REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

**Exame Final Nacional de Matemática A**
**Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2020**
12.º Ano de Escolaridade
Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho | Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho
Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

Resolvido em vídeo

# Exame Nacional de Matemática – 2020.1

Versão de 2 de Janeiro de 2022.
Verifica se existe versão com data mais recente do exame nacional 2020.2 aqui.

Acede aos exames nacionais de 2018 e 2019 resolvidos em vídeo aqui.

Podes encontrar em www.academiaaberta.pt mais exames, vídeos e fichas.

---

Este ficheiro PDF inclui:

- o enunciado do exame nacional de matemática 12 da 1.ª fase de 2020;
- a resolução do exame;
- o exame resolvido em vídeo, com a explicação de todos os detalhes. Para visualizares o vídeo de cada exercício deves clicar no ícone junto ao mesmo.

Esta obra pretende proporcionar uma auto-avaliação da tua preparação para o Exame Nacional de matemática 12.



Podes encontrar a **preparação completa** no livro Preparação para o Exame Nacional de Matemática e na Plataforma de preparação para o Exame Nacional de Matemática A.

REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

**Exame Final Nacional de Matemática A**

**Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2020**

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho | Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

A prova inclui 4 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final (itens 5.1., 5.2., 7.1. e 7.2.). Dos restantes 14 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.
Apresente apenas uma resposta para cada item.
As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.
Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

# Formulário

## Geometria

**Comprimento de um arco de circunferência:**

$\alpha r$ ($alpha$ – amplitude em radianos, do ângulo ao centro ; $r$ – raio)

**Área de um polígono regular:** *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

**Área de um sector circular:**

$\frac{\alpha r^2}{2}$ ($alpha$ – amplitude em radianos, do ângulo ao centro ; $r$ – raio)

**Área lateral de um cone:** $\pi r g$ $r$ – raio da base; $g$ – geratriz)

**Área de uma superfície esférica:** $4\pi r^2$ ($r$ – raio)

**Volume de uma pirâmide:** $\frac{1}{3} \times$ *Áreadabase* $\times$ *Altura*

**Volume de um cone:** $\frac{1}{3} \times$ *Áreadabase* $\times$ *Altura*

**Volume de uma esfera:** $\frac{4}{3}\pi r^3$ ($r$ – raio)

## Progressões

Soma dos $n$ primeiros termos de uma progressão $(u_n)$:

**Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

## Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

## Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

## Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$
$(uv)' = u'v + uv'$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$(u^n)' = nu^{n-1}u'$ $(n \in \mathbb{R})$
$(\sin u)' = u' \cos u$
$(\cos u)' = -u' \sin u$
$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(e^u)' = u'e^u$
$(a^u)' = u'a^u \ln a$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

## Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ $(p \in \mathbb{R})$

**1.** Considere a sucessão $(u_n)$ de termo geral $u_n = \dfrac{8n-4}{n+1}$.

**1.1.** Estude a sucessão $(u_n)$ quanto à monotonia.

**1.2.** (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Seja $f$ a função, de domínio $]-\infty, 8[$, definida por $f(x) = \log_2(8-x)$.
A que é igual $\lim f(u_n)$?

**(A)** $-\infty$ **(B)** $0$ **(C)** $1$ **(D)** $+\infty$

**2.** (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Quatro pessoas vão escolher, cada uma e em segredo, um dos seguintes números: 1, 2, 3, 4 e 5.
Qual é a probabilidade de exatamente duas delas escolherem o número 5?

**(A)** $0,1530$ **(B)** $0,1532$ **(C)** $0,1534$ **(D)** $0,1536$

**3.** Um saco contém bolas azuis e bolas brancas, indistinguíveis ao tato. Cada bola tem uma única cor e só existem bolas azuis e bolas brancas no saco.

**3.1.** (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Retiram-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas do saco.
Sejam $A$ e $B$ os acontecimentos:
$A$ : «A primeira bola retirada é azul»
$B$ : «A segunda bola retirada é branca»
Sabe-se que $P(A \cap B) = \frac{1}{3}P(A)$.
Justifique que inicialmente existia um número ímpar de bolas azuis no saco.
**Sugestão:** comece por designar por $a$ o número de bolas azuis e por $b$ o número de bolas brancas que existiam inicialmente no saco.

