Análise combinatória - Exames Nacionais

Perguntas de Exames Nacionais dos últimos 16 anos com resolução e/ou vídeo.
Versão de 31 de dezembro de 2021.
Verifique se existe versão com data mais recente aqui e aceda a mais fichas aqui.

1. Considere, num plano α, duas retas paralelas r e s.
Assinalam-se, na reta r, cinco pontos distintos e, na reta s, um certo número n de pontos, igualmente distintos.
Sabe-se que, com os pontos assinalados nas duas retas, é possível definir exatamente 175 triângulos.
Determine o valor de n.

Resolução, pg. 7

Exame nacional de 2021 - 2.ª fase

2. O corfebol é um desporto coletivo misto, com origem na Holanda.
Um clube de corfebol de um certo país vai participar num torneio internacional.
A comitiva vai deslocar-se por via terrestre, utilizando um automóvel de cinco lugares e uma carrinha de nove lugares. A comitiva é constituída por três dirigentes, um treinador, cinco jogadores do sexo masculino e cinco do sexo feminino.
Escreva uma expressão que dê o número de maneiras diferentes de distribuir os catorze elementos da comitiva pelos catorze lugares disponíveis, sabendo-se que os dois condutores são dois dos dirigentes e que, no automóvel, vão dois jogadores de cada sexo.

Resolução, pg. 8

Exame nacional de 2021 - 1.ª fase

3. Considere todos os números naturais superiores a 9999 e inferiores a 22000.
Destes números, quantos se podem escrever com os algarismos $0,\ 1,\ 2$ e 3?

(A) 192 **(B)** 236 **(C)** 384 **(D)** 512

Resolução, pg. 9 Exame nacional de 2020 - 2.ª fase

4. Um saco contém oito bolas azuis e sete bolas brancas, indistinguíveis ao tato. Cada bola tem uma única cor e só existem bolas azuis e bolas brancas no saco.
Pretende-se colocar todas estas bolas em dez caixas numeradas de 1 a 10, de tal forma que:

- cada caixa com número par tenha, pelo menos, uma bola azul;
- cada caixa com número ímpar tenha, pelo menos, uma bola branca;
- cada caixa tenha, no máximo, duas bolas.

Nestas condições, de quantas maneiras diferentes podem ficar colocadas as bolas nas dez caixas?

(A) 1176 **(B)** 2520 **(C)** 28016 **(D)** 30550

Resolução, pg. 10 Exame nacional de 2020 - 1.ª fase

5. Uma escola secundária tem apenas turmas de 10.°, 11.° e 12.° anos.
Uma turma dessa escola tem 26 alunos, dos quais 15 são raparigas.
O delegado de turma é um rapaz.
Pretende-se formar uma comissão com três alunos desta turma, para organizar uma festa de fim de ano.
Quantas comissões diferentes, que incluam rapazes e raparigas, se podem formar, sabendo-se que o delegado de turma tem de fazer parte da comissão?

(A) 195 **(B)** 215 **(C)** 235 **(D)** 255

Resolução, pg. 11 Exame nacional de 2019 - 2.ª fase

6. Considere todos os números naturais de sete algarismos que se podem escrever utilizando dois algarismos 5, quatro algarismos 6 e um algarismo 7.
Determine quantos destes números são ímpares e maiores do que seis milhões.

Resolução, pg. 12 Exame nacional de 2019 - 1.ª fase

7. Dispõe-se de catorze caracteres (a saber: os algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ e as vogais a, e, i, o, u) para formar códigos de quatro caracteres.
Quantos códigos iniciados por uma vogal seguida de três algarismos diferentes se podem formar?

(A) 420 **(B)** 504 **(C)** 1840 **(D)** 2520

Resolução, pg. 13

Exame nacional de 2018 - 2.ª fase

8. Considere todos os números naturais de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9.
Destes números, quantos são múltiplos de 5?

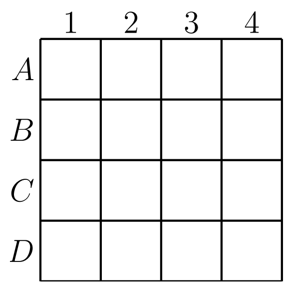
(A) 729 **(B)** 1458 **(C)** 3645 **(D)** 6561

Resolução, pg. 14

Exame nacional de 2017 - 2.ª fase

9. Na figura, está representado um tabuleiro com 16 casas, dispostas em quatro filas horizontais (A, B, C e D) e em quatro filas verticais (1, 2, 3 e 4).

