



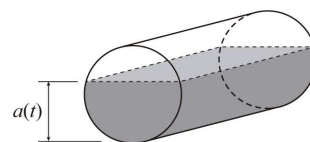
Matemática do 10.º e do 11.º - Exames

Perguntas de Exames Nacionais dos últimos 16 anos com resolução e/ou vídeo.
Versão de 9 de janeiro de 2022.
Verifique se existe versão com data mais recente [aqui](#) e aceda a mais fichas [aqui](#).

1. A figura representa um depósito de forma cilíndrica, instalado na horizontal, que contém uma certa quantidade de combustível. Sabe-se que as bases do cilindro têm 1,8 metros de diâmetro.

Num certo instante, iniciou-se o vazamento do depósito. Seja $a(t)$ a altura, em metros, do combustível no depósito, t minutos após o início do vazamento.

Admita que $a(t) = 1,8 - (0,216 + 0,0039t)^{\frac{2}{3}}$.



- 1.1. Qual é, em metros, a diferença entre a altura do combustível no depósito no início do vazamento e a altura do combustível quando este ocupa metade da capacidade do depósito?

(A) 0,72

(B) 0,54

(C) 0,36

(D) 0,27

- 1.2. Decorridos t_1 minutos após o início do vazamento, a altura do combustível no depósito é igual a um certo valor.

Sabe-se que, passado igual período de tempo, a altura do combustível no depósito é igual a metade desse valor.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de t_1 , sabendo que esse valor existe e é único.

Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

— apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

— reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Resolução, pg. 34

Exame nacional de 2021 - 1.^a fase

2. Seja (u_n) uma progressão aritmética.

Sabe-se que, relativamente a (u_n) , a soma do sexto termo com o vigésimo é igual a -5 e que o décimo nono termo é igual ao quádruplo do sétimo termo.

Determine a soma dos dezassex primeiros termos desta progressão.

Resolução, pg. 35

Exame nacional de 2021 - 2.^a fase

3. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Determine, sem recorrer à calculadora, quantos termos de ordem ímpar da sucessão (u_n) pertencem ao intervalo $\left[\frac{83}{41}, \frac{67}{33}\right]$.

Resolução, pg. 36

Exame nacional de 2021 - 1.^a fase

4. Seja (u_n) uma progressão geométrica.

Sabe-se que $v_5 = 4$ e que $v_8 = 108$.

Qual é o valor de v_6 ?

(A) 12

(B) 24

(C) 48

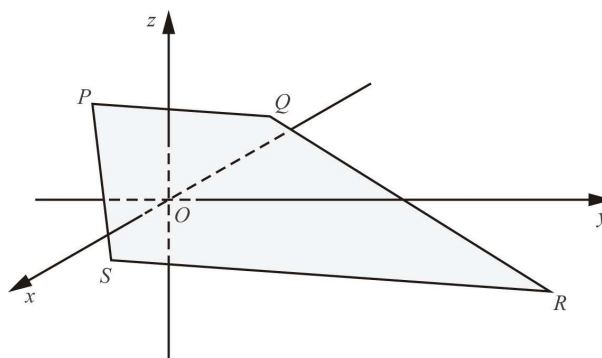
(D) 60

Resolução, pg. 37

Exame nacional de 2021 - 1.^a fase

5. Na figura, está representado, num referencial o.n. Oxyz, um trapézio $[PQRS]$, de bases $[PQ]$ e $[RS]$, em que o lado $[PS]$ é perpendicular às bases.

Tem-se $P(1, -1, 2)$, $Q(-2, 1, 1)$ e $R(-5, 5, -3)$.



5.1. Qual das condições seguintes define a superfície esférica de centro no ponto R e que passa no ponto Q ?

(A) $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 + (z - 3)^2 = 59$

(B) $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 + (z - 3)^2 = 41$

(C) $(x + 5)^2 + (y - 5)^2 + (z + 3)^2 = 41$

(D) $(x + 5)^2 + (y - 5)^2 + (z + 3)^2 = 59$

5.2. Determine uma equação do plano perpendicular à reta RS e que passa no ponto P . Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$.

Resolução, pg. 38

Exame nacional de 2021 - 2.^a fase

6. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao eixo Ox e o vértice B pertence ao eixo Oy ;
- as coordenadas dos vértices E e G são $(7, 2, 15)$ e $(6, 10, 13)$, respetivamente;
- a reta EF é definida pela equação $(x, y, z) = (1, -2, 19) + k(-3, -2, 2)$, $k \in \mathbb{R}$.

6.1. Qual das equações seguintes define uma reta perpendicular à reta EF e que passa no ponto E ?

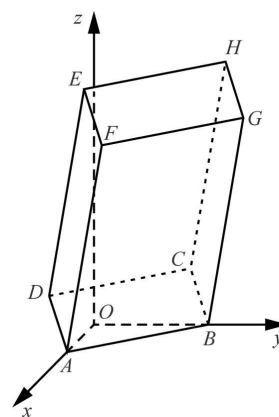
(A) $(x, y, z) = (7, -3, 3) + k(2, -3, 0)$, $k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y, z) = (7, 2, 15) + k(0, 3, -3)$, $k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y, z) = (7, -10, 3) + k(0, 3, 3)$, $k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z) = (7, 2, 15) + k(2, 0, -3)$, $k \in \mathbb{R}$

6.2. Determine, sem recorrer à calculadora, a equação reduzida da superfície esférica de centro no ponto B e que passa no ponto D .



Resolução, pg. 39

Exame nacional de 2021 - 1.^a fase

7. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$ (o ponto H não está representado na figura). Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(7, 1, 4)$;
- o ponto G tem coordenadas $(5, 3, 6)$;
- a reta AE é definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (7, 1, 4) + k(3, -6, 2), k \in \mathbb{R}$.

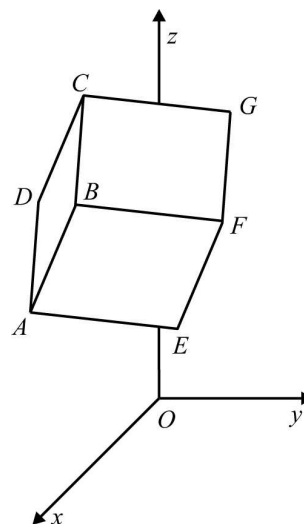
Resolva os itens 7.1. e 7.2. sem recorrer à calculadora.

- 7.1. Determine uma equação do plano EFG .

Apresente essa equação na forma

$$ax + by + cz + d = 0.$$

- 7.2. Determine a equação reduzida da superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo.



Resolução, pg. 40

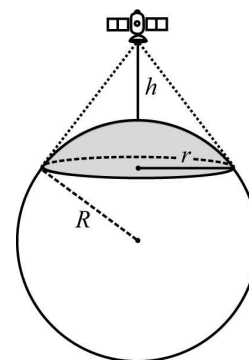
Exame nacional de 2020 - 2.ª fase

8. Os satélites artificiais são utilizados para diversos fins e a altitude a que são colocados depende do fim a que se destinam. Admita que a Terra é uma esfera.

A Figura 2 apresenta um esquema em que se pode observar a superfície terrestre coberta por um satélite, quando este se encontra numa certa posição.

Nesta figura,

- R é o raio, em quilómetros, da Terra;
- h é a altitude, em quilómetros, do satélite ($h > 0$);
- r é o raio, em quilómetros, da base da calote esférica cuja superfície é coberta pelo satélite ($0 < r < R$);
- as grandezas h e r podem relacionar-se por meio da igualdade $r = \frac{R}{h+R} \sqrt{h^2 + 2hR}$.



Sabe-se que, para cada posição do satélite, a percentagem da área da superfície terrestre coberta pelo satélite é dada por $50 \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2} \right)$.

- 8.1 Qual é a percentagem da área da superfície terrestre coberta por um satélite se o raio da base da calote esférica for igual a $\frac{3}{5}$ do raio da Terra?

(A) 20%

(B) 15%

(C) 10%

(D) 5%

- 8.2 Considere que o raio da Terra é 6400 km .

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a percentagem da área

da superfície terrestre coberta por um satélite se a altitude deste for igual ao raio da base da respetiva calote esférica.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;
- apresente o valor pedido arredondado às unidades.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Resolução, pg. 41

Exame nacional de 2020 - 2.ª fase

9. Seja (v_n) a sucessão definida por

$$v_n = \begin{cases} n & \text{se } n < 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{se } n \geq 10 \end{cases}$$

(A) A sucessão (v_n) tem limite nulo.

(B) A sucessão (v_n) é divergente.

(C) A sucessão (v_n) é limitada.

(D) A sucessão (v_n) é monótona.

Resolução, pg. 42

Exame nacional de 2020 - 2.ª fase

10. De uma progressão aritmética (u_n) sabe-se que o sétimo termo é igual ao dobro do segundo e que a soma dos doze primeiros termos é igual a 57.

Sabe-se ainda que 500 é termo da sucessão (u_n) .

Determine a ordem deste termo.

Resolução, pg. 43

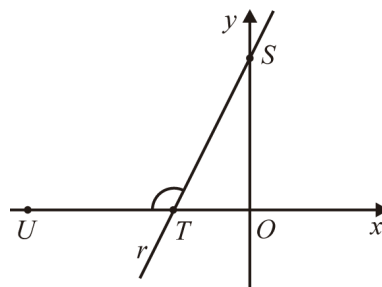
Exame nacional de 2020 - 2.ª fase

11. Na figura, estão representados, num referencial o.n. xOy , os pontos S , T e U e a reta r de equação $y = 2x + 4$.

Sabe-se que:

- os pontos S e T são, respetivamente, os pontos de intersecção da reta r com os eixos Oy e Ox ;
- o ponto U pertence ao eixo Ox e tem abcissa inferior à do ponto T

Qual dos valores seguintes é o valor, aproximado às centésimas, da amplitude, em radianos, do ângulo STU ?



(A) 4,25

(B) 2,68

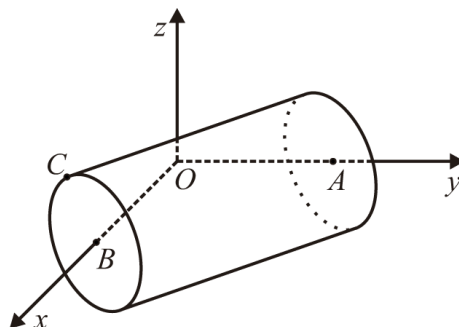
(C) 2,03

(D) 1,82

Resolução, pg. 44

Exame nacional de 2020 - 1.^a fase

12. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cilindro reto.



Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Oy e é o centro de uma das bases do cilindro, e o ponto B pertence ao eixo Ox e é o centro da outra base;
- o ponto C pertence à circunferência de centro B que delimita uma das bases do cilindro;
- o plano ABC é definido pela equação $3x + 4y + 4z - 12 = 0$.

Resolva os itens 12.1. e 12.2. sem recorrer à calculadora.

12.1. Determine $\overline{BC}$, sabendo que o volume do cilindro é igual a 10π .

12.2. Seja P o ponto de coordenadas $(3, 5, 6)$.

Determine as coordenadas do ponto do plano ABC que se encontra mais próximo do ponto P .

Resolução, pg. 45

Exame nacional de 2020 - 1.^a fase

13. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \frac{8n - 4}{n + 1}$.

Estude a sucessão (u_n) quanto à monotonia.

Resolução, pg. 46

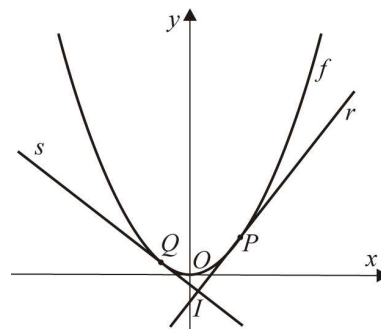
Exame nacional de 2020 - 1.^a fase

14. Na figura, está representado o gráfico da função f , definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = x^2$.

Considere que um ponto P , de abscissa positiva, se desloca sobre o gráfico da função f .

Para cada posição do ponto P , seja:

- r a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto;
- s a reta perpendicular a r e tangente ao gráfico de f ;
- Q o ponto de tangência da reta s com o gráfico de f ;
- I o ponto de intersecção das retas r e s .



Mostre que, qualquer que seja a abcissa do ponto P , a ordenada do ponto I é sempre igual a $-\frac{1}{4}$.

Sugestão: Designe a abcissa do ponto P por a .

[Resolução, pg. 47](#)

Exame nacional de 2019 - 2.^a fase

15. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta r definida por

$$x = 1 + 2k \wedge y = 3 - 4k \wedge z = k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Qual dos seguintes vetores pode ser um vetor diretor de uma reta perpendicular à reta r ?

- (A) $\vec{a}(2, 4, 1)$
- (B) $\vec{b}(-3, 1, 0)$
- (C) $\vec{c}(1, 1, 2)$
- (D) $\vec{d}(-4, 2, 0)$

[Resolução, pg. 48](#)

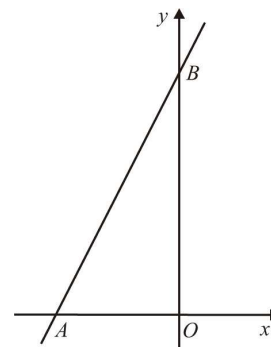
Exame nacional de 2019 - 2.^a fase

16. Na figura, está representada, num referencial o.n. xOy , a reta AB . Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo negativo Ox e o ponto B pertence ao semieixo positivo Oy ;
- a reta AB tem equação $y = 2x + 4$.

Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$.
Quais são as coordenadas do ponto M ?

- (A) $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$
- (B) $(-1, 2)$
- (C) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$
- (D) $(-2, 4)$



[Resolução, pg. 49](#)

Exame nacional de 2019 - 2.^a fase

17. Qual é o valor de $\sin\left(3 \arccos \frac{1}{2}\right)$?

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(C) 0

(D) 1

Resolução, pg. 50

Exame nacional de 2019 - 2.^a fase

18. Sejam a e b dois números reais diferentes de zero.

Sabe-se que 2, a e b são três termos consecutivos de uma progressão geométrica.

Sabe-se ainda que $a - 2$, b e 2 são três termos consecutivos de uma progressão aritmética.

Determine a e b .

Resolução, pg. 51

Exame nacional de 2019 - 2.^a fase

19. De um triângulo, sabe-se que os comprimentos dos seus lados são 4, 5 e 6.

Seja α a amplitude do maior ângulo interno desse triângulo.

Qual é o valor de $\sin \alpha$, arredondado às milésimas?

(A) 0.989

(B) 0.992

(C) 0.995

(D) 0.998

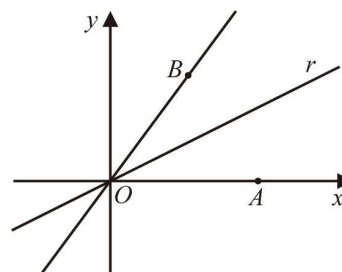
Resolução, pg. 52

Exame nacional de 2019 - 2.^a fase

20. Na figura, estão representados, num referencial o.n. xOy , os pontos A e B , de abscissas positivas, e as retas OB e r .

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Ox ;
- a reta OB é definida pela equação $y = \frac{4}{3}x$;
- a reta r contém a bissetriz do ângulo AOB .



Determine a equação reduzida da reta r .

Resolução, pg. 54

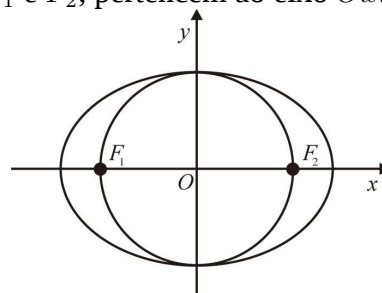
Exame nacional de 2019 - 1.^a fase

21. Na figura, estão representados, num referencial o.n. xOy , uma elipse e um círculo, ambos centrados na origem do referencial. Os focos da elipse, F_1 e F_2 , pertencem ao eixo Ox .

Sabe-se que:

- a distância focal e o eixo menor da elipse são iguais ao diâmetro do círculo;
- a área do círculo é igual a 9π .

Qual das equações seguintes é a equação reduzida da elipse?