**3.2.** (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Considere que se alterou a constituição inicial do saco e que, neste, estão agora oito bolas azuis e sete bolas brancas.
Pretende-se colocar todas estas bolas em dez caixas numeradas de 1 a 10, de tal forma que:

- cada caixa com número par tenha, pelo menos, uma bola azul;
- cada caixa com número ímpar tenha, pelo menos, uma bola branca;
- cada caixa tenha, no máximo, duas bolas.

Nestas condições, de quantas maneiras diferentes podem ficar colocadas as bolas nas dez caixas?

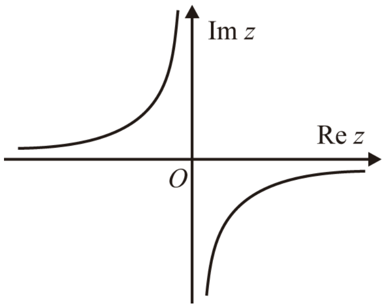
**(A)** 1176 **(B)** 2520 **(C)** 28016 **(D)** 30550

**4.** Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

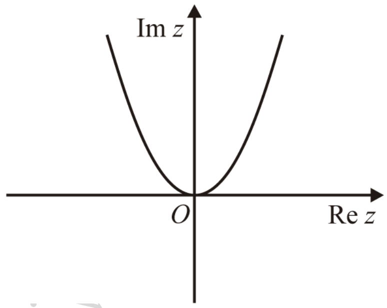
**4.1.** (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Resolva este item sem recorrer à calculadora.
Considere, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 = \bar{z}$.
Sabe-se que, no plano complexo, os afixos dos números complexos não nulos que são soluções desta equação são os vértices de um polígono regular.
Determine o perímetro desse polígono.

**4.2.** (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Considere, em $\mathbb{C}$, a condição $\text{Re}(z) \times \text{Im}(z) = 1$.
Em qual das opções seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?

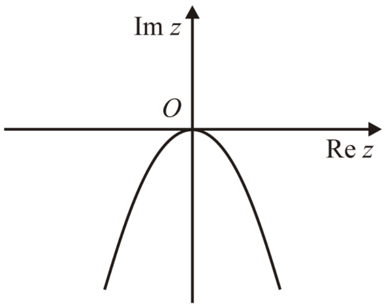
**(A)**



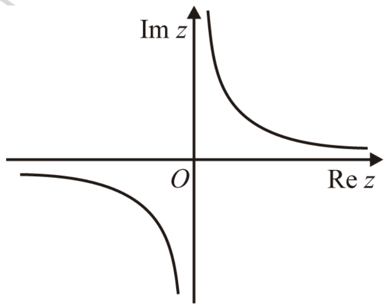

**(B)**




**(C)**




**(D)**




**5.** Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cilindro reto.

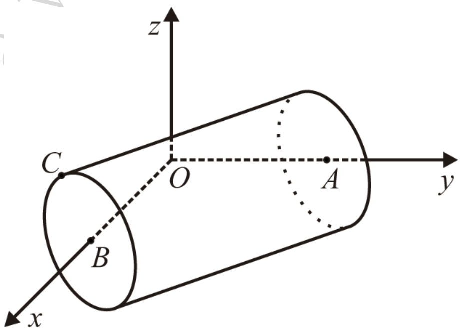



Figura 1

Sabe-se que:

- o ponto $A$ pertence ao eixo $Oy$ e é o centro de uma das bases do cilindro, e o ponto $B$ pertence ao eixo $Ox$ e é o centro da outra base;
- o ponto $C$ pertence à circunferência de centro $B$ que delimita uma das bases do cilindro;
- o plano $ABC$ é definido pela equação $3x + 4y + 4z - 12 = 0$.

Resolva os itens **5.1.** e **5.2.** sem recorrer à calculadora.

**5.1.** (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Determine $\overline{BC}$, sabendo que o volume do cilindro é igual a $10\pi$.

**5.2.** (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Seja $P$ o ponto de coordenadas $(3, 5, 6)$.
Determine as coordenadas do ponto do plano $ABC$ que se encontra mais próximo do ponto $P$.