Pretende-se dispor as nove fichas (numeradas de 1 a 9) no tabuleiro, de modo que cada ficha ocupe uma única casa e que cada casa não seja ocupada por mais do que uma ficha.
De quantas maneiras diferentes é possível dispor as nove fichas, de tal forma que as que têm número par ocupem uma única fila horizontal?



Resolução, pg. 15

Exame nacional de 2017 - 1.ª fase

10. Considere todos os números naturais de cinco algarismos diferentes que se podem formar com os algarismos $1, 2, 3, 4$ e 5.
Destes números, quantos têm os algarismos pares um a seguir ao outro?

(A) 24 **(B)** 48 **(C)** 72 **(D)** 92

Resolução, pg. 16

Exame nacional de 2016 - 2.ª fase

11. Dois rapazes e quatro raparigas vão sentar-se num banco corrido com seis lugares.
De quantas maneiras o podem fazer, de modo que fique um rapaz em cada extremidade do banco?

(A) 12 **(B)** 24 **(C)** 48 **(D)** 60

Resolução, pg. 17

Exame nacional de 2015 - 1.ª fase

12. O código de um auto-rádio é constituído por uma sequência de quatro algarismos. Por exemplo, 0137.
Quantos desses códigos têm dois e só dois algarismos iguais a 7?

(A) 486 **(B)** 810 **(C)** 432 **(D)** 600

Resolução, pg. 18 Exame nacional de 2011 - 1.ª fase

13. Considere as 13 cartas do naipe de copas: ás, três figuras (rei, dama e valete) e mais nove cartas (do 2 ao 10).
As cartas vão ser dispostas, ao acaso, sobre uma mesa, lado a lado, de modo a formarem uma sequência de 13 cartas.
Determine o número de sequências diferentes que é possível construir, de modo que as três figuras fiquem juntas.

Resolução, pg. 19 Exame nacional de 2011 - Época especial

14. Considere todos os números de cinco algarismos que se podem formar com os algarismos 5, 6, 7, 8 e 9.
De entre estes números, quantos têm, exatamente, três algarismos 5?

(A) ${}^5C_3 \times {}^4A_2$ **(B)** ${}^5C_3 \times 4^2$ **(C)** ${}^5A_3 \times 4^2$ **(D)** ${}^5A_3 \times {}^4C_2$

Resolução, pg. 20 Exame nacional de 2010 - 2.ª fase

15. De um bilhete de lotaria sabe-se que o seu número é formado por sete algarismos, dos quais três são iguais a 1, dois são iguais a 4 e dois são iguais a 5 (por exemplo: 1551414).
Determine quantos números diferentes satisfazem as condições anteriores.

Resolução, pg. 24 Exame nacional de 2009 - 1.ª fase

16. Uma turma é constituída por 27 alunos, dos quais 17 são rapazes. A Maria e o Manuel são alunos dessa turma. A professora de Português vai escolher, ao acaso, um grupo de cinco alunos para definirem as regras de um Jogo de Palavras.
Determine quantos grupos diferentes se podem formar, sabendo que em cada grupo tem de estar, pelo menos, um aluno de cada sexo.

Resolução, pg. 21 Exame nacional de 2010 - Época Especial

17. Considere um baralho com 52 cartas, repartidas por quatro naipes (Copas, Ouros, Espadas e Paus). Em cada naipe, há um Ás, três figuras (uma Dama, um Valete, um Rei) e mais nove cartas (do Dois ao Dez).
Retiram-se cinco cartas do baralho, que são colocadas lado a lado, em cima de uma mesa, segundo a ordem pela qual vão sendo retiradas.

Quantas sequências se podem formar com as cinco cartas retiradas, caso a primeira carta e a última carta sejam ases, e as restantes sejam figuras?