(A) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$

(C) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{20} = 1$

Resolução, pg. 56

(B) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{9} = 1$

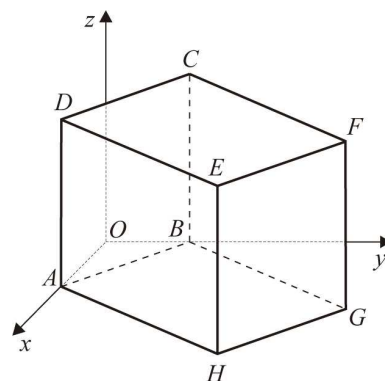
(D) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1$

Exame nacional de 2019 - 1.ª fase

22. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao eixo Ox e o vértice B pertence ao eixo Oy ;
- o vértice C tem coordenadas $(0, 3, 6)$ e o vértice G tem coordenadas $(6, 11, 0)$;
- o plano ABC é definido pela equação $3x + 4y - 12 = 0$.



22.1 Determine o volume do paralelepípedo $[ABCDEFGH]$.

22.2 Seja P o ponto de coordenadas $(1, -4, 3)$, e seja r a reta que passa pelo ponto P e é perpendicular ao plano ABC .

Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o plano ABC .

Resolução, pg. 53

Exame nacional de 2019 - 2.ª fase

23. Qual é a solução da equação $2 \cos x + 1 = 0$ no intervalo $[-\pi, 0]$?

(A) $-\frac{5\pi}{6}$

(B) $-\frac{2\pi}{3}$

(C) $-\frac{\pi}{3}$

(D) $-\frac{\pi}{6}$

Resolução, pg. 55

Exame nacional de 2019 - 1.ª fase

24. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os planos α , β e γ , definidos pelas equações $x + y + z = 1$, $2x + 2y + 2z = 1$ e $x + y = 0$, respetivamente.

A intersecção dos planos α , β e γ é

(A) o conjunto vazio

(B) um ponto

(C) uma reta

(D) um plano

Resolução, pg. 57

Exame nacional de 2019 - 1.ª fase

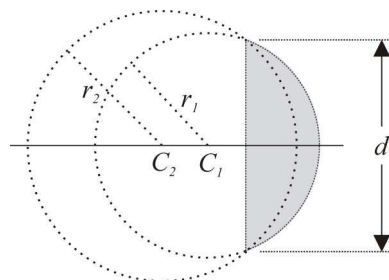
25. Uma lente de contato é um meio transparente limitado por duas faces, sendo cada uma delas parte de uma superfície esférica. Na figura, pode observar-se uma lente de contato.



Na figura em baixo, está representado um corte longitudinal de duas superfícies esféricas, uma de centro C_1 e raio r_1 e outra de centro C_2 e raio r_2 , com $r_2 > r_1$, que servem de base à construção de uma lente de contato, representada a sombreado na figura.

Seja $x = C_1C_2$. Sabe-se que o diâmetro, d , da lente é dado por

$$\frac{\sqrt{[(r_1 + r_2)^2 - x^2] [x^2 - (r_1 - r_2)^2]}}{x},$$



com $r_2 - r_1 < x < \sqrt{r_2^2 - r_1^2}$.

Uma lente de contato foi obtida a partir de duas superfícies esféricas com 7 mm e 8 mm de raio, respetivamente.

O diâmetro dessa lente excede em 9 mm a distância, x , entre os centros das duas superfícies esféricas.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de x , sabendo-se que esse valor é único no intervalo $]r_2 - r_1, \sqrt{r_2^2 - r_1^2}[$.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor pedido em milímetros, arredondado às décimas.

[Resolução, pg. 58](#)

Exame nacional de 2019 - 1.^a fase

26. Seja r um número real maior do que 1.

Sabe-se que r é a razão de uma progressão geométrica de termos positivos.

Sabe-se ainda que, de dois termos consecutivos dessa progressão, a sua soma é igual a 12 e a diferença entre o maior e o menor é igual a 3.

Determine o valor de r .

[Resolução, pg. 59](#)

Exame nacional de 2019 - 1.^a fase

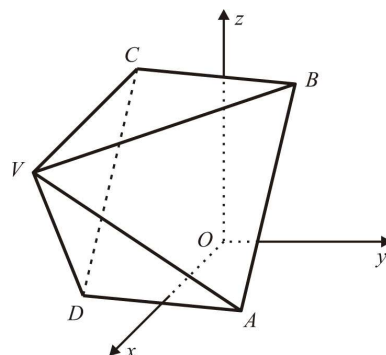
27. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os planos α, β e γ definidos pelas equações $y = -x$, $y = z$ e $2x + 3y - z - 1 = 0$, respetivamente.
A intersecção dos planos α, β e γ é

(A) um ponto (B) uma reta (C) um plano (D) o conjunto vazio

[Resolução, pg. 60](#)

Exame nacional de 2018 - 2.ª fase

28. Na figura, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$.
Os vértices A e C têm coordenadas $(2, 1, 0)$ e $(0, -1, 2)$, respetivamente.
O vértice V tem coordenadas $(3, -1, 2)$.



- 28.1 Determine a amplitude do ângulo VAC .
Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.
Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.
- 28.2 Determine uma equação do plano que contém a base da pirâmide.
Apresente a equação na forma $ax + by + cz + d = 0$.

[Resolução, pg. 61](#)

Exame nacional de 2019 - 1.ª fase

29. Considere, num referencial o.n. xOy , a circunferência centrada na origem do referencial e que passa no ponto $A(2, 1)$.
Seja r a reta tangente à circunferência no ponto A .
Qual é a ordenada na origem da reta r ?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

[Resolução, pg. 62](#)

Exame nacional de 2018 - 2.ª fase

30. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 10.$$

- 30.1 Seja P o ponto da superfície esférica de abscissa 1, ordenada 3 e cota negativa.
Seja r a reta de equação vetorial $(x, y, z) = (-1, 0, 3) + k(4, 1, -2)$, $k \in \mathbb{R}$. Determine uma equação do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta r .
Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$.
- 30.2 Seja C o centro da superfície esférica e seja A o simétrico do ponto C relativamente ao plano xOy . Determine a amplitude do ângulo AOC .
Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Resolução, pg. 66

Exame nacional de 2018 - 2.ª fase

31. Qual é o valor de $\arcsin(1) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$?

(A) $\frac{7\pi}{6}$

(B) $\frac{\pi}{6}$

(C) $\frac{3\pi}{4}$

(D) $\frac{\pi}{4}$

Resolução, pg. 64

Exame nacional de 2018 - 1.ª fase

32. De uma progressão aritmética (u_n) sabe-se que o terceiro termo é igual a 4 e que a soma dos doze primeiros termos é igual a 174. Averigue se 5371 é termo da sucessão (u_n) .

Resolução, pg. 65

Exame nacional de 2018 - 2.ª fase

33. Considere, num referencial o.n. xOy , uma elipse centrada na origem do referencial e de focos F_1 e F_2 pertencentes ao eixo Ox .

Sabe-se que:

- $\overline{F_1 F_2} = 12$;
- sendo P um ponto qualquer da elipse, tem-se $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 20$.

Qual é a equação reduzida desta elipse?

(A) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$

(B) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

(C) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

(D) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$

Resolução, pg. 63

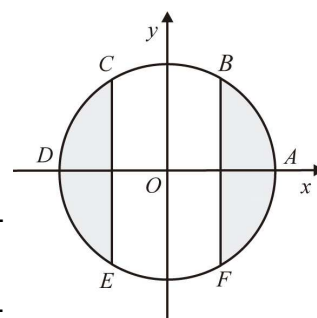
Exame nacional de 2018 - 2.ª fase

34. Na figura, está representada, num referencial o.n. xOy , uma circunferência de centro na origem e que passa nos pontos A, B, C, D, E e F .

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox e tem abcissa igual a 2;
- os pontos B e F têm ambos abcissa igual a 1;
- os pontos C, D e E são, respetivamente, os simétricos dos pontos B, A e F relativamente ao eixo Oy .

Qual das condições seguintes define o domínio plano representado a sombreado?



(A) $x^2 + y^2 \leq 2 \wedge |x| \geq 1$

(B) $x^2 + y^2 \leq 4 \wedge |x| \leq 1$

(C) $x^2 + y^2 \leq 4 \wedge |x| \geq 1$

(D) $x^2 + y^2 \leq 2 \wedge |x| \leq 1$

[Resolução, pg. 69](#)

Exame nacional de 2018 - 1.ª fase

35. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta r definida pela condição

$$x + 1 = 2\lambda \wedge y = 2 - \lambda \wedge z = 3, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Qual das seguintes equações vetoriais define a reta r ?

(A) $(x, y, z) = (3, 0, 3) + k(2, -1, 0), k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y, z) = (3, 0, 3) + k(2, -1, 3), k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y, z) = (-1, 2, 0) + k(2, -1, 3), k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z) = (-1, 2, 0) + k(2, -1, 0), k \in \mathbb{R}$

[Resolução, pg. 68](#)

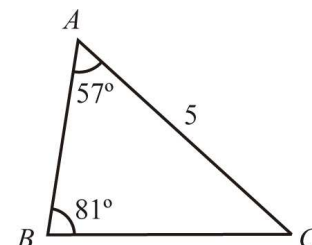
Exame nacional de 2018 - 1.ª fase

36. Na figura, está representado um triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- $\overline{AC} = 5$;
- $\hat{BAC} = 57^\circ$;
- $\hat{ABC} = 81^\circ$.

Qual é o valor de $\overline{AB}$, arredondado às centésimas?



(A) 3.31

(B) 3.35

(C) 3.39

(D) 3.43

[Resolução, pg. 67](#)

Exame nacional de 2018 - 2.ª fase

37. Seja a um número real.

Sabe-se que a , $a + 6$ e $a + 18$ são três termos consecutivos de uma progressão geométrica. Relativamente a essa progressão geométrica, sabe-se ainda que a soma dos sete primeiros termos é igual a 381.

Determine o primeiro termo dessa progressão.

[Resolução, pg. 70](#)

Exame nacional de 2018 - 1.ª fase

38. Seja $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função tal que $f'(x) < 0$, para qualquer número real positivo x . Considere, num referencial o.n. xOy ,

- um ponto P , de abcissa a , pertencente ao gráfico de f ;
- a reta r , tangente ao gráfico de f no ponto P ;
- o ponto Q , ponto de intersecção da reta r com o eixo Ox .

Sabe-se que $\overline{OP} = \overline{PQ}$.

Determine o valor de $f'(a) + \frac{f(a)}{a}$.

Resolução, pg. 73

Exame nacional de 2017 - 2.ª fase

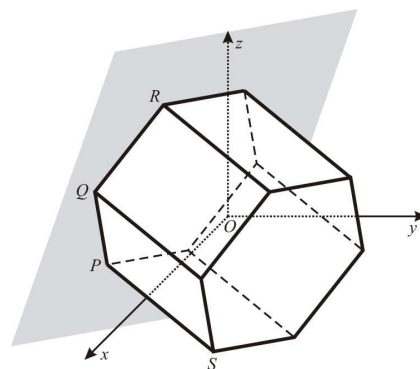
39. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma hexagonal regular. Sabe-se que:

- $[PQ]$ e $[QR]$ são arestas de uma das bases do prisma;
- $\overline{PQ} = 4$.

39.1 Determine o produto escalar $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}$.

39.2 Sabe-se ainda que:

- o plano PQR tem equação $2x + 3y - z - 15 = 0$;
- uma das arestas laterais do prisma é o segmento de reta $[PS]$, em que S é o ponto de coordenadas $(14, 5, 0)$.



Determine a área lateral do prisma, apresentando o resultado arredondado às décimas. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Resolução, pg. 71

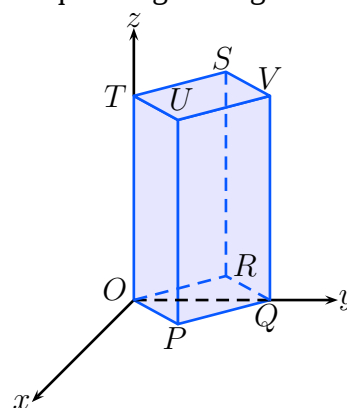
Exame nacional de 2018 - 1.ª fase

40. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[OPQRSTUV]$.

Sabe-se que:

- a face $OPQR$ está contida no plano xOy ;
- o vértice Q pertence ao eixo Oy e o vértice T pertence ao eixo Oz ;
- o plano STU tem equação $z = 3$.

Seja T' o simétrico do ponto T , relativamente à origem do referencial.



40.1 Escreva uma equação da superfície esférica de diâmetro TT' .

40.2 Determine o valor do produto escalar $\overrightarrow{UP} \cdot \overrightarrow{RS}$.

40.3 Uma equação do plano PQV é $x + y = 2$.
Determine uma condição que defina a reta TQ .

[Resolução, pg. 74](#)

Exame nacional de 2017 - 2.ª fase

41. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = \begin{cases} n & \text{se } n \leq 20 \\ (-1)^n & \text{se } n > 20. \end{cases}$
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) A sucessão (u_n) é monótona crescente
- (B) A sucessão (u_n) é monótona decrescente
- (C) A sucessão (u_n) é limitada
- (D) A sucessão (u_n) é um infinitamente grande

[Resolução, pg. 75](#)

Exame nacional de 2017 - 2.ª fase

42. Considere, num referencial o.n. xOy , uma reta r de inclinação α .
Sabe-se que $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.
Qual pode ser a equação reduzida da reta r ?

- (A) $y = -5x$
- (B) $y = 4x$
- (C) $y = -2x$
- (D) $y = 3x$

[Resolução, pg. 76](#)

Exame nacional de 2017 - 2.ª fase

43. Seja f a função, de domínio A e contradomínio $] -1, +\infty[$, definida por $f(x) = \tan x$.
Qual dos conjuntos seguintes pode ser o conjunto A ?

- (A) $\left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[$
- (B) $\left] \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right[$
- (C) $\left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right[$
- (D) $\left] \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right[$

[Resolução, pg. 77](#)

Exame nacional de 2017 - 2.ª fase

44. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α definido pela equação

$$3x + 2y + 4z - 12 = 0.$$

44.1 Seja C o ponto de coordenadas $(2, 1, 4)$.

Escreva uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano α que passa no ponto C .

44.2 Seja D o ponto de coordenadas $(4, 2, 2)$.

Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta OD com o plano α .

- 44.3** Sejam A e B os pontos pertencentes ao plano α , tais que A pertence ao semieixo positivo Ox e B pertence ao semieixo positivo Oy .
Seja P um ponto com cota diferente de zero e que pertence ao eixo Oz .
Justifique, recorrendo ao produto escalar de vetores, que o ângulo APB é agudo.

Resolução, pg. 78

Exame nacional de 2017 - 1.^a fase

- 45.** De uma progressão geométrica (u_n) , monótona crescente, sabe-se que $u_4 = 32$ e que $u_8 = 8192$.
Qual é o quinto termo da sucessão (u_n) ?

(A) 64

(B) 128

(C) 256

(D) 512

Resolução, pg. 79

Exame nacional de 2017 - 1.^a fase

- 46.** Considere, num referencial o.n. xOy , o quadrado definido pela condição

$$0 \leq x \leq 4 \wedge 1 \leq y \leq 5.$$

Qual das condições seguintes define a circunferência inscrita neste quadrado?

(A) $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 16$

(B) $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 4$

(C) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$

(D) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$

Resolução, pg. 80

Exame nacional de 2017 - 1.^a fase

- 47.** Considere o desenvolvimento de $\left(2x \sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{x}\right)^2$.
Determine os valores de α , pertencentes ao intervalo $]\pi, 2\pi[$, para os quais o termo independente de x , neste desenvolvimento, é igual a 1.
Resolva este item recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Resolução, pg. 81

Exame nacional de 2016 - 2.^a fase

- 48.** Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}$.
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

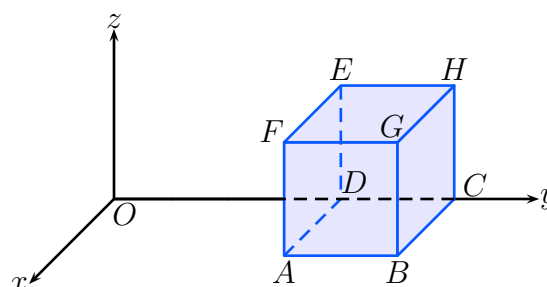
- (A) A sucessão (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$
- (B) A sucessão (u_n) é uma progressão geométrica de razão 2
- (C) A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$
- (D) A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão 2

[Resolução, pg. 83](#)

Exame nacional de 2016 - 2.ª fase

49. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$. Sabe-se que:

- a face $[ABCD]$ está contida no plano xOy
- a aresta $[CD]$ está contida no eixo Oy
- o ponto D tem coordenadas $(0, 4, 0)$
- o plano ACG é definido pela equação $x + y - z - 6 = 0$



49.1 Verifique que o vértice A tem abscissa igual a 2.

49.2 Seja r a reta definida pela condição $(x, y, z) = (1, 1, 0) + k(1, -1, 1)$, $k \in \mathbb{R}$. Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o plano ACG .