**6.** (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Na Figura 2, estão representados, num referencial o.n. $xOy$, os pontos $S$, $T$ e $U$ e a reta $r$ de equação $y = 2x + 4$.

Sabe-se que:

- os pontos $S$ e $T$ são, respetivamente, os pontos de intersecção da reta $r$ com os eixos $Oy$ e $Ox$;
- o ponto $U$ pertence ao eixo $Ox$ e tem abcissa inferior à do ponto $T$

Qual dos valores seguintes é o valor, aproximado às centésimas, da amplitude, em radianos, do ângulo $STU$?

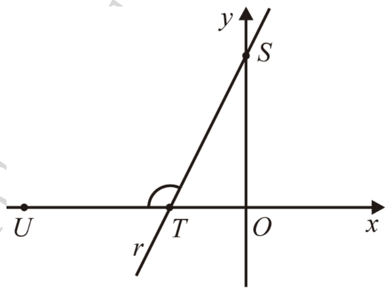


Figura 2

**(A)** $4,25$ **(B)** $2,68$

**(C)** $2,03$ **(D)** $1,82$

**7.** O mecanismo de manivela-biela é composto por uma manivela de comprimento fixo, que efetua um movimento de rotação (sempre no mesmo sentido), e por uma biela, também de comprimento fixo, que transforma esse movimento de rotação no movimento alternado de translação de um pistão.
Na Figura 3, está representado esse mecanismo.

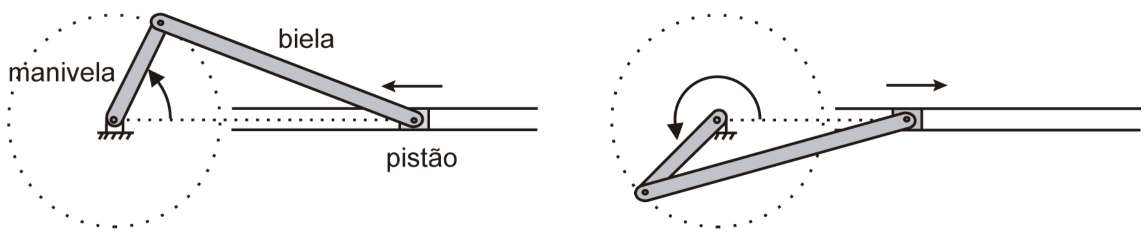


Figura 3

Na Figura 4, está representado um esquema do mecanismo descrito.

Relativamente a esta figura, sabe-se que:

- o ponto $P$ representa o pistão;
- o segmento de reta $[OM]$ representa a manivela, que tem 1 $cm$ de comprimento;
- o segmento de reta $[MP]$ representa a biela;
- os pontos $A$ e $B$ são os pontos em que a distância do pistão ao centro de rotação da manivela, $O$, é mínima e máxima, respetivamente;
- os pontos $O$, $A$, $P$ e $B$ são colineares.

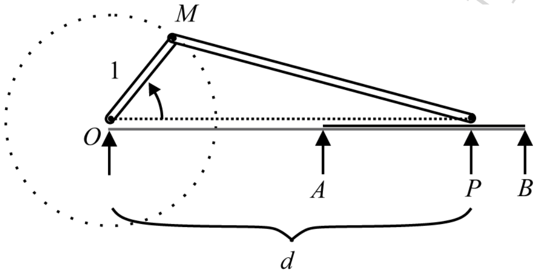



Figura 4

Sabe-se que o movimento de rotação da manivela se inicia quando o pistão se encontra na posição $B$ e que a manivela descreve voltas completas a uma frequência angular constante. Admita que a função que dá, em centímetros, a distância do pistão ao ponto $O$, em função do tempo, $t$, em segundos, contado a partir do instante em que é iniciado o movimento, é dada por

$$d(t) = \cos t + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2 t}, \ t \geq 0$$

(o argumento das funções seno e cosseno está expresso em radianos).

**7.1.** (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Qual é, em centímetros, o comprimento da biela neste mecanismo?

