h quanto à existência de assíntotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso existam, escreva as suas equações.

Resolução, pg. 16

Exame nacional de 2019 - 2.ª fase

6. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{x} + 2x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
Sabe-se que o gráfico da função g tem uma assíntota oblíqua.
Qual é o declive dessa assíntota?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** e **(D)** e^2

Resolução, pg. 17

Exame nacional de 2019 - 1.ª fase

7. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 + \dfrac{e^x}{1-x} & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{\ln(x^2) + 2}{x} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do seu gráfico.

Resolução, pg. 18

Exame nacional de 2018 - 2.ª fase

8. Considere a função f definida em $]0, \pi[$ por $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$.
Qual das equações seguintes define uma assíntota do gráfico da função f?

(A) $x = 0$ **(B)** $x = \pi$ **(C)** $x = 1$ **(D)** $x = \dfrac{\pi}{2}$

Resolução, pg. 19

Exame nacional de 2018 - 1.ª fase

9. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}^+$.
Sabe-se que a reta de equação $y = -x$ é assíntota oblíqua do gráfico de f e do gráfico de g.
Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x) \times g(x)}{x}$?

(A) $+\infty$ **(B)** 1 **(C)** -1 **(D)** $-\infty$

Resolução, pg. 20

Exame nacional de 2017 - 2.ª fase

10. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados.

Resolução, pg. 21

Exame nacional de 2016 - 2.ª fase

11. Considere a função f, de domínio $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, definida por $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.
Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

Resolução, pg. 22

Exame nacional de 2016 - 1.ª fase

12. Seja f a função, de domínio $\left]-\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right[$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2+\sin x}{\cos x} & \text{se } -\dfrac{\pi}{2} < x \leq 0 \\ x - \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Estude a função f quanto à existência de assíntota oblíqua do seu gráfico.

Resolução, pg. 23

Exame nacional de 2017 - 1.ª fase

13. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 1 + xe^x & \text{se } x \leq 3 \\ \ln(x-3) - \ln x & \text{se } x > 3 \end{cases}$

Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do seu gráfico.

Resolução, pg. 24

Exame nacional de 2015 - 2.ª fase

14. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1} & \text{se } x < \frac{1}{2} \\ (x+1)\ln x & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Averigue da existência de assíntotas verticais do gráfico da função f.

Resolução, pg. 25

Exame nacional de 2015 - 1.ª fase

15. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

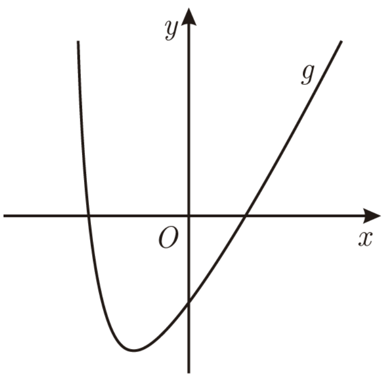
$$f(x) = \begin{cases} 3 + \dfrac{1 - e^{x-1}}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ -x + \ln x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do gráfico de f.

Resolução, pg. 27

Exame nacional de 2011 - 1.ª fase, Prova especial

16. Na figura, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função g, de domínio $]-3, +\infty[$.



A reta de equação $y = 2x - 4$ é assíntota do gráfico de g.
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-2x-4)=0$

(B) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{g(x)}=2$

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-2x+4)=0$

(D) $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-2x)=0$

Resolução, pg. 26

Exame nacional de 2011 - 1.ª fase

17. Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, contínua em todo o seu domínio.
Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$;
- $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=-2$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+2x)=0$.

Em qual das opções seguintes as equações definem duas assíntotas do gráfico de f?

(A) $x=-2$ e $y=1$

(B) $x=3$ e $y=-2x$

(C) $y=-2x$ e $y=1$

(D) $y=2x$ e $y=-1$

Resolução, pg. 28

Exame nacional de 2011 - Época especial

18. Considere a função f, de domínio $]0,+\infty[$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-3x}{x} & \text{se } 0<x\leq 2\\[2mm] \dfrac{1}{5}x-\ln x & \text{se } x>2\end{cases}$$

Estude a função f quanto à existência de assíntotas oblíquas.

Resolução, pg. 29

Exame nacional de 2010 - 2.ª fase

19. De uma função h, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- h é uma função par;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(h(x)-2x)=0$.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$?

