Proposta de resolução

1.1.

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \frac{8(n+1)-4}{n+2}-\frac{8n-4}{n+1} \\
&= \frac{(8n+4)(n+1)-(8n-4)(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{8n^2+8n+4n+4-\left(8n^2+16n-4n-8\right)}{(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{12}{(n+2)(n+1)}.
\end{aligned}$$

Como $12>0$ e $(n+2)(n+1)>0,\ \forall n\in\mathbb{N}$ então $\dfrac{12}{(n+2)(n+1)}>0,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Temos portanto $u_{n+1}-u_n>0,\ \forall n\in\mathbb{N}$ e podemos concluir que (u_n) é monótona crescente.

1.2. Comecemos por escrever a expressão $\dfrac{8n-4}{n+1}$ numa forma mais conveniente para determinar o valor do seu limite.

$$\begin{array}{r|l}
8n-4 & n+1 \\ \cline{2-2}
-8n-8 & 8 \\ \cline{1-1}
-12 &
\end{array}
\qquad\qquad \frac{8n}{n}=8$$

Podemos concluir que $u_n=8-\dfrac{12}{n+1}$.

$\lim u_n=\lim\left(8-\dfrac{12}{n+1}\right)=8-\dfrac{12}{+\infty+1}=8^-$.

Consequentemente, $\lim f\left(u_n\right)=\lim\limits_{x\to 8^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 8^-}\log_2(8-x)=\log_2\left(0^+\right)=-\infty$.

Podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

2. Como os números são escolhidos em segredo, há igual probabilidade que cada pessoa escolher um dos 5 números e podemos utilizar a Lei de Laplace para calcular a probabilidade pedida. Comecemos por ilustrar os casos favoráveis com um esquema.

$$\underset{1}{\underline{\ \ 5\ \ }}\quad \underset{4}{\underline{\ \ \ \ \ \ }}\quad \underset{1}{\underline{\ \ 5\ \ }}\quad \underset{4}{\underline{\ \ \ \ \ \ }}$$

Como há ${}^4C_2$ modos de selecionar as duas pessoas que escolheram o número 5, há $4^2\times{}^4C_2$ casos favoráveis.

Relativamente aos casos possíveis, há ${}^5A'_4$ modos de as pessoas escolherem os 4 números entre os 5 disponíveis.

A probabilidade é portanto $P=\dfrac{4^2\times{}^4C_2}{{}^5A'_4}=0.1536$. A opção correta é a **(D)**.

3.1.

$$P(A\cap B)=\frac{1}{3}P(A)\Leftrightarrow \frac{a}{a+b}\times\frac{b}{a+b-1}=\frac{1}{3}\times\frac{a}{a+b}$$
$$\Leftrightarrow 3b=a+b-1\Leftrightarrow a=2b+1.$$

Como b é um número natural então $2b$ é um número par. Consequentemente, $a=2b+1$ é um número ímpar.

3.2. Notemos que há 5 caixas com número ímpar e 5 caixas com número par. Colocando uma bola azul em cada caixa com número par sobram 3 bolas azuis, das 8 iniciais, para colocar nas 10 caixas. De forma semelhante, colocando uma bola branca em cada caixa com número ímpar sobram 2 bolas brancas, das 7 iniciais, para colocar nas 7 caixas sobrantes, uma vez que cada caixa tem no máximo 2 bolas. Temos portanto

$$^{10}C_3\times {}^7C_2=2520$$

possibilidades.
A opção correta é a **(B)**.

4.1. Seja $z=\rho e^{i\theta}$.

$$z^2=\bar{z}\Leftrightarrow \rho^2e^{2i\theta}=\rho e^{-i\theta}\Leftrightarrow \begin{cases}\rho^2=\rho\\ 2\theta=-\theta+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\rho(\rho-1)=0\\ \theta=\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\rho=0\\ \theta=\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\vee\begin{cases}\rho=1\\ \theta=\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Podemos concluir que as soluções do sistema são 0 e $e^{i\frac{2k\pi}{3}}$, $k\in\mathbb{Z}$.
Para obter as soluções não nulas devemos atribuir valores inteiros a k:

- para $k=0$, $e^{i\times 0}=1$;
- para $k=1$, $e^{i\times\frac{2\pi}{3}}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$;
- para $k=2$, $e^{i\times\frac{4\pi}{3}}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Qualquer outro valor inteiro de k conduz-nos a uma destas soluções.
Como são três soluções não nulas, os afixos destes complexos são os vértices de um triângulo equilátero. A medida de um dos seus lados é

$$\left|-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-1\right|=\left|-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{3}.$$

O perímetro do polígono é portanto $3\sqrt{3}$.

4.2. Seja $z=x+yi$.

$$\mathrm{Re}(z)\times\mathrm{Im}(z)=1\Leftrightarrow \mathrm{Re}(x+yi)\times\mathrm{Im}(x+yi)=1\Leftrightarrow xy=1\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} y=\frac{1}{x}.$$

Trata-se portanto da equação que uma hipérbole conhecida.
A opção correta é a **(D)**.