**(A)** 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5

**7.2.** (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Durante os primeiros cinco segundos, após o início do movimento, registou-se, num certo instante $t_0$, a distância do pistão ao ponto $O$.
Sabe-se que, dois segundos após esse instante, a distância do pistão ao ponto $O$ diminuiu 25%.
Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a distância, em centímetros, arredondada às décimas, do pistão ao ponto $O$ no instante $t_0$, sabendo-se que este valor existe e é único. Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.
Na sua resposta:
— apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
— reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;
— apresente o valor pedido em centímetros, arredondado às décimas.
Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

**8.** (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Na Figura 5, estão representados, num referencial o.n. $xOy$, a circunferência trigonométrica, a reta $r$ de equação $x = 1$, e um ponto $A$, de ordenada $a$ ($a > 1$), pertencente à reta $r$.

Está também representada a semirreta $\dot{O}A$, que interseta a circunferência trigonométrica no ponto $B$.
Qual das expressões seguintes dá, em função de $a$, a abcissa do ponto $B$?

**(A)** $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ **(B)** $\sqrt{a^2+1}$

**(C)** $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}$ **(D)** $\sqrt{a^2-1}$

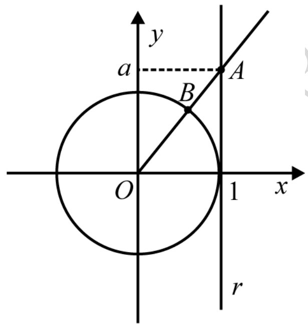


Figura 5

**9.** Seja $f$ a função definida em $]-\infty, 2]$ por $f(x) = x + \ln(e^x + 1)$.
Resolva os itens **9.1.** e **9.2.** sem recorrer à calculadora.

**9.1.** (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
O gráfico de $f$ tem uma assíntota oblíqua.
Determine uma equação dessa assíntota.

**9.2.** (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
A equação $f(x) = 2x + 1$ tem uma única solução.
Determine essa solução e apresente-a na forma $-\ln k$, com $k > 0$.

**9.3.** (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Seja $h$ a função definida em $]-\infty, 2]$ por $h(x) = f(x) - x$.
Qual das expressões seguintes pode ser a expressão analítica da função $h^{-1}$, função inversa de $h$?

**(A)** $e^x - 1$ **(B)** $1 - e^x$ **(C)** $\ln(e^x - 1)$ **(D)** $\ln(1 - e^x)$

**10.** Seja $g$ a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - e^x} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x^2 \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens **10.1.** e **10.2.** sem recorrer à calculadora.

**10.1.** (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Averigue se a função $g$ é contínua em $x = 0$.

**10.2.** (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Estude a função $g$ quanto à monotonia em $]0, +\infty[$ e determine, caso existam, os extremos relativos.
Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

# FIM

## COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td colspan="4">5.1.</td><td colspan="4">5.2.</td><td colspan="3">7.1.</td><td colspan="3">7.2.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="4">16</td><td colspan="4">20</td><td colspan="3">16</td><td colspan="3">20</td><td>72</td></tr>
<tr><td>Destes 14 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td>1.1.</td><td>1.2.</td><td>2.</td><td>3.1.</td><td>3.2.</td><td>4.1.</td><td>4.2.</td><td>6.</td><td>8.</td><td>9.1.</td><td>9.2.</td><td>9.3.</td><td>10.1.</td><td>10.2.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="14">8 x 16 pontos</td><td>128</td></tr>
<tr><td colspan="15">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>

## Proposta de resolução

**1.1.**

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \frac{8(n+1)-4}{n+2}-\frac{8n-4}{n+1}\\
&= \frac{(8n+4)(n+1)-(8n-4)(n+2)}{(n+2)(n+1)}\\
&= \frac{8n^2+8n+4n+4-\left(8n^2+16n-4n-8\right)}{(n+2)(n+1)}\\
&= \frac{12}{(n+2)(n+1)}.
\end{aligned}$$

Como $12>0$ e $(n+2)(n+1)>0,\ \forall n\in\mathbb{N}$ então $\dfrac{12}{(n+2)(n+1)}>0,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Temos portanto $u_{n+1}-u_n>0,\ \forall n\in\mathbb{N}$ e podemos concluir que $(u_n)$ é monótona crescente.