Resolução, pg. 22 Exame nacional de 2009 - 2.ª fase

18. A Rita tem oito livros, todos diferentes, sendo três de Matemática, três de Português e dois de Biologia. A Rita pretende arrumar, numa prateleira, os oito livros, uns a seguir aos outros.
De quantas maneiras diferentes o pode fazer, ficando os livros de Matemática todos juntos numa das pontas?
(A) 72 **(B)** 240 **(C)** 720 **(D)** 1440

Resolução, pg. 23 Exame nacional de 2010 - Época Especial

19. Considere o conjunto $A = \{1, 3, 5, 6, 8\}$.
Com os elementos do conjunto A, quantos números pares de quatro algarismos se podem formar, que tenham dois e só dois algarismos iguais a 5?

Resolução, pg. 25 Exame nacional de 2009 - 1.ª fase

20. Considere uma turma de uma escola secundária, com 8 rapazes e 12 raparigas.
Pretende-se eleger o Delegado e o Subdelegado da turma. De quantas maneiras se pode fazer essa escolha, de modo a que os alunos escolhidos sejam de sexos diferentes?
(A) 96 **(B)** 190 **(C)** 192 **(D)** 380

Resolução, pg. 26 Exame nacional especial de 2009

21. Uma turma do 12.° ano de uma Escola Secundária está a organizar uma viagem de finalistas. A turma é constituída por doze raparigas e dez rapazes, que pretendem formar uma comissão organizadora da viagem. Sabe-se que a comissão terá obrigatoriamente três raparigas e dois rapazes. A Ana e o Miguel, alunos da turma, não querem fazer parte da comissão em simultâneo. Explique, numa composição, que o número de comissões diferentes que se pode formar é dado por:

$$^{12}C_3 \times {}^{10}C_2 - {}^{11}C_2 \times 9.$$

Resolução, pg. 27 Exame nacional de 2008 - 1.ª fase

22. Quantos números ímpares, de quatro algarismos diferentes, se pode formar com os algarismos 1, 3, 5 e 8?
(A) 4 **(B)** 6 **(C)** 18 **(D)** 24

Resolução, pg. 28 Exame Nacional da época especial de 2008

23. Três rapazes, o João, o Rui e o Paulo, e três raparigas, a Ana, a Maria e a Francisca, decidem passar a tarde juntos.
De quantas maneiras se podem sentar os seis amigos, uns ao lado dos outros, num banco corrido com seis lugares, ficando um rapaz em cada uma das extremidades?

Resolução, pg. 29 Exame Nacional da época especial de 2008

24. Considere todos os números de três algarismos que se podem formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.
Considere o seguinte problema:
"De entre todos os números de três algarismos diferentes que se podem formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, em quantos deles o produto dos seus algarismos é um número par?
Uma resposta correta a este problema é: ${}^9A_3 - {}^5A_3$.
Numa pequena composição explique porquê."

Resolução, pg. 30 Exame nacional de 2007 - 1.ª fase

25. Quatro raparigas e quatro rapazes entram num autocarro, no qual existem seis lugares sentados, ainda não ocupados.
De quantas maneiras diferentes podem ficar ocupados esses seis lugares, supondo que ficam dois rapazes em pé?

(A) 3560 **(B)** 3840 **(C)** 4180 **(D)** 4320

Resolução, pg. 31 Exame nacional de 2006 - 2.ª fase

26. Quantos números naturais, escritos com algarismos todos diferentes, existem entre os números 1000 e 3000?

(A) 992 **(B)** 998 **(C)** 1002 **(D)** 1008

Resolução, pg. 32 Exame nacional de 2006 - 1.ª fase

Resoluções

Resolução da pergunta 1

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1

Podemos formar um triângulo escolhendo:

- dois pontos da reta r e um ponto da reta s – há ${}^5C_2 \times n$ possibilidades;
- dois pontos da reta S e um ponto da reta r – há $5 \times {}^nC_2$ possibilidades.

A solução da equação seguinte dá-nos o valor de n pedido.

$$
\begin{aligned}
&{}^5C_2 \times n + 5 \times {}^nC_2 = 175 \Leftrightarrow 10n + 5 \times \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} = 175 \\
&\Leftrightarrow 10n + 5 \times \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{(n-2)! \times 2!} = 175 \Leftrightarrow 10n + \frac{5}{2}n(n-1) = 175 \\
&\Leftrightarrow 20n + 5n^2 - 5n = 350 \Leftrightarrow n^2 + 3n - 70 = 0 \Leftrightarrow n = -10 \vee n = 7.
\end{aligned}
$$

Podemos concluir que $n = 7$.