49.3 Seja P o vértice de uma pirâmide regular de base $[EFGH]$. Sabe-se que:

- a cota do ponto P é superior a 2
- o volume da pirâmide é 4

Determine a amplitude do ângulo OGP .

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

[Resolução, pg. 82](#)

Exame nacional de 2016 - 2.ª fase

50. Considere, num referencial o.n. xOy , a região definida pela condição

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 1 \wedge x + y + 2 \geq 0.$$

Qual é o perímetro dessa região?

- (A) $\pi + 1$ (B) $\frac{\pi}{2} + 1$ (C) $\pi + 2$ (D) $\frac{\pi}{2} + 2$

[Resolução, pg. 84](#)

Exame nacional de 2016 - 2.ª fase

51. Na figura, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$.

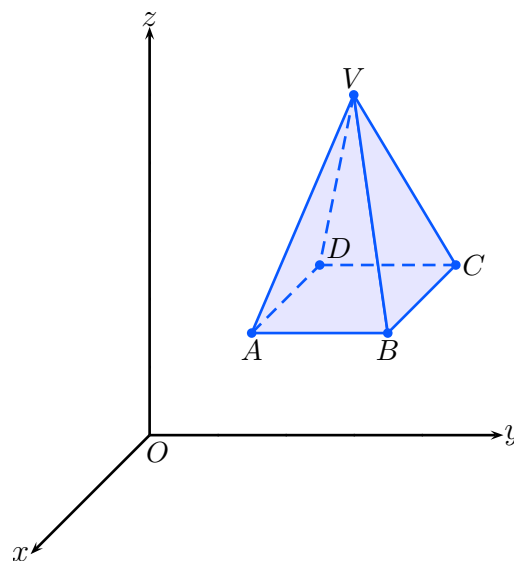
Sabe-se que:

- a base $[ABCD]$ da pirâmide é paralela ao plano xOy
- o ponto A tem coordenadas $(-1, 1, 1)$
- o ponto C tem coordenadas $(-3, 3, 1)$
- o plano BCV é definido pela equação $3y + z - 10 = 0$

51.1 Escreva uma condição que defina a superfície esférica de centro no ponto A e que é tangente ao plano xOy .

51.2 Determine as coordenadas do ponto V .

51.3 Seja α o plano perpendicular à reta AC e que passa no ponto $P(1, -2, -1)$. A intersecção dos planos α e BCV é uma reta. Escreva uma equação vetorial dessa reta.



Resolução, pg. 86

Exame nacional de 2016 - 1.^a fase

52. Na Figura 1, está representado o gráfico de uma função f , de domínio $[-1, 6]$, e, na Figura 2, está representada parte do gráfico de uma função g , de domínio $\mathbb{R}$. Tal como as figuras sugerem, em ambas as funções, todos os objetos inteiros têm imagens inteiras.

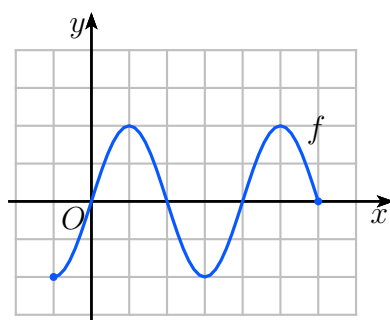


Figura 1

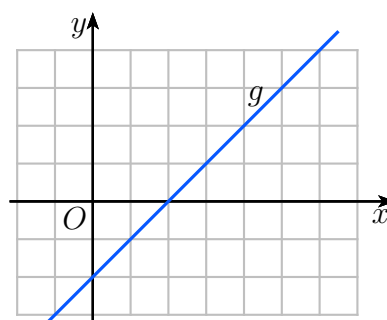


Figura 2

Quais são os zeros da função $g \circ f$? (o símbolo $\circ$ designa a composição de funções)

(A) 0 e 4

(B) 1 e 5

(C) -1 e 3

(D) 2 e 6

Resolução, pg. 85

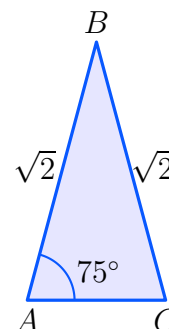
Exame nacional de 2016 - 2.^a fase

53. Na figura, está representado um triângulo isósceles ABC . Sabe-se que:

- $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{2}$
- $\widehat{BAC} = 75^\circ$

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$?

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$
(C) $\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt{3}$



[Resolução, pg. 87](#)

Exame nacional de 2016 - 1.ª fase

54. Considere, num referencial o.n. xOy , a circunferência definida pela equação

$$x^2 + (y - 1)^2 = 2.$$

Esta circunferência intersesta o eixo Ox em dois pontos. Destes pontos, seja A o que tem abcissa positiva. Seja r a reta tangente à circunferência no ponto A . Qual é a equação reduzida da reta r ?

- (A) $y = x + 1$ (B) $y = x - 1$
(C) $y = 2x + 2$ (D) $y = 2x - 2$

[Resolução, pg. 90](#)

Exame nacional de 2015 - 2.ª fase

55. Seja a um número real. Considere a sucessão (u_n) definida por

$$u_n = \begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = -3u_n + 2, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Qual é o terceiro termo desta sucessão?

- (A) $6a + 4$ (B) $9a - 4$
(C) $6a - 4$ (D) $9a + 4$

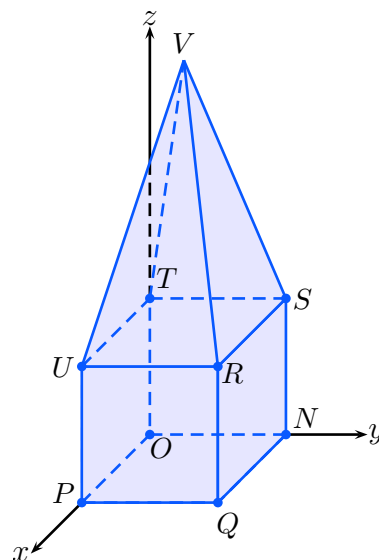
[Resolução, pg. 92](#)

Exame nacional de 2005 - 1.ª fase

56. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro $[NOPQRSTU]$ que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.

Sabe-se que:

- o vértice P pertence ao eixo Ox ;
- o vértice N pertence ao eixo Oy ;
- o vértice T pertence ao eixo Oz ;
- o vértice R tem coordenadas $(2, 2, 2)$;
- o plano PQV é definido pela equação $6x + z - 12 = 0$.



56.1 Determine as coordenadas do ponto V .

56.2 Escreva uma equação cartesiana do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta OR .

56.3 Seja A um ponto pertencente ao plano QRS .

Sabe-se que:

- o ponto A tem cota igual ao cubo da abcissa;
- os vetores OA e TQ são perpendiculares.

Determine a abcissa do ponto A , recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver a equação, devidamente identificado(s) (sugere-se a utilização da janela de visualização em que $x \in [-4, 4]$ e $y \in [-2, 7]$);
- apresente a abcissa do ponto A arredondada às centésimas.

Resolução, pg. 88

Exame nacional de 2016 - 1.^a fase

57. Qual das expressões seguintes é termo geral de uma sucessão monótona e limitada?

(A) $(-1)^n$

(B) $(-1)^n \cdot n$

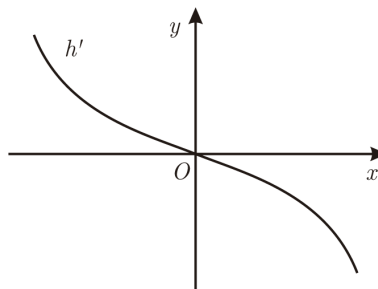
(C) $-\frac{1}{n}$

(D) $1 + n^2$

Resolução, pg. 89

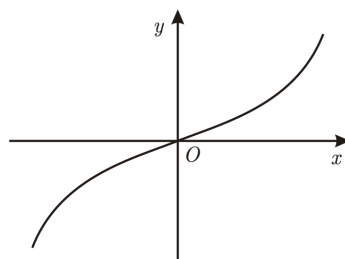
Exame nacional de 2015 - 2.^a fase

58. Na figura, está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico de uma função h' , primeira derivada de h .

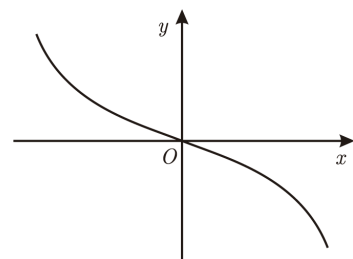


Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função h ?

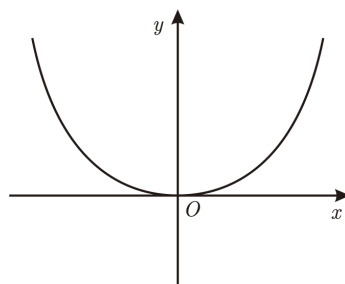
(A)



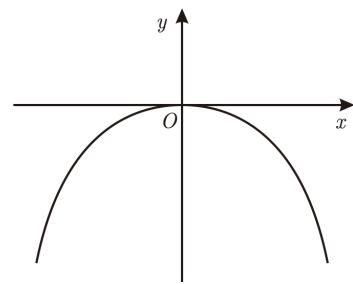
(B)



(C)



(D)



[Resolução, pg. 95](#)

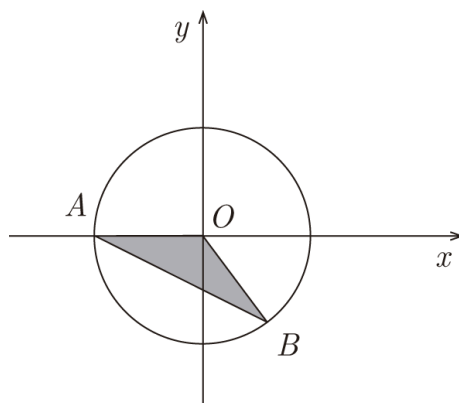
Exame nacional de 2011 - Época especial

59. Na figura, estão representados, num referencial o.n. xOy , uma circunferência e o triângulo $[OAB]$.

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- a circunferência tem centro no ponto O e raio 1;
- A é o ponto de coordenadas $(-1, 0)$;
- B pertence à circunferência e tem ordenada negativa;

- o ângulo AOB tem amplitude igual a $\frac{2\pi}{3}$ radianos.



Qual é a área do triângulo $[OAB]$?

(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\sqrt{3}$

[Resolução, pg. 96](#)

Exame nacional de 2011 - Época especial

60. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(0, 0, 2)$ e $B(4, 0, 0)$.

60.1. Considere o plano α de equação $x - 2y + z + 3 = 0$.

Escreva uma equação do plano que passa no ponto A e é paralelo ao plano α .

60.2. Determine uma equação cartesiana que defina a superfície esférica da qual o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro.

60.3. Seja P o ponto pertencente ao plano xOy tal que:

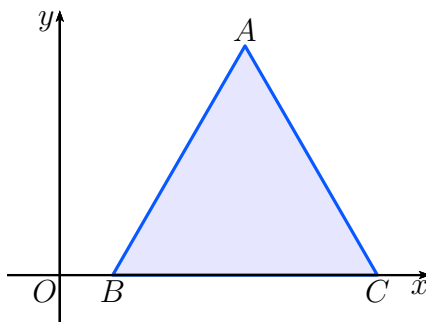
- a sua abcissa é igual à abcissa do ponto B ;
- a sua ordenada é positiva;
- $\widehat{BAP} = \frac{\pi}{3}$.

Determine a ordenada do ponto P .

[Resolução, pg. 91](#)

Exame nacional de 2015 - 1.ª fase

61. Na figura, está representado, num referencial o.n. xOy , um triângulo equilátero $[ABC]$.



Sabe-se que:

- o ponto A tem ordenada positiva;
- os pontos B e C pertencem ao eixo Ox ;
- o ponto B tem abcissa 1 e o ponto C tem abcissa maior do que 1.

Qual é a equação reduzida da reta AB ?

(A) $y = \sqrt{2}x - \sqrt{2}$

(B) $y = \sqrt{2}x + \sqrt{2}$

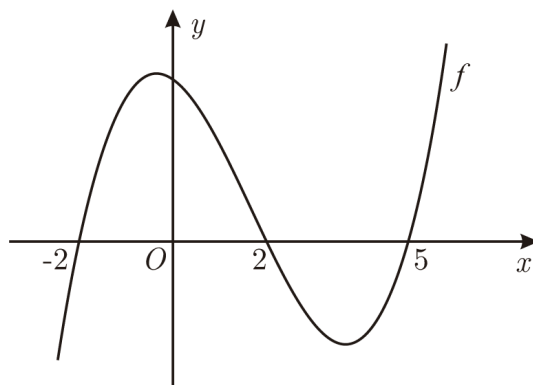
(C) $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$

(D) $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$

[Resolução, pg. 93](#)

Exame nacional de 2015 - 1.^a fase

62. Na figura, está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico de uma função polinomial f de grau 3, de domínio $\mathbb{R}$.



Sabe-se que:

- -2 , 2 e 5 são zeros de f ;
- f' representa a função derivada de f .

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $f'(0) \times f'(6) = 0$

(B) $f'(-3) \times f'(6) < 0$

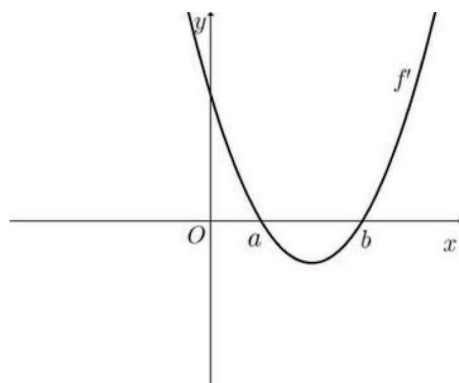
(C) $f'(-3) \times f'(0) > 0$

(D) $f'(0) \times f'(6) < 0$

[Resolução, pg. 94](#)

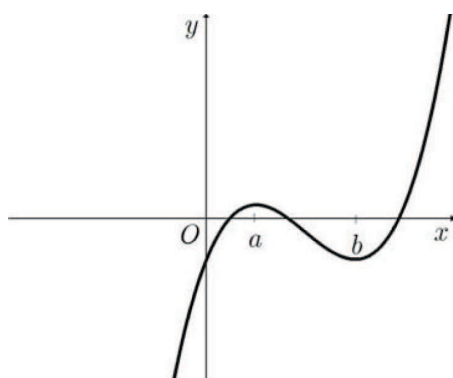
Exame nacional de 2011 - 1.^a fase

63. Na figura, está representada, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função derivada, f' , de uma função f .

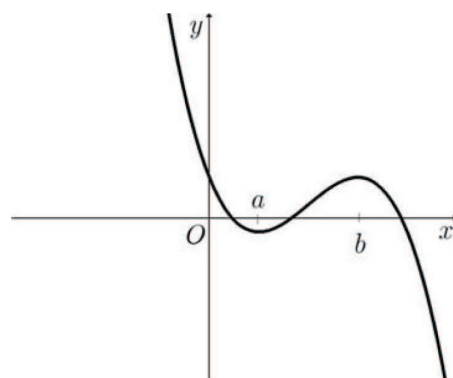


Em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f ?