(A) $+\infty$

(B) -2

(C) 0

(D) $-\infty$

Resolução, pg. 30

Exame nacional de 2010 - 2.ª fase

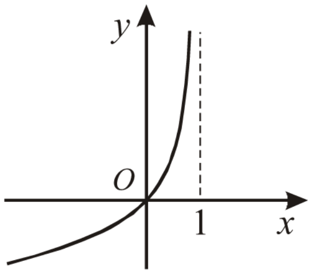
20. Considere a função f, de domínio $]-\infty, 2\pi]$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax + b + e^x & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{x - \operatorname{sen}(2x)}{x} & \text{se } 0 < x \leq 2\pi \end{cases}$$

Prove que a reta de equação $y = ax+b$, com $a \neq 0$, é uma assíntota oblíqua do gráfico de f.

Resolução, pg. 31 Exame nacional de 2010 - 1.ª fase

21. Na figura, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f, contínua, de domínio $]-\infty, 1[$.
Tal como a figura sugere, a reta de equação $x = 1$ é assíntota do gráfico de f.
Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{3x}{f(x)}$?



(A) $-\infty$ **(B)** 3 **(C)** 0 **(D)** $+\infty$

Resolução, pg. 32 Exame nacional de 2010 - 1.ª fase

22. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, e a reta de equação $y = -4$, assíntota do gráfico de h.
Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{1}{2x}\right)}{h(x)}$?

(A) $-\infty$ **(B)** $+\infty$ **(C)** -4 **(D)** 0

Resolução, pg. 33 Exame nacional de 2010 - Época especial

23. Seja uma função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, e seja a reta de equação $y = 1$ a única assíntota do gráfico de f.
Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x) + x$.
Prove que o gráfico de g tem uma assíntota oblíqua paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Resolução, pg. 34 Exame nacional de 2010 - Época especial

24. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

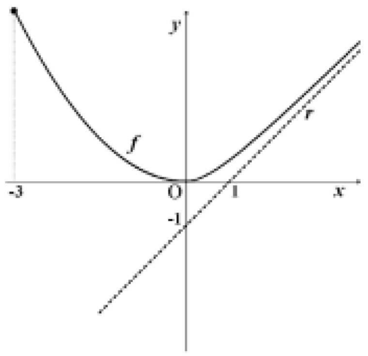
$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+4} & \text{se } x > 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{e^{2x}-1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Estude a função h quanto à existência de assíntotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso existam, escreva as suas equações.

Resolução, pg. 35

Exame nacional de 2009 - 2.ª fase

25. Na figura, estão representadas parte do gráfico de uma função f, de domínio $[-3, +\infty[$, e parte da reta r, que é a única assíntota do gráfico de f.



Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$?

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** 2

Resolução, pg. 36

Exame nacional de 2009 - 2.ª fase

26. Sejam f e g duas funções, ambas de domínio $\mathbb{R}^+$.
Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = 0$;
- a função g é definida por $g(x) = f(x) + x^2$.

Prove que o gráfico de g não tem assíntotas oblíquas.

Resolução, pg. 37

Exame nacional de 2009 - 1.ª fase

27. Seja f a função de domínio $[-\pi, +\infty[$, definida por:

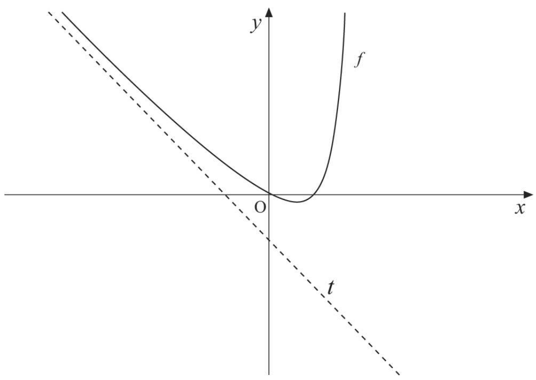
$$f(x) = \begin{cases} e^{-4x+1} & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{3\,\mathrm{sen}\,(x)}{x^2} & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados, escrevendo as suas equações, caso existam.

Resolução, pg. 38

Exame nacional de 2008 - 1.ª fase

28. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função f de domínio $]-\infty, 2[$.



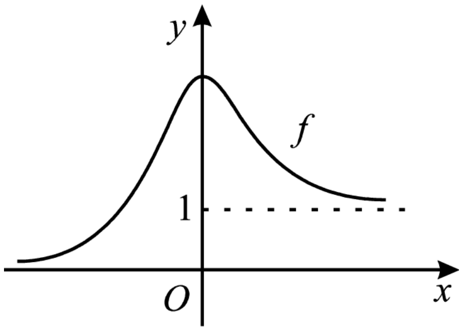
A reta t, de equação $y = -x - 1$, é assíntota do gráfico de f quando x tende para $-\infty$.
Qual é o valor do $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + x + 1)$?