Resolução da pergunta 2

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1

O esquema seguinte explica a situação.

${}^3A_2 \times {}^5C_2 \times {}^5C_2 \times 4! \times 8!$ modos de distribuir os 14 elementos.

Permutação dos 8 jogadores na carrinha

Permutação dos 4 jogadores no automóvel

Há ${}^5C_2$ possibilidades de escolher 2 homens entre os 5 disponíveis

Há ${}^5C_2$ possibilidades de escolher 2 mulheres entre as 5 disponíveis

n.º de possibilidades de distribuir 2 condutores escolhidos entre os 3

Resolução da pergunta 3

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

Vídeo da resolução:

Todos os números de 5 algarismos 0, 1, 2 e 3 iniciados por 1 enquadram-se entre 9999 e 22000. Ilustremos a situação com um esquema.

$$\begin{array}{ccccc} \underline{\;\;1\;\;} & \underline{\;\;\;\;\;\;} & \underline{\;\;\;\;\;\;} & \underline{\;\;\;\;\;\;} & \underline{\;\;\;\;\;\;} \\ 1 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{array}$$

Temos portanto 4^4 possibilidades.
Para os números de 5 algarismos iniciados por 2 se enquadrarem entre 9999 e 22000, o segundo algarismo deve ser 0 ou 1. Ilustremos a situação com um esquema.

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & & & \\ \underline{\;\;2\;\;} & \underline{\;\;0\;\;} & \underline{\;\;\;\;\;\;} & \underline{\;\;\;\;\;\;} & \underline{\;\;\;\;\;\;} \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 4 \end{array}$$

Temos portanto 2×4^3 possibilidades.
No total temos $4^4 + 2 \times 4^3 = 384$ números nas condições pretendidas.
A opção correta é a **(C)**.

Resolução da pergunta 4

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Notemos que há 5 caixas com número ímpar e 5 caixas com número par. Colocando uma bola azul em cada caixa com número par sobram 3 bolas azuis, das 8 iniciais, para colocar nas 10 caixas. De forma semelhante, colocando uma bola branca em cada caixa com número ímpar sobram 2 bolas brancas, das 7 iniciais, para colocar nas 7 caixas sobrantes, uma vez que cada caixa tem no máximo 2 bolas. Temos portanto

$$^{10}C_3 \times {}^7C_2 = 2520$$

possibilidades.
A opção correta é a **(B)**.

Resolução da pergunta 5

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

Vídeo da resolução:

A turma tem 15 raparigas e $26 - 15 = 11$ rapazes.
Se a comissão inclui rapazes e raparigas e o delegado de turma pertence à comissão, temos as seguintes possibilidades:

- delegado e 2 raparigas: ${}^{15}C_2 = 105$ comissões;
- delegado, outro rapaz e 1 rapariga: ${}^{10}C_1 \times {}^{15}C_1 = 150$.

No total temos $105 + 150 = 255$ comissões nas condições apresentadas.
Podemos concluir que a opção correta é a **(D)**.

Resolução da pergunta 6

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Comecemos por notar que, para os números serem:

- ímpares, o último algarismo deve ser 5 ou 7;
- superiores a seis milhões, o primeiro algarismo deve ser 6 ou 7.

A divisão das diferentes situações em três casos e a respetiva esquematização clarificam a resolução do problema.
Caso 1: o primeiro algarismo é 6 e o último 5:
O esquema seguinte exemplifica a situação.

$$\underline{\ 6\ }\ \ \underline{\ 5\ }\ \ \underline{\ 6\ }\ \ \underline{\ 7\ }\ \ \underline{\ 6\ }\ \ \underline{\ 6\ }\ \ \underline{\ 5\ }$$

Como nos algarismos que não estão nos extremos há três algarismos iguais a 6 então há $\frac{5!}{3!}$ números nestas condições.
Caso 2: o primeiro algarismo é 6 e o último 7:

O esquema seguinte exemplifica a situação.