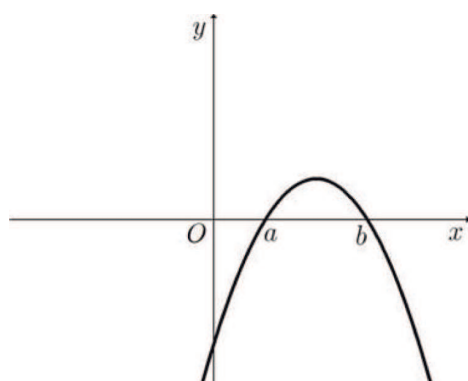
(A)



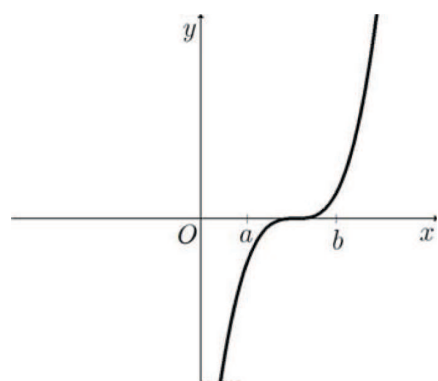
(B)



(C)



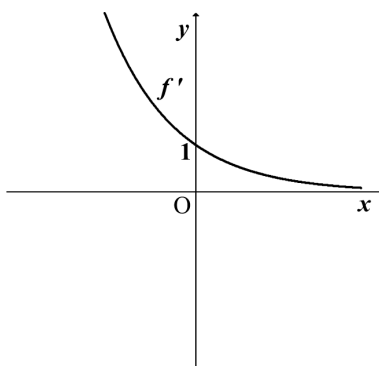
(D)



[Resolução, pg. 97](#)

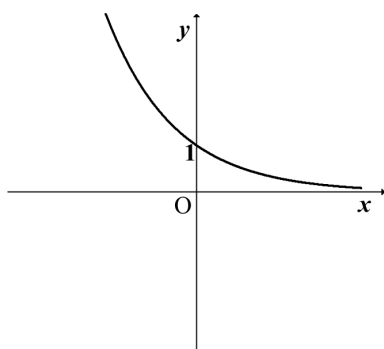
Exame nacional de 2010 - Época especial

64. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função f' , derivada de f , ambas de domínio $\mathbb{R}$, em que o eixo Ox é uma assíntota do gráfico de f' .
Seja a função g , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) + x$.

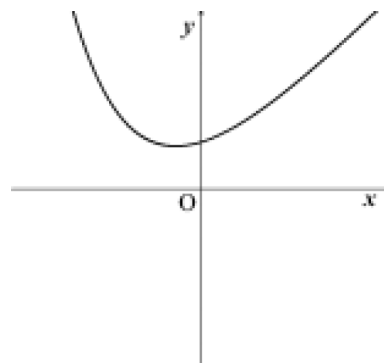


Qual das figuras seguintes pode representar parte do gráfico da função g' , derivada de g ?

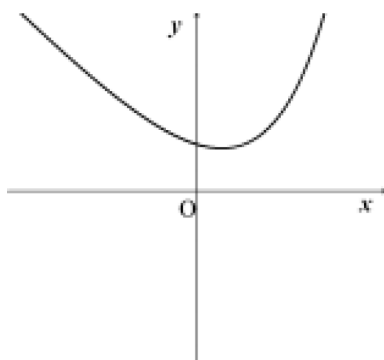
(A)



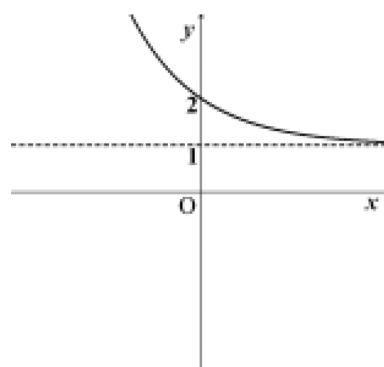
(B)



(C)



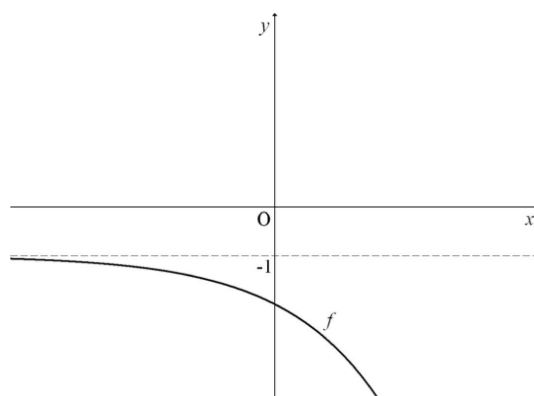
(D)



Resolução, pg. 98

Exame nacional de 2009 - 2.^a fase

65. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f , de domínio $\mathbb{R}$, sendo $y = -1$ a única assíntota do seu gráfico.



Qual é o valor do $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{f(x)}$?

(A) $-\infty$

(B) -3

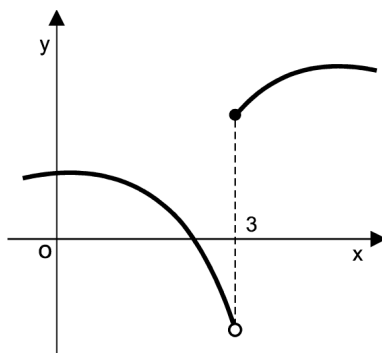
(C) -1

(D) 3

Resolução, pg. 100

Exame nacional de 2008 - 2.ª fase

66. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função f , real de variável real.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{f(x)} = 0$

(B) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}$

(C) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{2}$

(D) Não existe $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{f(x)}$

Resolução, pg. 41

Exame nacional de 2007 - 2.ª fase

67. Na figura ao lado estão representadas duas retas paralelas, a reta AB (em que A e B são pontos fixos) e a reta s .

O ponto S é um ponto móvel, deslocando-se ao longo de toda a reta s . Para cada posição do ponto S , seja x a amplitude, em radianos, do ângulo BAS e seja $a(x)$ a área do triângulo $[ABS]$. Apenas um dos seguintes gráficos pode representar a função a . Numa composição, explique por que razão cada um dos outros três gráficos não pode representar a função a .

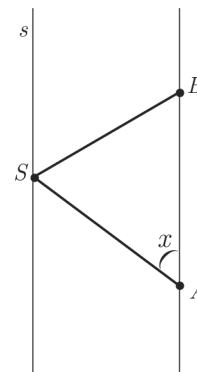


Gráfico 1

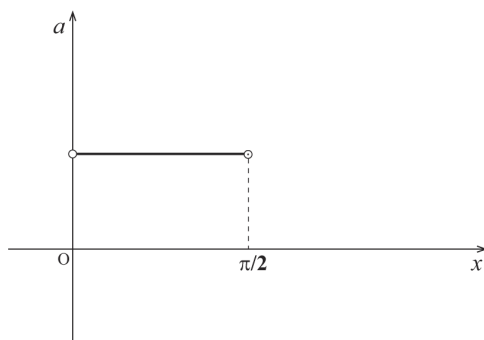


Gráfico 2

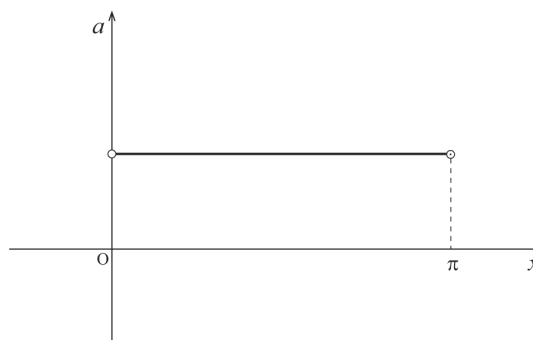


Gráfico 3

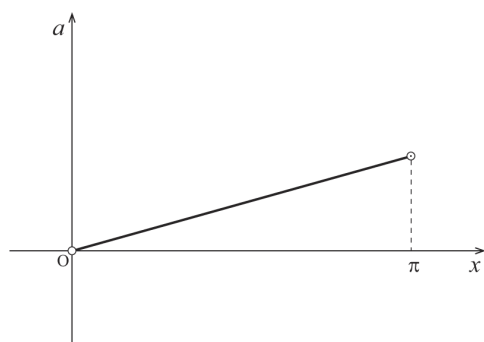
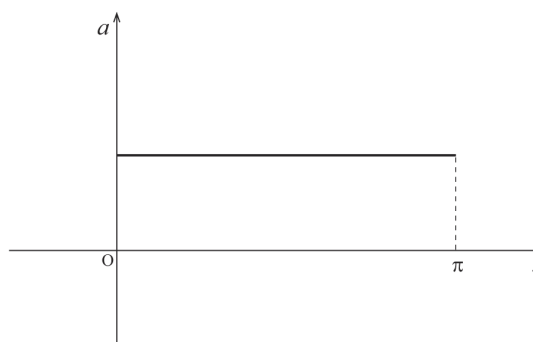


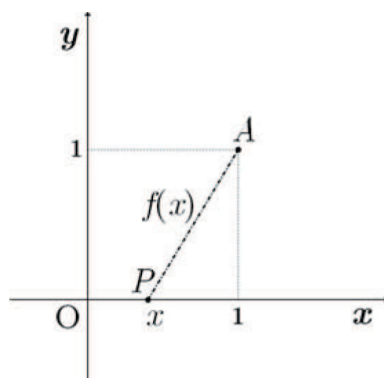
Gráfico 4



Resolução, pg. 101

Exame nacional de 2008 - 2.ª fase

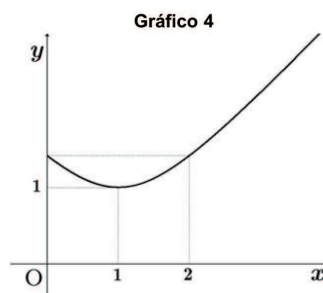
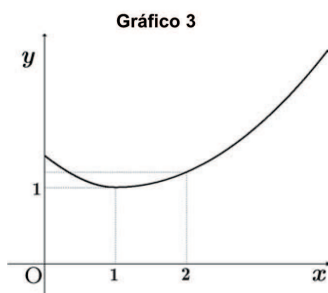
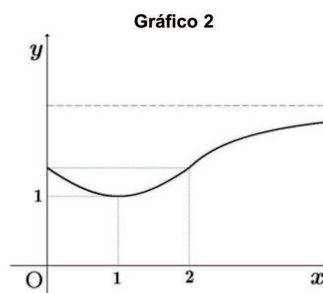
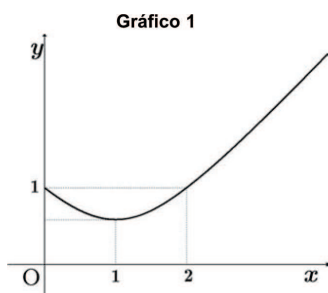
68. Considere o ponto $A(1, 1)$, representado na figura.



Admita que um ponto, P , parte da origem O do referencial e se desloca ao longo do semi-eixo positivo Ox . Para cada posição do ponto P , seja x a abscissa de P .

Seja f a função que, a cada valor de x , faz corresponder a distância do ponto P ao ponto A . Apenas um dos seguintes gráficos pode representar a função f .

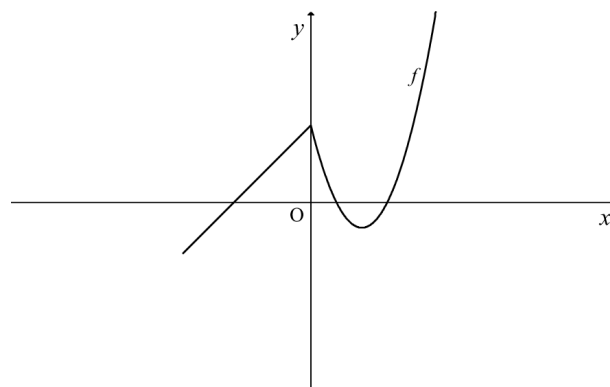
Numa pequena composição, explique por que razão cada um dos outros três gráficos não pode representar a função f .



Resolução, pg. 99

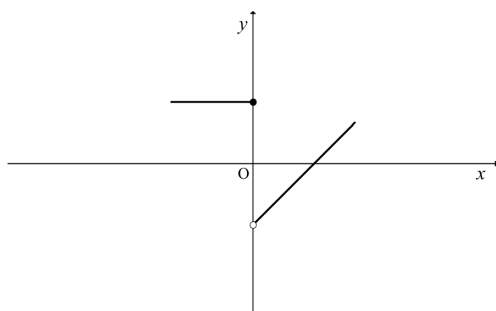
Exame nacional de 2009 - 1.^a fase

69. A figura representa parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}$.

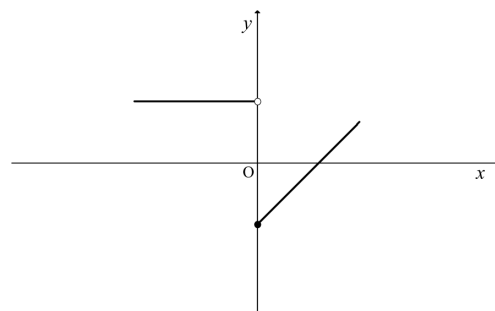


Em qual das figuras seguintes pode estar parte da representação gráfica de f' , derivada de f ?

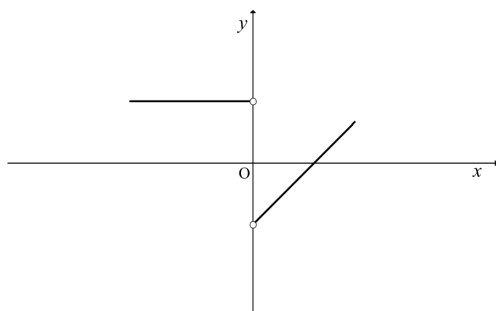
(A)



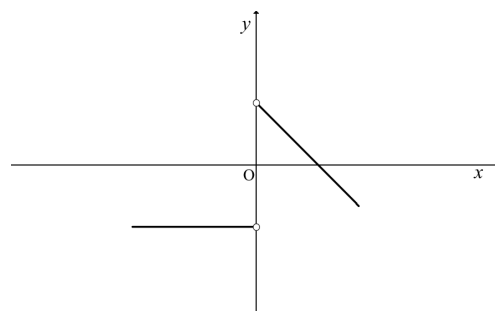
(B)



(C)



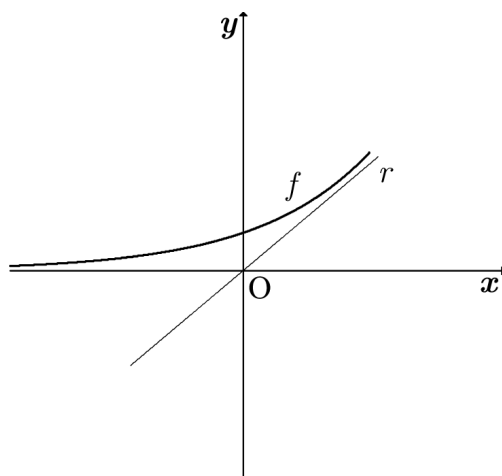
(D)



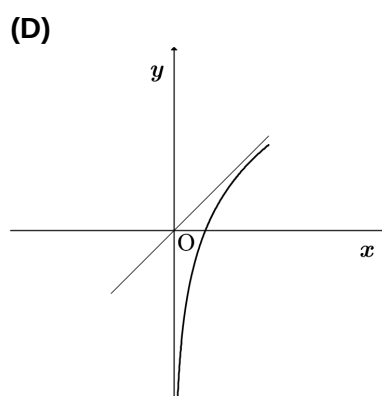
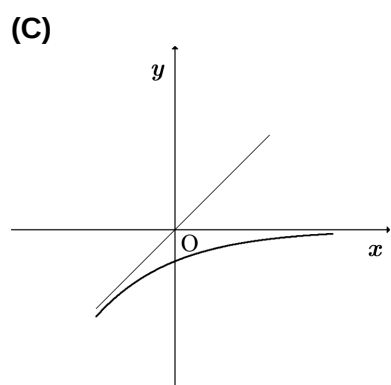
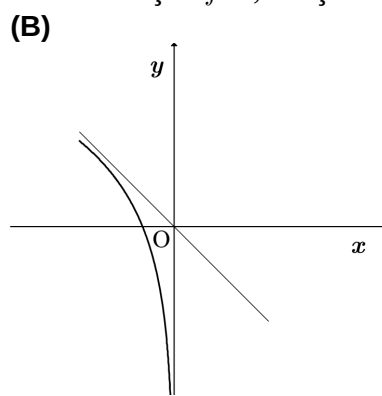
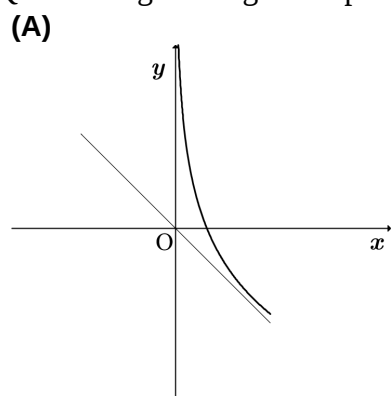
Resolução, pg. 102

Exame nacional de 2008 - 1.^a fase

70. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função f e a reta r de equação $y = x$.



