Proposta de resolução

1.1. Podemos observar na figura que a reta AE é perpendicular ao plano. Deste modo e como o vetor de coordenadas $(3,-6,2)$ é um vetor diretor da reta, podemos concluir que um vetor normal ao plano é $\vec{n}=(3,-6,2)$.
Consequentemente o plano é definido pela equação

$$3x-6y+2z+d=0,$$

onde $d\in\mathbb{R}$. Substituindo nesta equação $G(5,3,6)$ temos

$$3\times 5-6\times 3+2\times 6+d=0 \Leftrightarrow d=-9$$

e podemos concluir que uma equação do plano EFG é

$$3x-6y+2z-9=0.$$

1.2. O centro da superfície esférica é o ponto médio de $[AG]$:

$$M_{[AG]}=\left(\frac{7+5}{2},\frac{1+3}{2},\frac{4+6}{2}\right)=(6,2,5).$$

Como

$$\overline{AG}=\sqrt{(7-5)^2+(1-3)^2+(4-6)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

então o raio da superfície esférica é $r=\sqrt{3}$.
A equação reduzida da superfície esférica é

$$(x-6)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=3.$$

2. Como os números são escolhidos ao acaso, podemos utilizar a Lei de Laplace para calcular a probabilidade pedida.
Os casos possíveis são ${}^8C_3$ correspondentes à escolha de 3 vértices do cubo entre os 8 vértices.
Relativamente aos casos favoráveis, podemos escolher 3 vértices entre os 4 vértices de cada face de ${}^4C_3$ maneiras. Como o cubo tem 6 faces temos ${}^4C_3\times 6$.
A probabilidade pedida é $\dfrac{{}^4C_3\times 6}{{}^8C_3}=\dfrac{3}{7}$.
A opção correta é a **(B)**.

3.

$$
\begin{aligned}
P\left(A|\left(A\cup B\right)\right) &= \frac{P\left(A\cap\left(A\cup B\right)\right)}{P\left(A\cup B\right)} = \frac{P(A)+P(A\cup B)-P\left(A\cup\left(A\cup B\right)\right)}{P\left(A\cup B\right)} \\
&= \frac{P(A)+P(A\cup B)-P\left(A\cup B\right)}{P\left(A\cup B\right)} = \frac{P(A)}{P\left(A\cup B\right)} = \star
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right) = 0.9 \Leftrightarrow P\left(\overline{A\cap B}\right) = 0.9 \\
&\Leftrightarrow 1 - P\left(A\cap B\right) = 0.9 \Leftrightarrow P\left(A\cap B\right) = 0.1 \\
&\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cup B) = 0.1 \Leftrightarrow P\left(A\cup B\right) = 0.3+0.4-0.1 \\
&\Leftrightarrow P\left(A\cup B\right) = 0.6.
\end{aligned}
$$

$$\star = \frac{0.3}{0.6} = \frac{1}{2}.$$

4. Todos os números de 5 algarismos 0, 1, 2 e 3 iniciados por 1 enquadram-se entre 9999 e 22000. Ilustremos a situação com um esquema.

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
\hline
1 & 4 & 4 & 4 & 4
\end{array}
$$

Temos portanto 4^4 possibilidades.
Para os números de 5 algarismos iniciados por 2 se enquadrarem entre 9999 e 22000, o segundo algarismo deve ser 0 ou 1. Ilustremos a situação com um esquema.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 1 & & & \\
2 & 0 & & & \\
\hline
1 & 2 & 4 & 4 & 4
\end{array}
$$

Temos portanto 2×4^3 possibilidades.
No total temos $4^4+2\times 4^3 = 384$ números nas condições pretendidas.
A opção correta é a **(C)**.

5. Sejam a e b os dois números reais positivos.

$$\log_8 a + \log_8 b = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_8(ab) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow ab = 8^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow ab = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow ab = 2.$$

A opção correta é a **(A)**.

6.

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} u_7 = 2u_2 \\ S_{12} = 57 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6r = 2\left(u_1 + r\right) \\ \frac{u_1+u_{12}}{2}\times 12 = 57 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} u_1 = 4r \\ u_1 + u_{12} = \frac{57}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ u_1 + u_1 + 11r = \frac{57}{6} \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} u_1 = 4r \\ 8r + 11r = \frac{57}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ r = \frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Consequentemente,

$$u_n = u_1 + (n-1)r = 2 + (n-1) \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2} + \frac{3}{2}.$$

$$u_n = 500 \Leftrightarrow \frac{n}{2} + \frac{3}{2} = 500 \Leftrightarrow n = 1000 - 3 \Leftrightarrow n = 997.$$

Podemos concluir que a ordem do termo 500 é 997.

7. Para $n < 10$ temos $1 \leq v_n \leq 9$.
Para $n \geq 10$, como $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{10}$ então $1 < 1 + \frac{1}{n} \leq \frac{11}{10}$.
Assim, $1 \leq v_n \leq 9$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e podemos concluir que a sucessão (v_n) é limitada.
A opção correta é a **(C)**.

8.1. Comecemos por determinar z_1 na forma algébrica.

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{2}{1-i} + \frac{4}{i^5} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} + \frac{4}{i} \\ &= \frac{2+2i}{2} + \frac{4i}{-1} = 1 + i - 4i = 1 - 3i. \end{aligned}$$

Seja $z_2 = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$z_1 \times z_2 = (1-3i)(x+yi) = x + yi - 3xi + 3y = x + 3y + (y - 3x)i.$$

Como o afixo de $z_1 \times z_2$ tem coordenadas iguais então

$$x + 3y = y - 3x \Leftrightarrow 2x + y = 0 \Leftrightarrow y = -2x.$$

Assim, $z_1 \times z_2 = -5x - 5xi$ e $z_2 = x - 2xi$.
Por outro lado, como $|z_2| = \sqrt{5}$ então

$$\sqrt{x^2 + (-2x)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 5x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

As coordenadas do afixo de $z_1 \times z_2$ são positivas unicamente para $x = -1$.
Temos $z_1 \times z_2 = 5 + 5i$.
Consequentemente $z_2 = -1 + 2i$.