**1.2.** Comecemos por escrever a expressão $\dfrac{8n-4}{n+1}$ numa forma mais conveniente para determinar o valor do seu limite.

$$\begin{array}{r|l}
8n-4 & n+1 \\ \cline{2-2}
-8n-8 & 8 \\ \hline
-12 &
\end{array}
\qquad \frac{8n}{n}=8$$

Podemos concluir que $u_n=8-\dfrac{12}{n+1}$.

$\lim u_n=\lim\left(8-\dfrac{12}{n+1}\right)=8-\dfrac{12}{+\infty+1}=8^-$.

Consequentemente, $\lim f\left(u_n\right)=\lim\limits_{x\to 8^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 8^-}\log_2(8-x)=\log_2\left(0^+\right)=-\infty$.

Podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

**2.** Como os números são escolhidos em segredo, há igual probabilidade que cada pessoa escolher um dos 5 números e podemos utilizar a Lei de Laplace para calcular a probabilidade pedida. Comecemos por ilustrar os casos favoráveis com um esquema.

$$\underset{1}{\underline{\ 5\ }}\quad \underset{4}{\underline{\qquad}}\quad \underset{1}{\underline{\ 5\ }}\quad \underset{4}{\underline{\qquad}}$$

Como há ${}^4C_2$ modos de selecionar as duas pessoas que escolheram o número 5, há $4^2\times{}^4C_2$ casos favoráveis.

Relativamente aos casos possíveis, há ${}^5A'_4$ modos de as pessoas escolherem os 4 números entre os 5 disponíveis.

A probabilidade é portanto $P=\dfrac{4^2\times{}^4C_2}{{}^5A'_4}=0.1536$. A opção correta é a **(D)**.

**3.1.**

$$P(A \cap B) = \frac{1}{3}P(A) \Leftrightarrow \frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a+b-1} = \frac{1}{3} \times \frac{a}{a+b}$$
$$\Leftrightarrow 3b = a+b-1 \Leftrightarrow a = 2b+1.$$

Como $b$ é um número natural então $2b$ é um número par. Consequentemente, $a = 2b+1$ é um número ímpar.

**3.2.** Notemos que há 5 caixas com número ímpar e 5 caixas com número par. Colocando uma bola azul em cada caixa com número par sobram 3 bolas azuis, das 8 iniciais, para colocar nas 10 caixas. De forma semelhante, colocando uma bola branca em cada caixa com número ímpar sobram 2 bolas brancas, das 7 iniciais, para colocar nas 7 caixas sobrantes, uma vez que cada caixa tem no máximo 2 bolas. Temos portanto

$$^{10}C_3 \times {}^{7}C_2 = 2520$$

possibilidades.
A opção correta é a **(B)**.

**4.1.** Seja $z = \rho e^{i\theta}$.

$$z^2 = \bar{z} \Leftrightarrow \rho^2 e^{2i\theta} = \rho e^{-i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = \rho \\ 2\theta = -\theta + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho(\rho-1) = 0 \\ \theta = \frac{2k\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 0 \\ \theta = \frac{2k\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \vee \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Podemos concluir que as soluções do sistema são 0 e $e^{i\frac{2k\pi}{3}}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Para obter as soluções não nulas devemos atribuir valores inteiros a $k$:

- para $k = 0$, $e^{i\times 0} = 1$;
- para $k = 1$, $e^{i\times\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$;
- para $k = 2$, $e^{i\times\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Qualquer outro valor inteiro de $k$ conduz-nos a uma destas soluções.
Como são três soluções não nulas, os afixos destes complexos são os vértices de um triângulo equilátero. A medida de um dos seus lados é

$$\left|-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1\right| = \left|-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}.$$

O perímetro do polígono é portanto $3\sqrt{3}$.

**4.2.** Seja $z = x + yi$.

$$\mathrm{Re}(z) \times \mathrm{Im}(z) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(x+yi) \times \mathrm{Im}(x+yi) = 1 \Leftrightarrow xy = 1 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} y = \frac{1}{x}.$$

Trata-se portanto da equação que uma hipérbole conhecida.
A opção correta é a **(D)**.