Qual das figuras seguintes pode ser parte do gráfico da função f^{-1} , função inversa de f ?



Resolução, pg. 103

Época especial de 2008

71. Seja $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 3 - 2 \cos x$.
Indique o valor de x para o qual $f(x)$ é máximo.

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) $\frac{3\pi}{2}$

Resolução, pg. 105

Exame nacional de 2007 - 2.ª fase

72. Considere um retângulo cuja área é igual a 5.
Qual das seguintes expressões representa o perímetro deste retângulo, em função do comprimento, x , de um dos seus lados?

(A) $2x + \frac{10}{x}$ (B) $2x + \frac{2x}{5}$ (C) $2x + \frac{5}{x}$ (D) $x + \frac{5}{x}$

Resolução, pg. 106

Exame nacional de 2007 - 2.ª fase

73. Identifique o valor de $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{4 - x^2}$.

(A) 0 (B) 1 (C) $+\infty$ (D) $-\infty$

Resolução, pg. 108

Exame nacional de 2007 - 1.ª fase

74. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.
Sabe-se que 3 é um zero da função f .
Seja g a função definida por $g(x) = f(x - 1) + 4$, para qualquer número real x .
Qual dos seguintes pontos pertence garantidamente ao gráfico da função g ?

(A) (2, 4) (B) (4, 4) (C) (2, 8) (D) (1, 7)

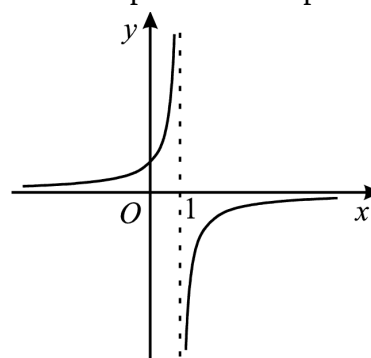
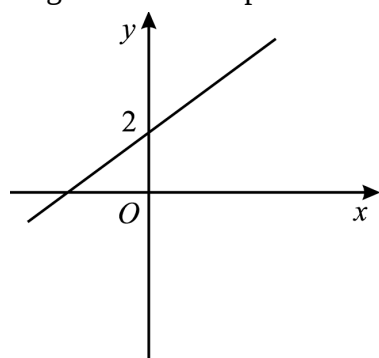
Resolução, pg. 107

Exame nacional de 2007 - 1.ª fase

75. De duas funções, f e g sabe-se que:

- o gráfico de f é uma reta, cuja ordenada na origem é igual a 2;
- o gráfico de g é uma hipérbole.

Nas figuras seguintes estão representadas parte dessa reta e parte dessa hipérbole.



A reta de equação $x = 1$ é assíntota do gráfico de g .

Indique o valor de $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)}$.

(A) 0

(B) 2

(C) $+\infty$

(D) $-\infty$

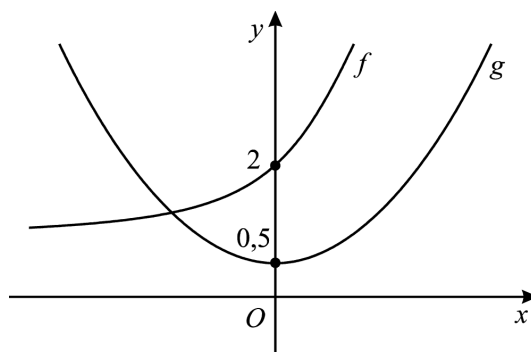
Resolução, pg. 109

Exame nacional de 2006 - 2.ª fase

76. Na figura estão representadas, em referencial o.n. xOy , partes dos gráficos de duas funções, f e g , contínuas em $\mathbb{R}$.

Tal como a figura sugere,

- nenhum dos gráficos intersesta o eixo Ox ;
- os gráficos de g e de f intersestam o eixo Oy nos pontos de ordenadas 0,5 e 2, respetivamente.



Apenas uma das equações seguintes é impossível. Qual delas?

(A) $f(x) + g(x) = 0$

(B) $f(x) - g(x) = 0$

(C) $f(x) \times g(x) = 1$

(D) $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Resolução, pg. 110

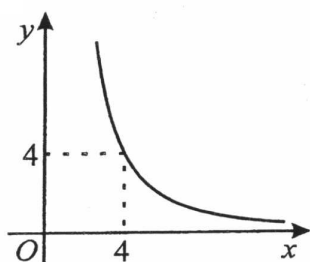
Exame nacional de 2006 - 1.ª fase

77. Pretende-se construir um prisma quadrangular regular com 64 cm^3 de volume.

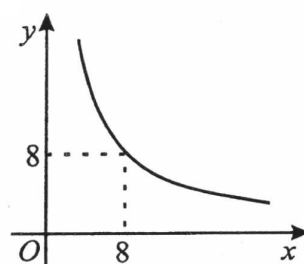
A altura y do prisma, medida em cm , depende do comprimento x da aresta da base, medido igualmente em cm .

Qual dos gráficos seguintes traduz corretamente a relação entre estas duas variáveis?

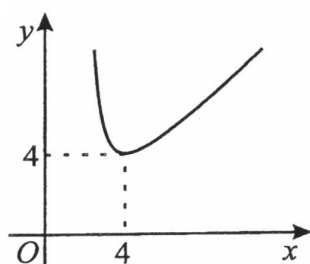
(A)



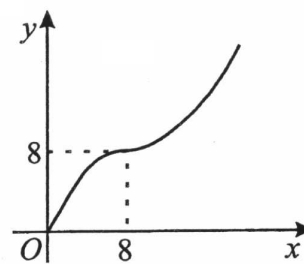
(B)



(C)



(D)



[Resolução, pg. 111](#)

Exame nacional de 2006 - 1.^a fase

Resoluções

Resolução da pergunta 1

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1](#)

1.1. A altura do combustível no depósito no início do vazamento é

$$a(0) = 1,8 - 0,216^{\frac{2}{3}}.$$

Como metade da altura do combustível no depósito é $0,9 \text{ m}$, o número pedido é

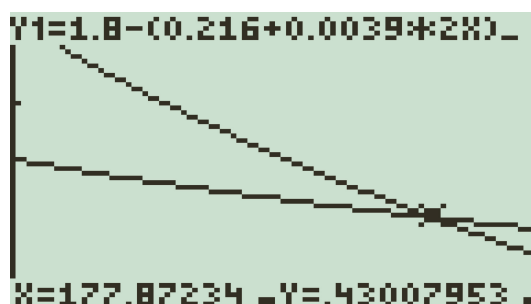
$$1,8 - 0,216^{\frac{2}{3}} - 0,9 = 2,54.$$

A opção correta é a **(B)**. **1.2.** Podemos equacionar o problema com a equação

$$a(2t_1) = \frac{1}{2}a(t_1) \Leftrightarrow 1,8 - (0,216 + 0,0039 \times 2t_1)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \left(1,8 - (0,216 + 0,0039t_1)^{\frac{2}{3}} \right).$$

No gráfico seguinte, obtido através de uma calculadora gráfica, estão representados os gráficos de

$y = a(2t_1)$ e $y = a(t_1)$ e assinalado o ponto de interseção.



Podemos concluir que $t_1 \approx 177,71$, ou seja 177 minutos e 43 segundos.

Resolução da pergunta 2

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2](#)

$$\begin{aligned} & \begin{cases} u_6 + u_{20} = -5 \\ u_{19} = 4u_7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 5r + u_1 + 19r = -5 \\ u_1 + 18r = 4(u_1 + 6r) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} u_1 = -\frac{5}{2} - 12r \\ -3u_1 - 6r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - - - \\ \frac{15}{2} + 36r - 6r = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} - - - \\ r = -\frac{15}{60} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -\frac{5}{2} + 3 \\ r = -\frac{1}{4} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ r = -\frac{1}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Assim } S_{16} = \frac{u_1 + u_{16}}{2} \times 16 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 15 \times \left(-\frac{1}{4}\right)}{2} \times 16 = -22.$$

Resolução da pergunta 3

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2](#)

A subsucessão dos números ímpares é $2 + \frac{1}{n}$.

$$\frac{83}{41} \leq 2 + \frac{1}{n} \leq \frac{67}{33} \Leftrightarrow \frac{1}{41} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{33} \Leftrightarrow 33 \leq n \leq 41.$$

Os números ímpares compreendidos entre 33 e 41 são 33, 35, 37, 39 e 41.
Temos portanto 5 termos de ordem ímpar.

Resolução da pergunta 4

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2](#)

Notemos que

$$v_8 = v_5 \times r^3 \Leftrightarrow r^3 = \frac{108}{4} \Leftrightarrow r = 3.$$

Assim, $v_6 = v_5 \times r = 4 \times 3 = 12$.

A opção correta é a **(A)**.

Resolução da pergunta 5

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2](#)

5.1. Como

$$\overline{RQ} = \sqrt{(-5+2)^2 + (5-1)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{41}$$

então a condição que define a superfície esférica de centro nem R e que passa no ponto Q é

$$(x+5)^2 + (y-5)^2 + (z+3)^2 = (\sqrt{41})^2 \Leftrightarrow (x+5)^2 + (y-5)^2 + (z+3)^2 = 41$$

A opção correta é a **(C)**.

5.2. Uma vez que o quadrilátero é um trapézio então os lados $[PQ]$ e $[RS]$ são paralelos. Consequentemente, $\overrightarrow{RS}$ e $\overrightarrow{QP}$ são colineares e o plano pretendido é perpendicular a $\overrightarrow{QP}$.

$$\overrightarrow{QP} = P - Q = (3, -2, 1).$$

Assim, o plano pretendido é definido pela condição $3x - 2y + z + d = 0$, $d \in \mathbb{R}$. Substituindo $P(1, -1, 2)$ nesta equação temos

$$3 + 2 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -7.$$

Podemos concluir que a equação do plano pretendido é $3x - 2y + z - 7 = 0$.

Resolução da pergunta 6

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3](#)

6.1. Para uma reta ser perpendicular à reta EF , os seus vetores diretores devem ser perpendiculares ao vetor $(-3, -2, 2)$. Como $(2, -3, 0) \cdot (-3, -2, 2) = -6 + 6 + 0 = 0$ e $(0, 3, 3) \cdot (-3, -2, 2) = 0 - 6 + 6 = 0$, as alternativas (A) e (C) são possíveis.

Para verificar a qual delas o ponto E pertence, devemos substituir as suas coordenadas nas equações vetoriais apresentadas. Relativamente a (C) temos

$$(7, 2, 15) = (7, -10, 3) + k(0, 3, 3) \Leftrightarrow (0, 12, 12) = (0, 3k, 3k) \Leftrightarrow k = 4.$$

Deste modo, **(C)** é a resposta correta.

6.2. Começemos por notar que B é o ponto de interseção do plano FGB com o eixo Oy . Como $(-3, -2, 2)$ é um vetor diretor da reta EF então $\vec{n} = (-3, -2, 2)$ é um vetor normal ao plano FGB . Consequentemente, este é definido por uma equação da forma $-3x - 2y + 2z + d = 0$, para $d \in \mathbb{R}$. Substituindo $G(6, 10, 13)$ nesta equação temos

$$-3 \times 6 - 2 \times 10 + 2 \times 13 + d = 0 \Leftrightarrow d = 12$$

e podemos concluir que $-3x - 2y + 2z + 12 = 0$ é uma equação geral do plano FGB . Substituindo $B(0, b, 0)$ nesta equação temos

$$0 - 2b + 12 = 0 \Leftrightarrow b = 6$$

e podemos concluir que $B(0, 6, 0)$.

O raio da superfície esférica é dado por

$$r = \overline{EG} = \sqrt{(7-6)^2 + (2-10)^2 + (15-13)^2} = \sqrt{69}.$$

A equação reduzida da superfície esférica com centro no ponto B e que passa no ponto D é portanto

$$x^2 + (y-6)^2 + z^2 = 69.$$

Resolução da pergunta 7

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4](#)

7.1. Vídeo da resolução:

Podemos observar na figura que a reta AE é perpendicular ao plano. Deste modo e como o vetor de coordenadas $(3, -6, 2)$ é um vetor diretor da reta, podemos concluir que um vetor normal ao plano é $\vec{n} = (3, -6, 2)$.

Consequentemente o plano é definido pela equação

$$3x - 6y + 2z + d = 0,$$

onde $d \in \mathbb{R}$. Substituindo nesta equação $G(5, 3, 6)$ temos

$$3 \times 5 - 6 \times 3 + 2 \times 6 + d = 0 \Leftrightarrow d = -9$$

e podemos concluir que uma equação do plano EFG é

$$3x - 6y + 2z - 9 = 0.$$

7.2. Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**):

O centro da superfície esférica é o ponto médio de $[AG]$:

$$M_{[AG]} = \left(\frac{7+5}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{4+6}{2} \right) = (6, 2, 5).$$

Como

$$\overline{AG} = \sqrt{(7-5)^2 + (1-3)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

então o raio da superfície esférica é $r = \sqrt{3}$.

A equação reduzida da superfície esférica é

$$(x-6)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 3.$$

Resolução da pergunta 8

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4](#)

8.1 Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Como $r = \frac{3}{5}R$ então

$$\begin{aligned} 50 \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2} \right) &= 50 \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\frac{3}{5}R}{R} \right)^2} \right) \\ &= 50 \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5} \right)^2} \right) = 50 \left(1 - \frac{4}{5} \right) = 10. \end{aligned}$$

A opção correta é a **(C)**.

8.2 Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

$R = 6400$.

$$h = r \Rightarrow r = \frac{6400}{r + 6400} \sqrt{r^2 + 2r \times 6400} \Leftrightarrow r = \frac{6400}{r + 6400} \sqrt{r^2 + 12800r}.$$

Recorrendo à calculadora gráfica obtemos os gráficos das funções definidas por $y = r$ e $y = \frac{6400}{r+6400} \sqrt{r^2 + 12800r}$ e uma aproximação do seu ponto de interseção no intervalo $]0, 6400[$.



Podemos concluir que $r \approx 5371.44$.

Como

$$50 \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{5371.44}{6400} \right)^2} \right) \approx 23$$

podemos concluir que a percentagem da área da superfície terrestre coberta pelo satélite é aproximadamente 23%.

Resolução da pergunta 9

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Para $n < 10$ temos $1 \leq v_n \leq 9$.

Para $n \geq 10$, como $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{10}$ então $1 < 1 + \frac{1}{n} \leq \frac{11}{10}$.

Assim, $1 \leq v_n \leq 9$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e podemos concluir que a sucessão (v_n) é limitada.

A opção correta é a **(C)**.

Resolução da pergunta 10

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

$$\begin{aligned} & \begin{cases} u_7 = 2u_2 \\ S_{12} = 57 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6r = 2(u_1 + r) \\ \frac{u_1 + u_{12}}{2} \times 12 = 57 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} u_1 = 4r \\ u_1 + u_{12} = \frac{57}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - - - \\ u_1 + u_1 + 11r = \frac{57}{6} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} u_1 = 4r \\ 8r + 11r = \frac{57}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ r = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 + (n-1)r = 2 + (n-1) \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2} + \frac{3}{2}. \\ u_n = 500 &\Leftrightarrow \frac{n}{2} + \frac{3}{2} = 500 \Leftrightarrow n = 1000 - 3 \Leftrightarrow n = 997. \end{aligned}$$

Podemos concluir que a ordem do termo 500 é 997.

Resolução da pergunta 11

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Sabemos que

$$\tan(\widehat{STO}) = 2 \Leftrightarrow \widehat{STO} = \tan^{-1} 2.$$

Consequentemente, $\widehat{STU} \approx \pi - \tan^{-1} 2 \approx 2,03$.

A opção correta é a **(C)**.