8.2. Sendo $k + i$ uma raiz quadrada do complexo $3 - 4i$ temos

$$(k+i)^2 = 3 - 4i \Leftrightarrow k^2 + 2ki - 1 = 3 - 4i \Leftrightarrow k^2 - 1 = 3 \wedge 2k = -4 \Leftrightarrow k = -2.$$

A opção correta é a **(D)**.

9.1. Como $r = \dfrac{3}{5}R$ então

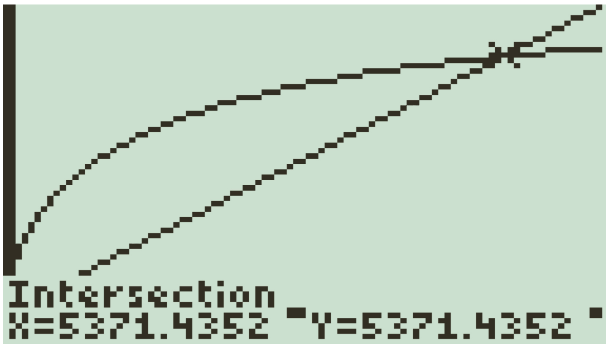
$$\begin{aligned} 50\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}\right) &= 50\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\frac{3}{5}R}{R}\right)^2}\right) \\ &= 50\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}\right) = 50\left(1 - \frac{4}{5}\right) = 10. \end{aligned}$$

A opção correta é a **(C)**.

9.2. $R = 6400$.

$$h = r \Rightarrow r = \frac{6400}{r+6400}\sqrt{r^2 + 2r \times 6400} \Leftrightarrow r = \frac{6400}{r+6400}\sqrt{r^2 + 12800r}.$$

Recorrendo à calculadora gráfica obtemos os gráficos das funções definidas por $y = r$ e $y = \frac{6400}{r+6400}\sqrt{r^2+12800r}$ e uma aproximação do seu ponto de interseção no intervalo $]0, 6400[$.



Podemos concluir que $r \approx 5371.44$.
Como

$$50\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{5371.44}{6400}\right)^2}\right) \approx 23$$

podemos concluir que a percentagem da área da superfície terrestre coberta pelo satélite é aproximadamente 23%.

10.1. Como $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\cos x)^2$ então $(f \circ g)'(x) = -2\cos x \operatorname{sen} x$.
O declive da reta tangente ao gráfico da função $f \circ g$ no ponto de abcissa $\frac{\pi}{4}$ é portanto

$$(f \circ g)'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -1.$$

A opção correta é a **(B)**.

10.2. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = \cos x \Leftrightarrow x^2 - \cos x = 0$.
Seja h a função definida em $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ por $h(x) = x^2 - \cos x$.
Como h é a diferença de funções contínuas então h é contínua em $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.
Por outro lado, $h(0) = -1$ e $h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 0.6 > 0$.
Como $h(0) \times h\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$, o Corolário do Teorema de Bolzano garante que a equação $h(x) = 0$, ou de forma equivalente $f(x) = g(x)$, tem pelo menos uma solução no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$.

11.1.

$$\lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^-}\left(1 + xe^{x-1}\right) = 1 + 1 = 2.$$

$$\lim_{x \to 1^+} h(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{\operatorname{sen}(x-1)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\operatorname{sen}(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{\operatorname{sen}(x-1)} \times \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x}+1} \overset{\star}{=} \frac{1}{\lim\limits_{y \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{y}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$\star$ Mudança de variável: $y = x-1 \Leftrightarrow x = y+1$; $x \to 1^+ \Rightarrow y \to 0^+$.

Como $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} h(x)$ podemos concluir que h não é contínua em $x = 1$.

11.2.

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + xe^{x-1}\right) \overset{(0\times\infty)\star}{=} \lim_{y \to +\infty} \left(1 - ye^{-y-1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{e} \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y} = 1 - \frac{1}{e} \frac{1}{\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y}} = 1 - \frac{1}{e} \times \frac{1}{+\infty} = 1 - 0 = 1.$$

$\star$ Efetuou-se a mudança de variável $y = -x$; $x \to -\infty \Rightarrow y \to +\infty$.

Podemos concluir que a reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico de h.

12.1.

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (2 + \ln x) \times 1}{x^2} = \frac{-1 - \ln x}{x^2}.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -1 - \ln x = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}.$$

Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de f'' e da concavidade do gráfico de f em $]0, +\infty[$.

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$-1 - \ln x$	N.D.	$+$	0	$-$
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	N.D.	$+$	0	$-$
f	N.D.	$\cup$	P.I.	$\cap$

Podemos concluir que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $\left]0, \frac{1}{e}\right]$ e voltada para baixo em $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$. O ponto de abcissa $\frac{1}{e}$ é ponto de inflexão do gráfico de f.

12.2.

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{1 - x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{1-x} \times \lim_{x \to 1} \frac{1}{1+x}$$
$$= -\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \frac{1}{2} = -f'(1) \times \frac{1}{2} = -\frac{2 + \ln 1}{1} \times \frac{1}{2} = -1.$$

A opção correta é a **(B)**.