**5.1.** Sabemos que $A(0,b,0)$ e $B(a,0,0)$, onde $a,b \in \mathbb{R}$. Substituindo na equação do plano $ABC$ temos

$$3 \times 0 + 4b + 4 \times 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow b = 3$$

e

$$3a + 4 \times 0 + 4 \times 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow a = 4.$$

Temos portanto $A(0,3,0)$ e $B(4,0,0)$.
A altura do cilindro é

$$\overline{AB} = \sqrt{(0-4)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = 5.$$

Como o seu volume é igual a $10\pi$ temos

$$A_b \times 5 = 10\pi \Leftrightarrow A_b = 2\pi \Leftrightarrow \pi \times \overline{BC}^2 = 2\pi \Leftrightarrow \overline{BC} = \pm\sqrt{2}.$$

Podemos concluir que $\overline{BC} = \sqrt{2}$.

**5.2** O ponto do plano $ABC$ que se encontra mais próximo do ponto $P$ é a projeção ortogonal de $P$ no plano $ABC$.
Um vetor normal ao plano $ABC$ é $\vec{n} = (3,4,4)$. Por outro lado, uma equação vetorial da reta que contém $P$ e é perpendicular ao plano $ABC$ é dada por:

$$(x,y,z) = (3,5,6) + k(3,4,4),\ k \in \mathbb{R}.$$

O ponto de interseção desta reta com o plano $ABC$ é o ponto que pretendemos.

$$\begin{cases} (x,y,z) = (3,5,6) + k(3,4,4) \\ 3x + 4y + 4z - 12 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 3k \\ y = 5 + 4k \\ z = 6 + 4k \\ 3x + 4y + 4z - 12 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -- \\ -- \\ -- \\ 9 + 9k + 20 + 16k + 24 + 16k - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2 \\ k = -1 \end{cases}$$

Podemos concluir que as coordenadas do ponto do plano $ABC$ que se encontra mais próximo do ponto $P$ são $(0,1,2)$.

**6.** Sabemos que

$$\tan\left(S\hat{T}O\right) = 2 \Leftarrow S\hat{T}O = \tan^{-1} 2.$$

Consequentemente, $S\hat{T}U \approx \pi - \tan^{-1} 2 \approx 2,03$.
A opção correta é a **(C)**.

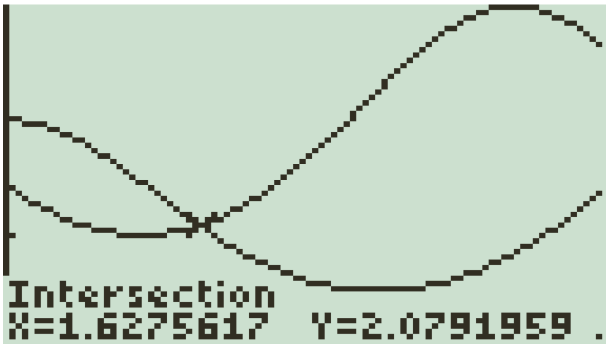
**7.1.** Notemos que $d(0)$ é a soma dos comprimentos da biela e da manivela.
Como $d(0) = \cos 0 + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2(0)} = 4$ e o comprimento da manivela é $1\,cm$ temos que a biela mede $(4-1)\,cm = 3\,cm$.

A opção correta é a **(B)**.

**7.2.** Comecemos por notar que multiplicando uma quantidade por $0,75$ esta reduz-se 25%. Deste modo, a equação que traduz o problema é

$$d\left(t_0+2\right)=0,75d\left(t_0\right).$$

Recorrendo à calculadora gráfica obtemos parte dos gráficos das funções definidas por $y=d(t+2)=\cos(t+2)+\sqrt{9-\operatorname{sen}^2(t+2)}$ e $y=0,75\left(\cos t+\sqrt{9-\operatorname{sen}^2 t}\right)$ e uma aproximação do seu ponto de interseção no intervalo $[0,5]$.