Resolução da pergunta 12

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6](#)

12.1. Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Sabemos que $A(0, b, 0)$ e $B(a, 0, 0)$, onde $a, b \in \mathbb{R}$. Substituindo na equação do plano ABC temos

$$3 \times 0 + 4b + 4 \times 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow b = 3$$

e

$$3a + 4 \times 0 + 4 \times 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow a = 4.$$

Temos portanto $A(0, 3, 0)$ e $B(4, 0, 0)$.

A altura do cilindro é

$$\overline{AB} = \sqrt{(0-4)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = 5.$$

Como o seu volume é igual a 10π temos

$$A_b \times 5 = 10\pi \Leftrightarrow A_b = 2\pi \Leftrightarrow \pi \times \overline{BC}^2 = 2\pi \Leftrightarrow \overline{BC} = \pm\sqrt{2}.$$

Podemos concluir que $\overline{BC} = \sqrt{2}$.

12.2. Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

O ponto do plano ABC que se encontra mais próximo do ponto P é a projeção ortogonal de P no plano ABC .

Um vetor normal ao plano ABC é $\vec{n} = (3, 4, 4)$. Por outro lado, uma equação vetorial da reta que contém P e é perpendicular ao plano ABC é dada por:

$$(x, y, z) = (3, 5, 6) + k(3, 4, 4), \quad k \in \mathbb{R}.$$

O ponto de interseção desta reta com o plano ABC é o ponto que pretendemos.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (x, y, z) = (3, 5, 6) + k(3, 4, 4) \\ 3x + 4y + 4z - 12 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 3 + 3k \\ y = 5 + 4k \\ z = 6 + 4k \\ 3x + 4y + 4z - 12 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -- \\ -- \\ -- \\ 9 + 9k + 20 + 16k + 24 + 16k - 12 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2 \\ k = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Podemos concluir que as coordenadas do ponto do plano ABC que se encontra mais próximo do ponto P são $(0, 1, 2)$.

Resolução da pergunta 13

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \frac{8(n+1) - 4}{n+2} - \frac{8n - 4}{n+1} \\&= \frac{(8n+4)(n+1) - (8n-4)(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\&= \frac{8n^2 + 8n + 4n + 4 - (8n^2 + 16n - 4n - 8)}{(n+2)(n+1)} \\&= \frac{12}{(n+2)(n+1)}.\end{aligned}$$

Como $12 > 0$ e $(n+2)(n+1) > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ então $\frac{12}{(n+2)(n+1)} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Temos portanto $u_{n+1} - u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e podemos concluir que (u_n) é monótona crescente.

Resolução da pergunta 14

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Seja a a abcissa do ponto P .

Como $f'(x) = 2x$ então $f'(a) = 2a$ é o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a . A sua equação reduzida é da forma $y = 2ax + b$, onde $b \in \mathbb{R}$.

Substituindo as coordenadas do ponto de tangência $(a, f(a)) = (a, a^2)$ nesta equação temos

$$a^2 = 2a \times a + b \Leftrightarrow b = -a^2.$$

Podemos concluir que a equação reduzida da reta r é $y = 2ax - a^2$.

Uma vez que a reta s é perpendicular à reta r então o seu declive é $-\frac{1}{2a}$.

Vamos agora determinar uma equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f com declive $-\frac{1}{2a}$.

A sua equação reduzida é da forma $y = -\frac{1}{2a}x + b'$, $b' \in \mathbb{R}$.

Como

$$f'(x) = -\frac{1}{2a} \Leftrightarrow 2x = -\frac{1}{2a} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4a},$$

a sua abcissa é $-\frac{1}{4a}$.

$(-\frac{1}{4a}, f(-\frac{1}{4a})) = (-\frac{1}{4a}, \frac{1}{16a^2})$ são as coordenadas do respetivo ponto de tangência. Substituindo na equação da reta tangente temos

$$\frac{1}{16a^2} = -\frac{1}{2a} \times \left(-\frac{1}{4a}\right) + b' \Leftrightarrow b' = -\frac{1}{16a^2}.$$

Podemos concluir que a equação reduzida da reta s é $y = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2}$.

A solução do sistema seguinte vai-nos dar as coordenadas do ponto I , de interseção das retas r e s .

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y = 2ax - a^2 \\ y = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - - - \\ 2ax - a^2 = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} - - - \\ -16a^4 + 1 = -8ax - 32a^3x \wedge a \neq 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} - - - \\ x = \frac{1-16a^4}{-8a(4a^2+1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - - - \\ x = \frac{(1-4a^2)(1+4a^2)}{-8a(4a^2+1)} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2a} \times \frac{1-4a^2}{-8a} - \frac{1}{16a^2} \\ x = \frac{1-4a^2}{-8a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{4} \\ x = \frac{1-4a^2}{-8a} \end{cases} \end{aligned}$$

Concluimos deste modo que a ordenada do ponto I é sempre $-\frac{1}{4}$.

[Voltar ao enunciado da pergunta](#)

Resolução da pergunta 15

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 7](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Como $x = 1 + 2k \wedge y = 3 - 4k \wedge z = k$, $k \in \mathbb{R}$ podemos concluir que $\vec{r} = (2, -4, 1)$ é um vetor diretor da reta r .

Como

$$\vec{r} \cdot \vec{c} = (2, -4, 1) \cdot (1, 1, 2) = 2 - 4 + 2 = 0$$

então $\vec{c} \perp \vec{r}$.

A opção correta é a **(C)**.

Resolução da pergunta 16

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 7](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Podemos obter as coordenadas do ponto A , ponto de interseção da reta AB com Ox , resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -2. \end{cases}$$

Podemos concluir que $A(-2, 0)$. Podemos obter as coordenadas do ponto B , ponto de interseção da reta AB com Oy , resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4. \end{cases}$$

Podemos concluir que $B(0, 4)$.

As coordenadas do ponto médio são

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(\frac{-2 + 0}{2}, \frac{0 + 4}{2} \right) = (-1, 2).$$

A opção correta é a **(B)**.

Resolução da pergunta 17

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 8](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

$$\sin \left(3 \arccos \frac{1}{2} \right) = \sin \left(3 \times \frac{\pi}{3} \right) = \sin \pi = 0.$$

A opção correta é a **(C)**.

Resolução da pergunta 18

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 8](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Uma vez que:

- 2, a e b são três termos consecutivos de uma progressão geométrica, então $\frac{a}{2} = \frac{b}{a}$;
- $a - 2$, b e 2 são três termos consecutivos de uma progressão aritmética então $b - (a - 2) = 2 - b$.

Vamos determinar os valores de a e b através da resolução do sistema seguinte.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{a}{2} = \frac{b}{a} \\ b - (a - 2) = 2 - b \end{cases} \stackrel{a \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (2b)^2 = 2b \\ 2b = a \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 4b^2 - 2b = 0 \\ - - - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(2b - 1) = 0 \\ - - - \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} b = 0 \vee b = \frac{1}{2} \\ - - - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $a \neq 0$ e $b \neq 0$ então $a = 1$ e $b = \frac{1}{2}$.

Resolução da pergunta 19

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 8](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Sabemos que, num triângulo, ao maior lado opõe-se o ângulo de maior amplitude.
Assim, ao lado de comprimento 6 opõe-se o ângulo de amplitude α .
Pelo Teorema de Carnot,

$$\begin{aligned}6^2 &= 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \cos \alpha \\ \Leftrightarrow 40 \cos \alpha &= 5 \\ \Leftrightarrow \cos \alpha &= \frac{1}{8} \\ \Leftrightarrow \alpha &\approx 82.819244^\circ.\end{aligned}$$

Logo, $\sin \alpha \approx 0.992$.

Podemos concluir que a opção correta é a **(B)**.

Um outro modo de resolver o exercício, a partir da etapa $\cos \alpha = \frac{1}{8}$ é aplicar a fórmula fundamental da trigonometria:

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \frac{1}{64} &= 1 \\ \Leftrightarrow \sin^2 \alpha &= \frac{63}{64} \\ \Leftrightarrow \sin \alpha &= \pm \frac{\sqrt{63}}{8}.\end{aligned}$$

Como $\alpha \in]0, 180^\circ[$, por ser a amplitude do ângulo interno de um triângulo, então $\sin \alpha = \frac{\sqrt{63}}{8} \approx 0.992$.

Resolução da pergunta 22

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 9](#)

22.1. Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

O volume do paralelepípedo $[ABCDEFGH]$ é dada pelo produto da área da base vezes a altura, ou seja

$$\overline{AB} \times \overline{BG} \times \overline{BC}.$$

Para obter a área da base, vamos começar por determinar as coordenadas do ponto A . Uma vez que A pertence ao eixo Ox , as suas coordenadas são da forma $A(a, 0, 0)$ para alguma constante $a \in \mathbb{R}$.

Substituindo na equação do plano ABC temos:

$$3 \times a + 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow a = 4.$$

Assim, $A(4, 0, 0)$.

Como $B(0, 3, 0)$ e $C(0, 3, 6)$ então

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2 + (0-0)^2} = 5;$$

$$\overline{BG} = \sqrt{(0-6)^2 + (3-11)^2 + (0-0)^2} = 10$$

e o volume do paralelepípedo é $5 \times 10 \times 6 = 300$ unidades de volume.

22.2. Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Sabemos que um plano definido por uma equação da forma $ax + by + cz + d = 0$ admite o vetor de coordenadas $\vec{n}(a, b, c)$ como vetor normal.

Por conseguinte, $\vec{n}(3, 4, 0)$ são as coordenadas de um vetor normal ao plano ABC e

$$(x, y, z) = (1, -4, 3) + k(3, 4, 0), \quad k \in \mathbb{R}$$

é uma equação vetorial da reta r .

A solução do sistema seguinte dá-nos as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano ABC .

$$\begin{cases} 3x + 4y - 12 = 0 \\ (x, y, z) = (1, -4, 3) + k(3, 4, 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(1 + 3k) + 4(4k - 4) - 12 = 0 \\ (x, y, z) = (1 + 3k, -4 + 4k, 3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 25k = 25 \\ - - - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ (x, y, z) = (4, 0, 3) \end{cases}.$$

Logo, as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano ABC são $(4, 0, 3)$.

[Voltar ao enunciado da pergunta](#)

Resolução da pergunta 20

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 8](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Seja α a inclinação da reta OB . Como o seu declive é $\frac{4}{3}$ então $\tan \alpha = \frac{4}{3}$.
A inclinação da reta r é $\frac{\alpha}{2}$ e o seu declive $\tan \frac{\alpha}{2}$.

Como $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ então

$$\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

$$\text{Assim, } \tan \alpha = \tan \left(2 \times \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Se $1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2} \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} \tan \alpha = \frac{4}{3} &\Leftrightarrow \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow 6 \tan \frac{\alpha}{2} &= 4 - 4 \tan^2 \frac{\alpha}{2} \\ \Leftrightarrow 4 \tan^2 \frac{\alpha}{2} + 6 \tan \frac{\alpha}{2} - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \vee \tan \frac{\alpha}{2} &= -2. \end{aligned}$$

Como a reta r tem declive positivo e passa na origem, podemos concluir que a sua equação reduzida é $y = \frac{1}{2}x$.

Resolução da pergunta 23

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 9](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

$2 \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$.
Como $-\frac{2\pi}{3} \in [-\pi, 0]$ e $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ então a opção correta é a **(B)**.

Resolução da pergunta 21

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 8](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Como a área do círculo é 9π ,

$$\pi \times \overline{OF_2}^2 = 9\pi \Leftrightarrow \overline{OF_2} = \pm 3.$$

Consequentemente, o diâmetro do círculo é igual a 6.

Como a distância focal, $2c$, e o eixo menor da elipse, $2b$, são iguais ao diâmetro do círculo então

$$2c = 2b = 6 \Leftrightarrow c = b = 3.$$

Uma vez que $b^2 + c^2 = a^2$ então

$$3^2 + 3^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 = 18.$$

Assim, a equação reduzida da elipse é

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

A opção correta é a **(A)**.

Resolução da pergunta 24

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 9](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Note-se que $\vec{n}_\alpha(1, 1, 1)$ e $\vec{n}_\beta(2, 2, 2)$ são vetores normais aos planos α e β , respetivamente. Como $\vec{n}_\beta = 2\vec{n}_\alpha$, os planos α e β são paralelos. Por outro lado,

$$x + y + z = 1 \Leftrightarrow 2x + 2y + 2z = 2 \nRightarrow 2x + 2y + 2z = 1$$

permite-nos concluir que os planos α e β são estritamente paralelos. Consequentemente, a interseção dos três planos é o conjunto vazio.

Um outro modo de concluir o pretendido é através da resolução do sistema seguinte:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 2 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \\ - - - \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2 \\ - - - \\ - - - \end{cases}$$

Como o sistema é impossível, a interseção dos três planos é o conjunto vazio. Podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

Resolução da pergunta 25

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 9](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

O problema pode ser equacionado com $d = x + 9$. Como $r_1 = 7$ e $r_2 = 8$ temos

$$\begin{aligned}d &= x + 9 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{[(7+8)^2 - x^2]} [x^2 - (7-8)^2]}{x} &= x + 9 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(225 - x^2)(x^2 - 1)}}{x} &= x + 9\end{aligned}$$

e $]r_2 - r_1, \sqrt{r_2^2 - r_1^2}[=]1, \sqrt{15}[$.

Introduzindo na calculadora gráfica as expressões $y = \frac{\sqrt{(225-x^2)(x^2-1)}}{x}$ e $y = x + 9$ e recorrendo às suas potencialidades, obtemos os gráficos seguintes e o seu ponto de interseção no intervalo $]1, \sqrt{15}[$.



Podemos concluir que $x \approx 1.4$.

Resolução da pergunta 26

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 10](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Como $r > 1$ e $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, a sucessão (a_n) é monótona crescente.
Sejam a_p e a_{p+1} dois termos consecutivos da sucessão.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a_p + a_{p+1} = 12 \\ a_{p+1} - a_p = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_p + r \times a_p = 12 \\ r \times a_p - a_p = 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a_p = \frac{12}{1+r} \\ a_p(r-1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - - - \\ \frac{12r-12-3-3r}{1+r} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} - - - \\ 9r - 15 = 0 \wedge r \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_p = \frac{9}{2} \\ r = \frac{5}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Podemos concluir que a razão é igual a $\frac{5}{3}$.

Resolução da pergunta 27

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 11](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

A resolução do sistema seguinte conduz-nos a conclusões relativamente à interseção dos três planos.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y = -x \\ y = z \\ 2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -x \\ 2x - 3x + x - 1 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -x \\ -1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(D)**.

Resolução da pergunta 28

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 11](#)

28.1

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Para determinar a amplitude do ângulo VAC vamos determinar os vetores $\overrightarrow{AV}$ e $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AV} = V - A = (3, -1, 2) - (2, 1, 0) = (1, -2, 2).$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0, -1, 2) - (2, 1, 0) = (-2, -2, 2).$$

$$\begin{aligned}\cos(\overrightarrow{AV} \wedge \overrightarrow{AC}) &= \frac{\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AV}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|} \\ \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AV} \wedge \overrightarrow{AC}) &= \frac{(1, -2, 2) \cdot (-2, -2, 2)}{\|(1, -2, 2)\| \times \|(-2, -2, 2)\|} \\ \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AV} \wedge \overrightarrow{AC}) &= \frac{-2 + 4 + 4}{\sqrt{1 + 4 + 4} \times \sqrt{4 + 4 + 4}} \\ \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AV} \wedge \overrightarrow{AC}) &= \frac{6}{3\sqrt{12}} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AV} \wedge \overrightarrow{AC} &\approx 55^\circ.\end{aligned}$$

28.2

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Para determinar uma equação do plano que contém a base da pirâmide, vamos começar por determinar um vetor normal ao plano.

Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AC]$. Então

$$M = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{1-1}{2}, \frac{0+2}{2} \right) = (1, 0, 1).$$

Como $\overrightarrow{MV}$ é um vetor normal ao plano ABC e

$$\overrightarrow{MV} = V - M = (3, -1, 2) - (1, 0, 1) = (2, -1, 1),$$

a sua equação cartesiana é da forma

$$2x - y + z + d = 0,$$

onde $d \in \mathbb{R}$.