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

Resolução, pg. 39

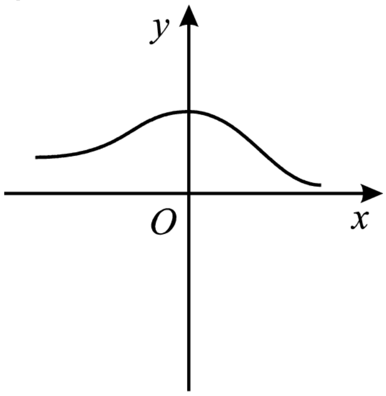
Exame nacional de 2008 - 1.ª fase

29. Na figura está parte da representação gráfica de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$.

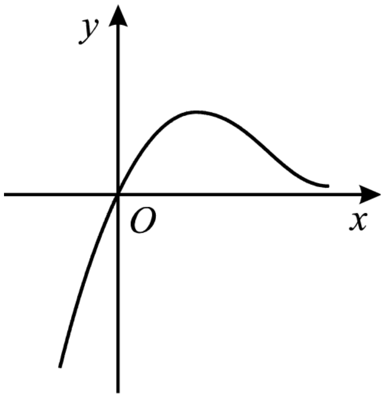


Tal como a figura sugere, o eixo Ox e a reta de equação $y = 1$ são assíntotas do gráfico de f.
Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \ln[f(x)]$.
Numa das opções seguintes está parte da representação gráfica da função g.
Em qual delas?

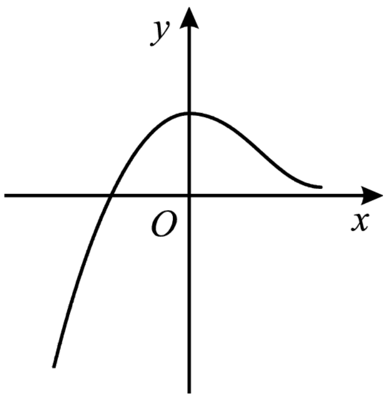
(A)



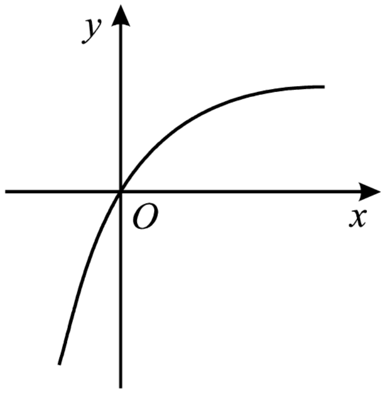
(B)



(C)



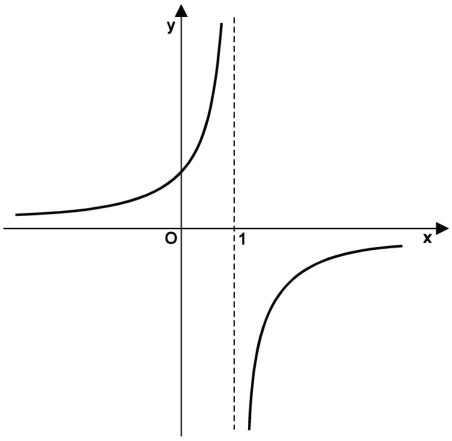
(D)



Resolução, pg. 41

Exame nacional de 2007 - 1.ª fase

30. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função g, real de variável real.



Tal como a figura sugere, a reta de equação $x = 1$ é assíntota do gráfico da função g.
Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $h(x) = x - 1$.
O valor do $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{h(x)}{g(x)}$ é:

(A) $-\infty$ **(B)** $+\infty$ **(C)** 0 **(D)** 1

Resolução, pg. 40 Exame nacional de 2007 - 2.ª fase

31. Seja f a função, de domínio $]1, +\infty[$, definida por $f(x) = x + x\ln(x-1)$.
Sem recorrer à calculadora, estude a função quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

Resolução, pg. 42 Exame nacional de 2006 - 2.ª fase

32. De uma certa função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- é contínua;
- a reta de equação $y = x$ é assíntota do gráfico de f, quer quando $x \to +\infty$ quer quando $x \to -\infty$.

Mostre que o gráfico da função g, definida, em $\mathbb{R}$, por $g(x) = xf(x)$, não tem qualquer assíntota.