Podemos concluir que $t_0\approx 1.63$.
Como $d\left(t_0\right)\approx 2,8$, podemos concluir que a distância do pistão ao ponto $O$ no instante $t_0$ é aproximadamente $2,8\,cm$.

**8.** Seja $\alpha$ a amplitude so ângulo que a semi-reta $\dot{O}A$ faz com o semi-eixo positivo de $Ox$. Pretendemos saber a abcissa de $B(\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha)$. Como $\tan\alpha=a$ então

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow 1+a^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Como $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ então $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$.
A opção correta é a **(A)**.

**9.1.** Como $D_f=]-\infty,2]$ trata-se de uma assíntota quando $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\ln\left(e^x+1\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(e^x+1\right)}{x}=1+\frac{\ln\left(e^{-\infty}+1\right)}{-\infty}=1.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\ln\left(e^x+1\right)-x\right)=\ln\left(e^{-\infty}+1\right)=0.$$

Podemos concluir que a reta de equação $y=x$ é a assíntota oblíqua do gráfico de $f$ pretendida.

**9.2.** Consideremos $x\in]-\infty,2]$.

$$f(x)=2x+1\Leftrightarrow x+\ln\left(e^x+1\right)=2x+1\Leftrightarrow\ln\left(e^x+1\right)=x+1$$
$$\Leftrightarrow e^x+1=e^{x+1}\Leftrightarrow e^x-e^x\times e=-1$$

$$\Leftrightarrow e^x\,(1-e) = -1 \Leftrightarrow e^x = \frac{-1}{1-e}$$
$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{e-1}\right) \Leftrightarrow x = \ln 1 - \ln(e-1)$$
$$\Leftrightarrow x = -\ln(e-1).$$

Como $-\ln(e-1) \in ]-\infty, 2]$ temos que $-\ln(e-1)$ é a solução da equação na forma pretendida.

**9.3.**

$$y = h(x) \Leftrightarrow y = x + \ln\left(e^x+1\right) - x \Leftrightarrow e^x + 1 = e^y$$
$$\Leftrightarrow e^x = e^y - 1 \Leftrightarrow x = \ln\left(e^y - 1\right).$$

Temos portanto $h^{-1}(x) = \ln\left(e^x - 1\right)$.
A opção correta é a **(C)**.

**10.1.**

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{1-e^x}\right) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} 1 + \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}{\frac{1-e^x}{x}}$$
$$= 1 + \frac{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} x}{x}}{-\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}} \stackrel{\star}{=} 1 + \frac{1}{-1} = 0.$$

$\star$ Limites notáveis $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x^2\ln x\right) = 0\times(-\infty)$$

Uma vez que obtivemos um símbolo de indeterminação, vamos efetuar a mudança de variável $y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$ e utilizar o limite notável $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$. Como $x \to 0^+$ então $y \to +\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x^2\ln x\right) = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y^2}\ln\frac{1}{y}\right) = -\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}\times\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y} = -0\times 0 = 0.$$

Como $g(0) = 0$ então temos $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = g(0)$ e podemos concluir que $g$ é contínua em $x = 0$.

**10.2.** Comecemos por determinar $g'(x)$ no intervalo $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = 2x\ln x + x^2\times\frac{1}{x} = 2x\ln x + x.$$

Estudemos agora a existência de pontos críticos em $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x\ln x + x = 0 \wedge x \in ]0,+\infty[ \Leftrightarrow x\,(2\ln x + 1) = 0 \wedge x \in ]0,+\infty[$$
$$\Leftrightarrow \left(x = 0 \vee x = e^{-\frac{1}{2}}\right) \wedge x \in ]0,+\infty[ \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de $g'$ e da monotonia de $g$ em $]0, +\infty[$.

| $x$ | $0$ | | $e^{-\frac{1}{2}}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | N.D. | $+$ | $+$ | $+$ |
| $2\ln x+1$ | N.D. | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g'(x)$ | N.D. | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g$ | N.D. | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

Podemos concluir que

$$g\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=e^{-1}\ln e^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2e}$$

é mínimo relativo.
$g$ é monótona decrescente em $\left]0,e^{-\frac{1}{2}}\right]$ e monótona crescente em $\left[e^{-\frac{1}{2}},+\infty\right[$.