Substituindo $A(2, 1, 0)$ na equação temos

$$2 \times 2 - 1 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$$

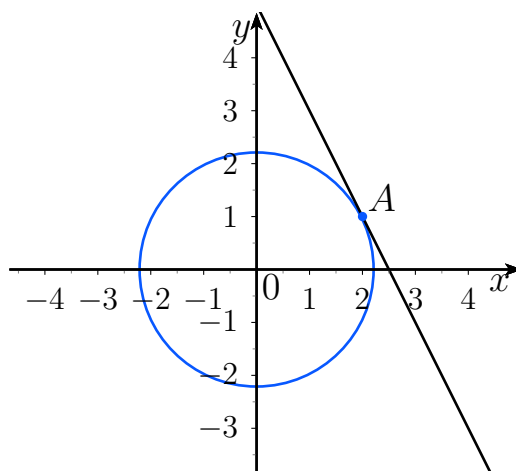
e podemos concluir que $2x - y + z - 3 = 0$ é uma equação do plano pretendido.

Resolução da pergunta 29

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 11](#)

Vídeo da resolução ([Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!](#)): 

Começemos por representar num referencial ortonormado os elementos descritos.



$$\overrightarrow{OA} = (2, 1) \Rightarrow m_{OA} = \frac{1}{2}.$$

Logo, como a reta tangente no ponto A é perpendicular à reta OA , o seu declive é igual a -2 .

Consequentemente, a sua equação reduzida é da forma $y = -2x + b$, onde $b \in \mathbb{R}$.

Substituindo nesta equação as coordenadas de A temos

$$1 = -4 + b \Leftrightarrow b = 5$$

e podemos concluir que a equação reduzida da reta r é $y = -2x + 5$.

Temos portanto que a ordenada na origem da reta r é 5.

A opção correta é a **(B)**.

Resolução da pergunta 33

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 12](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Temos

$$\overline{F_1 F_2} = 12 \Leftrightarrow 2c = 12 \Leftrightarrow c = 6.$$

Por outro lado, como a soma das distâncias aos focos de uma elipse é sempre igual ao comprimento do eixo maior $2a$ então

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 20 \Leftrightarrow 2a = 20 \Leftrightarrow a = 10.$$

Deste modo,

$$b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow b^2 = 100 - 36 \Leftrightarrow b^2 = 64$$

e podemos concluir que a equação da elipse centrada na origem é

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1.$$

A opção correta é a **(B)**.

Resolução da pergunta 31

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 12](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

$$\arcsin(1) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}.$$

A opção correta é a **(A)**.

Resolução da pergunta 32

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 12](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

$$u_3 = 4 \Leftrightarrow u_1 + 2r = 4 \Leftrightarrow u_1 = 4 - 2r.$$

$$\begin{aligned} S_{12} = 174 &\Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{12}}{2} \times 12 = 174 \\ &\Leftrightarrow u_1 + u_1 + 11r = 29 \\ &\Leftrightarrow 8 - 4r + 11r = 29 \\ &\Leftrightarrow r = 3. \end{aligned}$$

Logo, $u_n = u_3 + (n - 3) \times 3 = 3n - 5$.

$$u_n = 5371 \Leftrightarrow 3n = 5376 \Leftrightarrow n = 1792.$$

Como $1792 \in \mathbb{N}$, podemos concluir que 5371 é termo da sucessão (u_n) .

Resolução da pergunta 30

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 11](#)

30.1. Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

O ponto P é da forma $P(1, 3, z)$ com $z \in \mathbb{R}$.

Substituindo na equação da superfície esférica temos

$$\begin{aligned}(1 - 1)^2 + (3 - 2)^2 + (z + 1)^2 &= 10 \\ \Leftrightarrow (z + 1)^2 = 9 &\Leftrightarrow z = 2 \vee z = -4.\end{aligned}$$

Logo $P(1, 3, -4)$.

Sendo $\vec{r} = (4, 1, -2)$ um vetor diretor da reta r , a equação do plano é da forma $4x + y - 2z + d = 0$.

Substituindo as coordenadas de P vem

$$4 \times 1 + 3 - 2 \times (-4) + d = 0 \Leftrightarrow d = -15.$$

Podemos concluir que $4x + y - 2z - 15 = 0$ é uma equação do plano em causa.

30.2. Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Temos $C(1, 2, -1)$ e $A(1, 2, 1)$. Por outro lado, $\widehat{AOC} = \widehat{\vec{OA} \vec{OC}}$ e temos

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{\vec{OA} \vec{OC}}) &= \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OC}}{\|\vec{OA}\| \times \|\vec{OC}\|} \\ \Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{OA} \vec{OC}}) &= \frac{(1, 2, -1) \cdot (1, 2, 1)}{\sqrt{1+4+1} \times \sqrt{1+4+1}} \\ \Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{OA} \vec{OC}}) &= \frac{1+4-1}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} \\ \Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{OA} \vec{OC}}) &= \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow \widehat{\vec{OA} \vec{OC}} &\approx 48^\circ.\end{aligned}$$

Resolução da pergunta 36

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 13](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

$$\widehat{ACB} = 180^\circ - 57^\circ - 81^\circ = 42^\circ.$$

Pelo Teorema dos senos,

$$\begin{aligned}\frac{\sin 42^\circ}{\overline{AB}} &= \frac{\sin 81^\circ}{5} \\ \Leftrightarrow \overline{AB} &= \frac{5 \sin 42^\circ}{\sin 81^\circ} \\ \Rightarrow \overline{AB} &\approx 3.39.\end{aligned}$$

A opção correta é a **(C)**.

Resolução da pergunta 35

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 13](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Como

$$x + 1 = 2\lambda \wedge y = 2 - \lambda \wedge z = 3 \Leftrightarrow x = -1 + 2\lambda \wedge y = 2 - \lambda \wedge z = 3 \wedge z = 3$$

então podemos concluir que $A(-1, 2, 3)$ é um ponto de r e que $\vec{r} = (2, -1, 0)$ é um dos seus vetores diretores.

Nesta fase, como as opções **(A)** e **(D)** apresentam $\vec{r}$ como vetor diretor então estamos inclinados para estas opções.

Relativamente à opção **(A)**, averiguemos se $(3, 0, 3)$ é ponto de r .

Substituindo as suas coordenadas na equação da reta r dada temos

$$\frac{3 + 1}{2} = \frac{0 - 2}{-1} \wedge 3 = 3 \Leftrightarrow 2 = 2 \wedge 3 = 3.$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

Resolução da pergunta 34

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 12](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Uma vez que a região consiste na parte de um círculo centrado na origem de raio 2, os seus pontos (x, y) terão que satisfazer a condição

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4.$$

Como se encontra à esquerda ou na reta de equação $x = -1$ ou à direita ou na reta de equação $x = 1$ então terá também que se verificar a condição

$$x \leq -1 \vee x \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1.$$

Podemos concluir que, como se verificam cumulativamente as duas condições, a opção correta é a **(C)**.

Resolução da pergunta 37

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 13](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Como a , $a + 6$ e $a + 18$ são três termos consecutivos de uma progressão geométrica então

$$\frac{a+6}{a} = \frac{a+18}{a+6} \Leftrightarrow \frac{(a+6)^2 - (a+18)a}{a(a+6)} = 0$$
$$\Leftrightarrow -6a = -36 \wedge a(a+6) \neq 0 \Leftrightarrow a = 6.$$

Logo a razão da progressão geométrica é $\frac{6+6}{6} = 2$.
Por outro lado,

$$S_7 = 381 \Leftrightarrow a_1 \times \frac{1-2^7}{1-2} = 381 \Leftrightarrow a_1 = 3.$$

Temos portanto que o primeiro termo é 3.

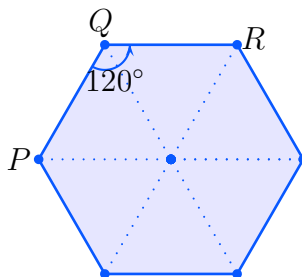
Resolução da pergunta 39

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 14](#)

39.1

Vídeo da resolução ([Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!](#)): 

Podemos observar na figura seguinte que $\widehat{PQR} = 120^\circ$.



Pela definição de produto escalar temos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} &= \|\overrightarrow{QP}\| \times \|\overrightarrow{QR}\| \times \cos(120^\circ) \\ &= 4 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -8.\end{aligned}$$

39.2

Vídeo da resolução ([Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!](#)): 

Vamos começar por determinar as coordenadas do ponto P , ponto de interseção da reta PS com o plano PQR .

Para isso, comecemos por notar que, como $\vec{n} = (2, 3, -1)$ é um vetor normal ao plano PQR , então $(x, y, z) = (14, 5, 0) + k(2, 3, -1)$, $k \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial da reta PS .

Temos portanto:

$$\begin{aligned}&\begin{cases} 2x + 3y - z - 15 = 0 \\ (x, y, z) = (14, 5, 0) + k(2, 3, -1) \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 2(14 + 2k) + 3(5 + 3k) - (-k) - 15 = 0 \\ (x, y, z) = (14 + 2k, 5 + 3k, -k) \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} k = -2 \\ (x, y, z) = (14 + 2k, 5 + 3k, -k) \end{cases}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ (x, y, z) = (10, -1, 2). \end{cases}$$

Podemos concluir que $P(10, -1, 2)$.

$$\begin{aligned} \overline{PS} &= \sqrt{(10 - 14)^2 + (-1 - 5)^2 + (2 - 0)^2} \\ &= \sqrt{56}. \end{aligned}$$

Deste modo, a área lateral (6 faces laterais) arredondada às décimas é

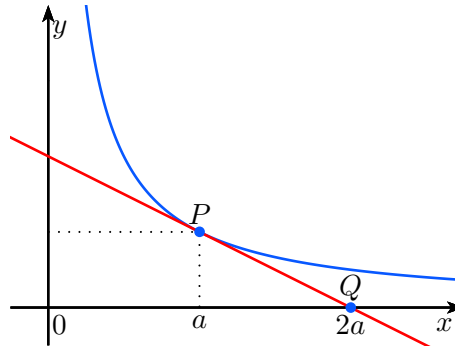
$$6 \times \overline{PQ} \times \overline{PS} = 6 \times 4 \times \sqrt{56} \approx 179.6.$$

[Voltar ao enunciado da pergunta](#)

Resolução da pergunta 38

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 13](#)

Começemos por notar que como $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$ então f é decrescente em $\mathbb{R}^+$. A título meramente ilustrativo, consideremos o gráfico da seguinte figura.



A hipótese de $\overline{OP} = \overline{PQ}$ traduz-se no facto de o triângulo $[OPQ]$ ser isósceles. Consequentemente, a abcissa de Q é o dobro da de P . O declive da reta PQ é portanto $m = \frac{0 - f(a)}{2a - a} = -\frac{f(a)}{a}$. Logo, $f'(a) = -\frac{f(a)}{a}$ e

$$f'(a) + \frac{f(a)}{a} = -\frac{f(a)}{a} + \frac{f(a)}{a} = 0.$$

Resolução da pergunta 40

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 14](#)

40.1 Como $T \in Oz$ então $T(0, 0, 3)$. A superfície esférica pretendida tem centro no ponto $(0, 0, 0)$. Assim, a sua equação é $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

40.2 Temos $\overrightarrow{UP} = \overrightarrow{TO} = O - T = (0, 0, -3)$ e $\overrightarrow{RS} = -\overrightarrow{TO} = (0, 0, 3)$. Assim, $\overrightarrow{UP} \cdot \overrightarrow{RS} = (-0, 0, -3) \cdot (0, 0, 3) = 0 + 0 - 9 = -9$.

40.3 Começemos por notar que Q é o ponto de interseção de PQV com Oy .

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x = 0 \wedge z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \wedge z = 0 \end{cases}$$

Logo, $Q(0, 2, 0)$.

Por outro lado, $\overrightarrow{TQ} = Q - T = (0, 2, 0) - (0, 0, 3) = (0, 2, -3)$. Assim, a reta TQ pode ser definida, por exemplo, pela equação vetorial

$$(x, y, z) = (0, 2, 0) + k(0, 2, -3), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Resolução da pergunta 41

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 15](#)

Como para $n \leq 20$ temos $1 \leq u_n \leq 20$ e para $n > 20$ temos $-1 \leq u_n \leq 1$ então $-1 \leq u_n \leq 20, \forall n \in \mathbb{N}$.
A opção correta é a (C).

Resolução da pergunta 42

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 15](#)

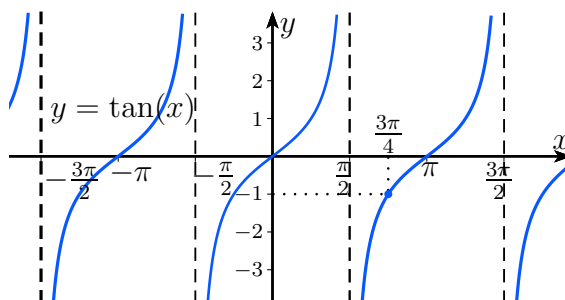
$$\begin{aligned}1 + \tan^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} - 1 \\&\Leftrightarrow \tan^2 \alpha = 4 \Leftrightarrow \tan \alpha = \pm 2.\end{aligned}$$

Como o declive da reta r é igual a $\tan \alpha$ então, apenas a alternativa **(C)** pode ser válida.

Resolução da pergunta 43

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 15](#)

Na figura em baixo está representado parte do gráfico da função tangente.



Podemos observar na figura que para $x \in]\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}[$ temos $f(x) \in]-1, +\infty[$.
A opção correta é a (B).

Resolução da pergunta 44

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 15](#)

44.1 Um vetor normal do plano α é $\vec{n} = (3, 2, 4)$.

Consequentemente, $\vec{n}$ é um vetor diretor de qualquer reta perpendicular ao plano α .

Uma equação vetorial da reta pretendida é portanto

$$(x, y, z) = (2, 1, 4) + k(3, 2, 4), k \in \mathbb{R}.$$

44.2 Como $\overrightarrow{OD} = D - O = (4, 2, 2)$, uma equação vetorial da reta OD é

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(4, 2, 2), k \in \mathbb{R}.$$

Vamos agora resolver o sistema seguinte para obter o ponto de interseção da reta OD com o plano α :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (x, y, z) = (0, 0, 0) + k(4, 2, 2) \\ 3x + 2y + 4z - 12 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (x, y, z) = (4k, 2k, 2k) \\ 3 \times 4k + 2 \times 2k + 4 \times 2k - 12 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (x, y, z) = (4k, 2k, 2k) \\ 24k = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y, z) = (2, 1, 1) \\ k = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Podemos concluir que o ponto de interseção da reta OD com o plano α é $(2, 1, 1)$.

44.3 Como $A(a, 0, 0)$ e $B(0, b, 0)$ para $a > 0$ e $b > 0$ então temos:

- $3a + 2 \times 0 + 4 \times 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow a = 4$;
- $3 \times 0 + 2b + 4 \times 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow b = 6$.

Logo $A(4, 0, 0)$ e $B(0, 6, 0)$.

Seja $P(0, 0, c)$ com $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Como $\overrightarrow{PA} = A - P = (4, 0, 0) - (0, 0, c) = (4, 0, -c)$

e $\overrightarrow{PB} = B - P = (0, 6, 0) - (0, 0, c) = (0, 6, -c)$ então

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 4 \times 0 + 0 \times 6 - c \times (-c) = c^2.$$

Como $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ então $c^2 > 0$.

Como o produto escalar é positivo então o ângulo $\widehat{APB}$ é agudo.

Resolução da pergunta 45

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 16](#)

Numa progressão geométrica (u_n) de razão r temos $u_n = u_k \times r^{n-k}$. Logo,

$$u_8 = u_4 \times r^{8-4} \Leftrightarrow r^4 = \frac{8192}{32} \Leftrightarrow r = \pm \sqrt[4]{256} \Leftrightarrow r = \pm 4$$

e podemos concluir que

$$u_n = u_4 \times 4^{n-4} = 32 \times 4^{n-4}$$

e que $u_5 = 32 \times 4^{5-4} = 128$.

A opção correta é a (B).

Resolução da pergunta 46

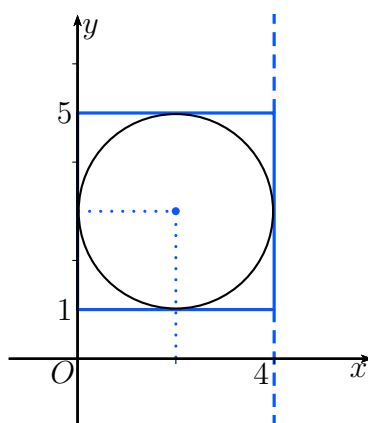
[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 16](#)

A figura em baixo ilustra a situação.