Resolução, pg. 43 Exame nacional de 2006 - 1.ª fase

33. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln x} & \text{se } 0 < x < 1 \\ xe^{2-x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Sem recorrer à calculadora, estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

Resolução, pg. 44

Exame nacional de 2006 - 1.ª fase

Resoluções

Resolução da pergunta 2

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x^2-\ln x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2-\frac{\ln x}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2-\frac{\ln x}{x}\times\frac{1}{x}}$$
$$=\frac{1}{2-0\times 0}=\frac{1}{2}.$$

NOTA:
Limite notável $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(h(x)-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-\ln x}-\frac{1}{2}x\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x\ln x}{4x^2-\frac{2\ln x}{x^2}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{\ln x}{x}}{4x^2-\frac{\ln x}{x}\times\frac{2}{x}}$$
$$=\frac{-0}{4-0}=0.$$

Podemos concluir que $y=\dfrac{1}{2}x$ é a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de h.

Resolução da pergunta 1

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-e^{-x}}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{e^{-x}}{x}\right)$$
$$\overset{(1)}{=} 1+\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{y}}{y} = 1+\infty = +\infty.$$

(1) $y=-x \Leftrightarrow x=-y;\ x\to-\infty \Rightarrow y\to+\infty$.

Podemos concluir que o gráfico de f não admite assíntotas horizontais quando $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}-3\right)$$
$$\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}-3 = \frac{\sqrt{1+0}}{1+0}-3=-2.$$

Podemos concluir que a reta de equação $y=-2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x\to+\infty$.

Resolução da pergunta 4

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(1+xe^{x-1}\right) \overset{(0\times\infty)\star}{=} \lim_{y\to+\infty}\left(1-ye^{-y-1}\right)$$
$$= 1-\frac{1}{e}\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^y} = 1-\frac{1}{e}\frac{1}{\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y}} = 1-\frac{1}{e}\times\frac{1}{+\infty} = 1-0 = 1.$$

$\star$ Efetuou-se a mudança de variável $y=-x \Leftrightarrow x=-y$; $x\to-\infty \Rightarrow y\to+\infty$.

Podemos concluir que a reta de equação $y=1$ é assíntota horizontal do gráfico de h.

Resolução da pergunta 3

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1

Vídeo da resolução:

Como $D_f =]-\infty, 2]$ trata-se de uma assíntota quando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x + \ln(e^x + 1)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x} + \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(e^x+1)}{x} = 1 + \frac{\ln(e^{-\infty}+1)}{-\infty} = 1.$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to-\infty} (x + \ln(e^x + 1) - x) = \ln\left(e^{-\infty} + 1\right) = 0.$$

Podemos concluir que a reta de equação $y = x$ é a assíntota oblíqua do gráfico de f pretendida.

Resolução da pergunta 5

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

As assíntotas paralelas aos eixos coordenados são as assíntotas verticais e as assíntotas horizontais.
Assíntotas verticais:

Comecemos por notar que $D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Como
$\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e}{0^-} = -\infty$;
$\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e}{0^+} = +\infty$
então $x = 1$ é uma equação da assíntota vertical do gráfico de h. É a única pois h é contínua em D_h, por ser a divisão de funções contínuas.
Assíntotas horizontais:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} h(x) &= \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x-1} \\
&\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{e^x}{x} \times \frac{x}{x-1}\right] \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} \times \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x-1} \\
&= +\infty \times 1 = +\infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -\infty} h(x) &= \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x-1} \\
&= \frac{e^{-\infty}}{-\infty - 1} = \frac{0}{-\infty} = 0.
\end{aligned}$$

Podemos concluir que a reta de equação $y = 0$ é a única assíntota horizontal do gráfico de h.

Resolução da pergunta 6

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

O declive da assíntota oblíqua é dado por

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x}.$$

Como $h(x) = g(x) + 2x - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{e^{-x}}{x} + 2x - \frac{1}{\sqrt{x}}$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} &= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x^2} + 2 - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{0}{+\infty} + 2 - \frac{1}{+\infty} = 2. \end{aligned}$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(B)**.

Resolução da pergunta 7

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Comecemos por determinar as assíntotas do gráfico de f quando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} \left(3 + \frac{e^x}{1 - x} \right) = 3 + \frac{0}{1 - (-\infty)} = 3.$$

Podemos concluir que a reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal do gráfico de f.
Determinemos agora as assíntotas do gráfico de f quando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln\left(x^2\right) + 2}{x} \right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2 \ln x}{x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x}$$
$$= 0 + 0 = 0$$

Podemos concluir que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f.