$$\underline{\ 6\ }\ \ \underline{\ 5\ }\ \ \underline{\ 6\ }\ \ \underline{\ 5\ }\ \ \underline{\ 6\ }\ \ \underline{\ 6\ }\ \ \underline{\ 7\ }$$

Como nos algarismos que não estão nos extremos há três algarismos iguais a 6 e dois iguais a 5 então há $\frac{5!}{2!3!}$ números nestas condições.
Caso 3: o primeiro algarismo é 7 e o último 5:

O esquema seguinte exemplifica a situação.

$$\underline{\ 7\ }\ \ \underline{\ 5\ }\ \ \underline{\ 6\ }\ \ \underline{\ 6\ }\ \ \underline{\ 6\ }\ \ \underline{\ 6\ }\ \ \underline{\ 5\ }$$

Como nos algarismos que não estão nos extremos há quatro algarismos iguais a 6 então, apenas a troca da posição do 5 origina números diferentes. Há 5 números nestas condições.
No total temos $\frac{5!}{3!} + \frac{5!}{2!3!} + 5 = 35$ números.

Resolução da pergunta 7

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Vamos recorrer ao esquema seguinte e ao Princípio fundamental da contagem para resolver o problema

$$\underset{5}{\underline{\text{V}}}\quad \underset{9}{\underline{\text{A}}}\quad \underset{8}{\underline{\text{A}}}\quad \underset{7}{\underline{\text{A}}}$$

Temos portanto $5 \times 9 \times 8 \times 7 = 2520$ códigos possíveis.
A opção correta é a **(D)**.

Resolução da pergunta 8

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

Vamos recorrer ao esquema seguinte e ao Princípio fundamental da contagem para resolver o problema

$$\underset{9}{\underline{\quad}}\ \underset{9}{\underline{\quad}}\ \underset{9}{\underline{\quad}}\ \underset{1}{\underline{5}}$$

Como cada algarismo pode ser $1, 2, \ldots, 9$ e o último tem que ser o 5 então existem $9 \times 9 \times 9 \times 1 = 729$ números.

A opção correta é a **(A)**.

Resolução da pergunta 9

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

As fichas com números pares são a 2, 4, 6 e 8.
A figura em baixo ilustra uma possibilidade em que estas 4 fichas ocupam a segunda fila horizontal.

	1	2	3	4
A			7	3
B	4	2	6	8
C	9			5
D		1		

Note-se que sendo as fichas todas distintas, a sua ordem de colocação interessa. Por outro lado, depois de colocar as fichas com número par numa das quatro linhas (A, B, C e D), as cinco fichas ímpares podem ocupar qualquer uma das $16 - 4 = 12$ posições do tabuleiro. Temos portanto:

$4! \times {}^{12}A_5 \times 4 = 9123840$ modos de colocar as fichas.

Há 4 filas horizontais.

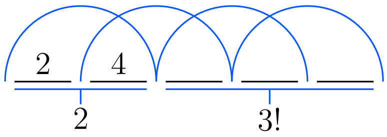
Há ${}^{12}A_5$ possibilidades de colocar as 5 fichas ímpares nos 12 lugares disponíveis

há $4!$ possibilidades de colocar as 4 fichas pares numa fila

Resolução da pergunta 10

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

O esquema seguinte ilustra a situação.



Como o 2 e o 4 se podem colocar em qualquer uma das 4 posições ilustradas na figura, então há $2! \times 3! \times 4 = 48$ números com os algarismos pares um a seguir ao outro.
A opção correta é a **(B)**.

Resolução da pergunta 11

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Comecemos por ilustrar a situação com um esquema.

$$\frac{H_1}{2} \quad \frac{M_1}{4} \quad \frac{M_2}{3} \quad \frac{M_3}{2} \quad \frac{M_4}{1} \quad \frac{H_2}{1}$$

Note que no esquema H_i designa o homem i para $i = 1, 2$ e M_j designa a mulher j para $j = 1, 2, 3$.
Podemos concluir pelo Princípio fundamental da contagem que há $2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 2! \times 4! = 48$ maneiras de fazer o pretendido.
A opção correta é a **(C)**.

Resolução da pergunta 12

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 13

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 14

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 16

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 17

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 18

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 15

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 19

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 20

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 21

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 22

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 23

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 24

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 25

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 26

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):