Temos portanto uma circunferência de centro $(2, 3)$ e raio 2 definida pela equação

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4.$$

A opção correta é a (C).



Resolução da pergunta 47

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 16](#)

Como

$$\left(2x \sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{x}\right)^2 = 4x^2 \sin^2 \alpha + 4 \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{x^2}$$

então o termo independente de x é $4 \sin \alpha \cos \alpha$.

Para prosseguir, temos que usar uma fórmula do 12.º ano: $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin(2\alpha)$. Deste modo,

$$\begin{aligned} 4 \sin \alpha \cos \alpha = 1 &\Leftrightarrow 2 \times 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 \\ \Leftrightarrow \sin(2\alpha) &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(2\alpha) = \sin \frac{\pi}{6} \\ \Leftrightarrow \alpha &= \frac{\pi}{12} + k\pi \vee \alpha = \frac{5\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Vamos agora atribuir valores inteiros a k em

$\alpha = \frac{\pi}{12} + k\pi$ de modo a encontrar as soluções pertencentes ao intervalo $] \pi, 2\pi[$:

- para $k = 0$ temos $\alpha = \frac{\pi}{12} \notin] \pi, 2\pi[$;
- para $k = 1$ temos $\alpha = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12} \in] \pi, 2\pi[$;
- para $k = 2$ temos $\alpha = \frac{\pi}{12} + 2\pi = \frac{25\pi}{12} \notin] \pi, 2\pi[$.

No caso de $\alpha = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ temos:

- para $k = 0$ temos $\alpha = \frac{5\pi}{12} \notin] \pi, 2\pi[$;
- para $k = 1$ temos $\alpha = \frac{5\pi}{12} + \pi = \frac{17\pi}{12} \in] \pi, 2\pi[$;
- para $k = 2$ temos $\alpha = \frac{5\pi}{12} + 2\pi = \frac{29\pi}{12} \notin] \pi, 2\pi[$.

Podemos concluir que os valores de α para os quais o termo independente de x é igual a 1 são $\frac{13\pi}{12}$ e $\frac{17\pi}{12}$.

Resolução da pergunta 49

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 17](#)

49.1 O ponto C é o ponto de interseção de Oy com o plano ACG . Deste modo,

$$\begin{cases} x = 0 \wedge z = 0 \\ x + y - z - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ y = 6 \end{cases}$$

Logo $C(0, 6, 0)$ e podemos concluir que o lado do cubo mede $\overline{DC} = 2$ unidades de comprimento. Deste modo, $A(2, 4, 0)$ e conclui-se que a abcissa de A é 2.

49.2 O ponto pretendido é a solução do sistema seguinte.

$$\begin{cases} (x, y, z) = (1, 1, 0) + k(1, -1, 1) \\ x + y - z - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 1 - k \\ z = k \\ \text{---} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 + k + 1 - k - k - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \\ z = -4 \\ k = -4 \end{cases}$$

Podemos concluir que o ponto de interseção é $(-3, 5, -4)$.

49.3 A figura seguinte ilustra a situação. Como a área da base da pirâmide é $2 \times 2 = 4$, o seu volume ser 4 implica que, sendo h a sua altura $\frac{4 \times h}{3} = 4 \Leftrightarrow h = 3$. Logo $P(1, 5, 5)$.

Assim, $\cos(\widehat{OGP}) = \frac{\overrightarrow{GO} \cdot \overrightarrow{GP}}{\|\overrightarrow{GO}\| \times \|\overrightarrow{GP}\|}$.

$$\overrightarrow{GO} = O - G = (0, 0, 0) - (2, 6, 2) = (-2, -6, -2).$$

$$\overrightarrow{GP} = P - G = (1, 5, 5) - (2, 6, 2) = (-1, -1, 3).$$

Logo,

$$\cos(\widehat{OGP}) = \frac{(-2, -6, -2) \cdot (-1, -1, 3)}{\sqrt{4 + 36 + 4} \times \sqrt{1 + 1 + 9}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{OGP}) = \frac{2 + 6 - 6}{\sqrt{44} \times \sqrt{11}}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{OGP} \approx 85^\circ.$$

Resolução da pergunta 48

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 16](#)

Como

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1-(n+1)}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$$

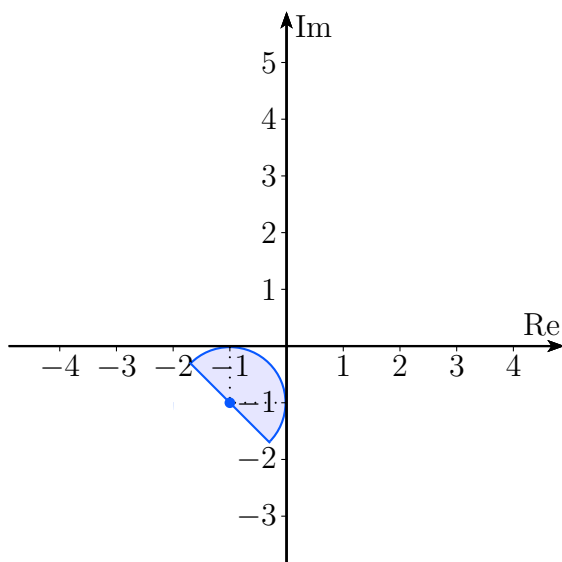
então (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$
A opção correta é a (B).

Resolução da pergunta 50

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 17](#)

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 1 \wedge x + y + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 1 \wedge y \geq -x - 2.$$

Temos portanto a interseção de um círculo de centro $(-1, -1)$ e raio 1 intersectado com o semi-plano superior, limitado inferiormente por $y = -x - 2$.



O perímetro da região é igual a metade do perímetro do círculo mais o seu diâmetro:

$$\frac{2\pi \times 1}{2} + 2 = \pi + 2.$$

A opção correta é a (C).

Resolução da pergunta 52

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 18](#)

Observamos no gráfico de g que 2 é o único zero de g . Consequentemente, $g(2) = 0$ e

$$g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5.$$

A opção correta é a (B).

Resolução da pergunta 51

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 18](#)

51.1 Uma vez que o centro da superfície esférica é o ponto A , que tem cota 1, então o seu raio é 1.

Consequentemente, a sua equação é

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1.$$

51.2 Como a pirâmide é quadrangular regular então V tem a mesma abcissa e ordenada que o ponto médio do segmento de reta $[AC]$:

$$\begin{aligned} M_{[AC]} &= \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}, \frac{z_A + z_C}{2} \right) \\ &= \left(\frac{-1 - 3}{2}, \frac{1 + 3}{2}, \frac{1 + 1}{2} \right) = (-2, 2, 1). \end{aligned}$$

Logo, o ponto $V(-2, 2, c)$ onde $c \in \mathbb{R}$.

Substituindo este ponto na equação do plano BCV vem

$$3 \times 2 + c - 10 = 0 \Leftrightarrow c = 4.$$

Podemos assim concluir que $V(-2, 2, 4)$.

51.3 Como o plano α é perpendicular à reta AC e

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-3, 3, 1) - (-1, 1, 1) = (-2, 2, 0)$$

então é da forma $-2x + 2y + 0z + d = 0$ onde d é uma constante real.

Substituindo as coordenadas de $P(1, -2, -1)$ nesta equação vem

$$-2 \times 1 + 2 \times (-2) + d = 0 \Leftrightarrow d = 6$$

e podemos concluir que uma equação do plano α é $-2x + 2y + 6 = 0$.

Para encontrar uma equação da reta que resulta da interseção dos planos α e BCV vamos resolver o sistema

$$\begin{aligned} \begin{cases} -2x + 2y + 6 = 0 \\ 3y + z - 10 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 2x - 6 \\ 3y = -z + 10 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ y = \frac{-z + 10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x - 3 = y = \frac{z - 10}{-3} \\ &\Leftrightarrow \frac{x - 3}{1} = \frac{y - 0}{1} = \frac{z - 10}{-3}. \end{aligned}$$

Obtivemos uma equação cartesiana da reta pretendida e podemos concluir que a reta contém o ponto $(3, 0, 10)$ e tem a direção do vetor $(1, 1, -3)$.

Uma equação vetorial desta reta é

$$(x, y, z) = (3, 0, 10) + k(1, 1, -3), \quad k \in \mathbb{R}.$$

[Voltar ao enunciado da pergunta](#)

Resolução da pergunta 53

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 19](#)

Uma vez que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° temos

$$\begin{aligned} \widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{ABC} &= 180^\circ \Leftrightarrow 75^\circ \times 2 + \widehat{ABC} = 180^\circ \\ \Leftrightarrow \widehat{ABC} &= 30^\circ. \end{aligned}$$

Pela definição de produto escalar temos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= \|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos(\widehat{ABC}) \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

A opção correta é a (C).

Resolução da pergunta 56

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 20](#)

56.1 O ponto V tem como coordenadas $(1, 1, c)$ onde $c \in \mathbb{R}$ uma vez que, como a pirâmide é regular, a projeção de V no plano xOy é $(1, 1, 0)$. Por outro lado, como V pertence ao plano PQV terá que verificar a sua equação geral:

$$6 \times 1 + c - 12 = 0 \Leftrightarrow c = 6.$$

Podemos portanto concluir que $V(1, 1, 6)$.

56.2 Como o plano é perpendicular à reta OR então admite como vetor normal

$$\vec{n} = \overrightarrow{OR} = R - O = (2, 2, 2) - (0, 0, 0) = (2, 2, 2).$$

Assim, a sua equação geral é da forma $2x + 2y + 2z + d = 0$ onde $d \in \mathbb{R}$. Substituindo as coordenadas de $P(2, 0, 0)$ nesta equação vem

$$2 \times 2 + 2 \times 0 + 2 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -4$$

e podemos concluir que a equação geral do plano pedido é $2x + 2y + 2z - 4 = 0$.

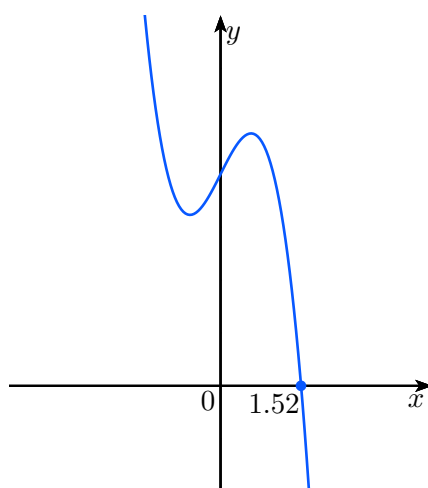
56.3 Como o plano QRS é perpendicular a Oy tem de equação $y = 2$. Consequentemente

$A(a, 2, c)$ para $a, c \in \mathbb{R}$. A hipótese de a cota de A ser igual ao cubo da abscissa traduz-se na igualdade $c = a^3$. Nesta fase já sabemos que $A(a, 2, a^3)$ para $a \in \mathbb{R}$.

Como $\overrightarrow{OA} = A - O = (a, 2, a^3)$ e $\overrightarrow{TQ} = Q - T = (2, 2, 0) - (0, 0, 2) = (2, 2, -2)$ então os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{TQ}$ são perpendiculares se e só se

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{TQ} = 0 \Leftrightarrow (a, 2, a^3) \cdot (2, 2, -2) = 0 \Leftrightarrow 2a + 4 - 2a^3 = 0.$$

A figura seguinte apresenta parte do gráfico de $y = 2a + 4 - 2a^3$ obtido numa calculadora gráfica conjuntamente com o seu zero no intervalo $[-4, 4]$.



Podemos concluir que a abscissa de A arredondada às centésimas é 1.52.

[Voltar ao enunciado da pergunta](#)

Resolução da pergunta 57

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 20](#)

Como $-1 \leq -\frac{1}{n} < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ podemos concluir que $u_n = -\frac{1}{n}$ é o termo geral de uma sucessão limitada.

Por outro lado, como

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -\frac{1}{n+1} - \left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{-n + n + 1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

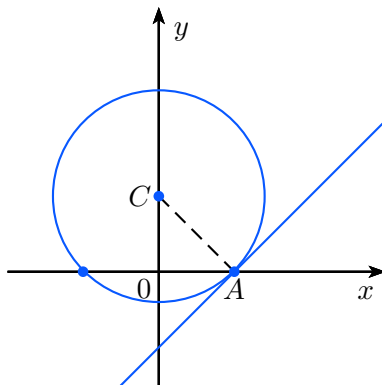
podemos concluir que (u_n) é uma sucessão monótona crescente.

A opção correta é a (C).

Resolução da pergunta 54

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 19](#)

A circunferência de equação $x^2 + (y - 1)^2 = 2$ tem centro no ponto $(0, 1)$ e raio $\sqrt{2}$. A figura seguinte ilustra a circunferência e a reta r , tangente à circunferência no ponto A .



As coordenadas dos pontos de interseção da circunferência com o eixo Ox podem ser através do sistema seguinte

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 = 2 \\ y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (0 - 1)^2 = 2 \\ y = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \vee x = -1 \\ y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Podemos concluir que $A(1, 0)$.

A reta r é perpendicular à reta CA . Como $M_{CA} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{0 - 1}{1 - 0} = -1$ então o declive da reta r é $m = -\frac{1}{-1} = 1$. Deste modo, a equação reduzida da reta r é da forma $y = x + b$ para $b \in \mathbb{R}$. Substituindo as coordenadas de A na equação vem

$$0 = 1 + b \Leftrightarrow b = -1$$

e podemos concluir que a equação reduzida da reta é $y = x - 1$.

Podemos concluir que a opção correta é a (B).

Resolução da pergunta 60

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 22](#)

60.1. Um vetor normal ao plano α é $\vec{n} = (1, -2, 1)$.

Como planos paralelos têm vetores normais perpendiculares, o plano pretendido também tem $\vec{n}$ como vetor normal. Consequentemente é da forma

$$x - 2y + z + d = 0$$

onde d é uma constante real.

Substituindo nesta equação as coordenadas do ponto $A(0, 0, 2)$ vem

$$0 - 2 \times 0 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$$

e podemos concluir que uma equação do plano paralelo ao plano α que contém o ponto A é $x - 2y + z - 2 = 0$.

60.2. O centro da circunferência pretendida é o ponto médio de $[AB]$:

$$\begin{aligned} M_{[AB]} &= \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right) \\ &= \left(\frac{0 + 4}{2}, \frac{0 + 0}{2}, \frac{2 + 0}{2} \right) = (2, 0, 1). \end{aligned}$$

O seu raio é metade da distância entre A e B :

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2} \overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(0 - 4)^2 + (0 - 0)^2 + (2 - 0)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{20}. \end{aligned}$$

A equação da superfície esférica pretendida é

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 &= \left(\frac{1}{2} \sqrt{20} \right)^2 \\ \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 &= 5. \end{aligned}$$

60.3. Nas condições apresentadas podemos considerar que $P(4, b, 0)$ onde $b > 0$.

Por outro lado, como $\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 0, -2)$ e $\overrightarrow{AP} = P - A = (4, b, -2)$

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{BAP}) &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AP}|} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{16 + 0 + 4}{\sqrt{20} \times \sqrt{20 + b^2}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\sqrt{20} \times \sqrt{20 + b^2} \right) &= 20 \Leftrightarrow 20(20 + b^2) = 40^2 \\ \Leftrightarrow b^2 &= 60 \Leftrightarrow b = \pm 2\sqrt{15}. \end{aligned}$$

Como a ordenada de P é positiva então $b = 2\sqrt{15}$.

Resolução da pergunta 55

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 19](#)

Trata-se de uma sucessão definida por recorrência.

$$u_2 = -3u_1 + 2 = -3a + 2; u_3 = -3u_2 + 2 = -3(-3a + 2) + 2 = 9a - 4.$$

A opção correta é a **(B)**.

Resolução da pergunta 61

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 22](#)

Como o triângulo é equilátero então $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Consequentemente, o declive da reta AB é

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}.$$

Como a ordenada na origem da reta AB é negativa, **(D)** é a opção correta.

Resolução da pergunta 62

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 23](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 58

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 21](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 59

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 21](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 63

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 24](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 64

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 25](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 68

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 28](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 65

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 26](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 67

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 27](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 69

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 29](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 70

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 30](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 66

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 26](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 71

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 31](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 72

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 31](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 74

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 31](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 73

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 31](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 75

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 31](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 76

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 32](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 77

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 32](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 