Resolução da pergunta 8

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{x}{\sin x} = \frac{\pi}{0^+} = +\infty.$$

Podemos concluir que a reta de equação $x = \pi$ é assíntota do gráfico de f e que a opção correta é a **(B)**.

Resolução da pergunta 9

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

Do facto de $y = -x$ ser assíntota oblíqua do gráfico de f podemos deduzir que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

e que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Assim temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) \times g(x)}{x} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \times \lim_{x \to +\infty} g(x) \\ &= -1 \times (-\infty) = +\infty. \end{aligned}$$

A opção correta é a **(A)**.

Resolução da pergunta 10

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

Assíntotas verticais:
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 0^+}{0^+} = -\infty \times \frac{1}{0^+} = -\infty \times (+\infty)$
Logo, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de f. É a única pois f é contínua em $\mathbb{R}^+$ por ser o quociente de funções contínuas.

Assíntotas horizontais:
$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{(1)}{=} 0$
(1) Limite notável: $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$, para $p \in \mathbb{R}^+$.
Logo, a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f.

Resolução da pergunta 11

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

Como f é a composição das funções definidas por $y = \ln x$ e $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ que são contínuas nos seus domínios então f é contínua em $D_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.
Deste modo, os únicos pontos que podem originar assíntotas verticais são os pontos de abcissas -1 e 1.
Vamos por isso calcular os limites seguintes.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1^-} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{-2}{0-}\right)\\ &= \ln(+\infty) = +\infty.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{0^+}{1}\right) = \ln\left(0^+\right)\\ &= -\infty.\end{aligned}$$

Podemos concluir que as retas de equações $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas verticais do gráfico de f.
São as únicas pois f é contínua em D_f.

Resolução da pergunta 12

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

Como o domínio de f é $\left]-\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$ então só temos que estudar a existência de assíntota oblíqua quando $x \to +\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x - \ln x}{x}$
  $= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = 1 - 0 = 1;$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-\ln x) = -\infty.$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$ não é um número real podemos concluir que o gráfico de f não admite assíntotas oblíquas.

Resolução da pergunta 13

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

De acordo com a definição de assíntota horizontal, o gráfico de f admite a reta de equação $y = b$ como assíntota horizontal se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.
Comecemos com o estudo da existência de assíntotas horizontais quando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (1 + xe^x) \overset{(\infty\times 0)}{=} \star$$

Como obtivemos um símbolo de indeterminação, vamos efetuar a mudança de variável $y = -x \Leftrightarrow x = -y$ e utilizar o limite notável $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$).

$$\star = 1 + \lim_{y\to+\infty} \frac{-y}{e^y} = 1 - \frac{1}{\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y}} = 1 - \frac{1}{+\infty} = 1.$$

Podemos concluir que $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico de f.
Prosseguimos com o estudo da existência de assíntotas horizontais quando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\ln(x-3) - \ln x) \overset{(\infty-\infty)}{=}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\ln \frac{x-3}{x}\right) = \ln\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x-3}{x}\right) = \ln 1 = 0.$$

Podemos concluir que $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f.
Em suma, $y = 0$ e $y = 1$ são as assíntotas horizontais do gráfico de f.

Resolução da pergunta 14

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

Como para $x < \dfrac{1}{2}$ a função f está definida pelo quociente de funções contínuas então é contínua em $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$.

Para $x > \dfrac{1}{2}$ a função está definida pelo produto de funções contínuas. Consequentemente f é contínua em $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

Resta-nos estudar a continuidade no ponto de abcissa $\dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) &= \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x-\frac{1}{2}\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{2}}\left(e^{x-\frac{1}{2}}-1\right)}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim_{x-\frac{1}{2}\to 0^-} \frac{e^{x-\frac{1}{2}}-1}{x-\frac{1}{2}} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}.\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \left((x+1)\ln x\right) = \left(\frac{1}{2}+1\right)\ln\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\ln\frac{1}{2}.$$

Deste modo, como $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)$ então f não é contínua no ponto $\dfrac{1}{2}$.

Como os limites laterais no ponto $\frac{1}{2}$ são finitos então a reta de equação $x = \frac{1}{2}$ não é assíntota vertical do gráfico de f.

Podemos também concluir que, como f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$, o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

Resolução da pergunta 16

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 15

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 17

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 18

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 19

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 20

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 21

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 22

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 23

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 24

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 7

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 25

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 7

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 26

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 8

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 27

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 8

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 28

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 8

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 30

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 10

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 29

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 9

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 31

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 10

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 32

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 10

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 33

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 11

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):