5.1. Sabemos que $A(0,b,0)$ e $B(a,0,0)$, onde $a,b \in \mathbb{R}$. Substituindo na equação do plano ABC temos

$$3 \times 0 + 4b + 4 \times 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow b = 3$$

e

$$3a + 4 \times 0 + 4 \times 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow a = 4.$$

Temos portanto $A(0,3,0)$ e $B(4,0,0)$.
A altura do cilindro é

$$\overline{AB} = \sqrt{(0-4)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = 5.$$

Como o seu volume é igual a 10π temos

$$A_b \times 5 = 10\pi \Leftrightarrow A_b = 2\pi \Leftrightarrow \pi \times \overline{BC}^2 = 2\pi \Leftrightarrow \overline{BC} = \pm\sqrt{2}.$$

Podemos concluir que $\overline{BC} = \sqrt{2}$.

5.2 O ponto do plano ABC que se encontra mais próximo do ponto P é a projeção ortogonal de P no plano ABC.
Um vetor normal ao plano ABC é $\vec{n} = (3,4,4)$. Por outro lado, uma equação vetorial da reta que contém P e é perpendicular ao plano ABC é dada por:

$$(x,y,z) = (3,5,6) + k(3,4,4),\ k \in \mathbb{R}.$$

O ponto de interseção desta reta com o plano ABC é o ponto que pretendemos.

$$\begin{cases} (x,y,z) = (3,5,6) + k(3,4,4) \\ 3x + 4y + 4z - 12 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 3k \\ y = 5 + 4k \\ z = 6 + 4k \\ 3x + 4y + 4z - 12 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -- \\ -- \\ -- \\ 9 + 9k + 20 + 16k + 24 + 16k - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2 \\ k = -1 \end{cases}$$

Podemos concluir que as coordenadas do ponto do plano ABC que se encontra mais próximo do ponto P são $(0,1,2)$.

6. Sabemos que

$$\tan\left(S\widehat{T}O\right) = 2 \Leftarrow S\widehat{T}O = \tan^{-1} 2.$$

Consequentemente, $S\widehat{T}U \approx \pi - \tan^{-1} 2 \approx 2,03$.
A opção correta é a **(C)**.

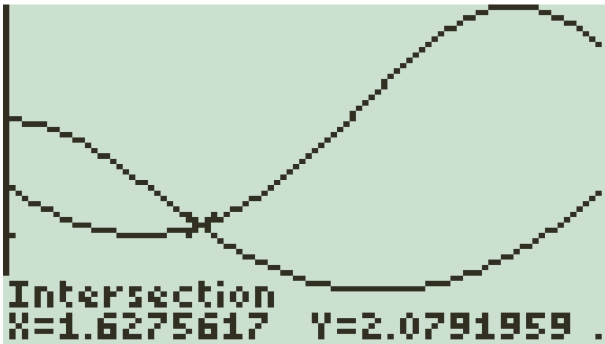
7.1. Notemos que $d(0)$ é a soma dos comprimentos da biela e da manivela.
Como $d(0) = \cos 0 + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2(0)} = 4$ e o comprimento da manivela é $1\,cm$ temos que a biela mede $(4-1)\,cm = 3\,cm$.

A opção correta é a **(B)**.

7.2. Comecemos por notar que multiplicando uma quantidade por $0,75$ esta reduz-se 25%. Deste modo, a equação que traduz o problema é

$$d\left(t_0+2\right)=0,75d\left(t_0\right).$$

Recorrendo à calculadora gráfica obtemos parte dos gráficos das funções definidas por $y=d(t+2)=\cos(t+2)+\sqrt{9-\operatorname{sen}^2(t+2)}$ e $y=0,75\left(\cos t+\sqrt{9-\operatorname{sen}^2 t}\right)$ e uma aproximação do seu ponto de interseção no intervalo $[0,5]$.



Podemos concluir que $t_0\approx 1.63$.
Como $d\left(t_0\right)\approx 2,8$, podemos concluir que a distância do pistão ao ponto O no instante t_0 é aproximadamente $2,8\,cm$.

8. Seja α a amplitude so ângulo que a semi-reta $\dot{O}A$ faz com o semi-eixo positivo de Ox. Pretendemos saber a abcissa de $B(\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha)$. Como $\tan\alpha=a$ então

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow 1+a^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Como $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ então $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$.
A opção correta é a **(A)**.

9.1. Como $D_f=]-\infty,2]$ trata-se de uma assíntota quando $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\ln\left(e^x+1\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(e^x+1\right)}{x}=1+\frac{\ln\left(e^{-\infty}+1\right)}{-\infty}=1.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\ln\left(e^x+1\right)-x\right)=\ln\left(e^{-\infty}+1\right)=0.$$

Podemos concluir que a reta de equação $y=x$ é a assíntota oblíqua do gráfico de f pretendida.

9.2. Consideremos $x\in]-\infty,2]$.

$$f(x)=2x+1\Leftrightarrow x+\ln\left(e^x+1\right)=2x+1\Leftrightarrow\ln\left(e^x+1\right)=x+1$$
$$\Leftrightarrow e^x+1=e^{x+1}\Leftrightarrow e^x-e^x\times e=-1$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow e^x(1-e)=-1 \Leftrightarrow e^x=\frac{-1}{1-e}\\&\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{1}{e-1}\right)\Leftrightarrow x=\ln 1-\ln(e-1)\\&\Leftrightarrow x=-\ln(e-1).\end{aligned}$$

Como $-\ln(e-1)\in]-\infty,2]$ temos que $-\ln(e-1)$ é a solução da equação na forma pretendida.

9.3.

$$\begin{aligned}y=h(x)&\Leftrightarrow y=x+\ln\left(e^x+1\right)-x\Leftrightarrow e^x+1=e^y\\&\Leftrightarrow e^x=e^y-1\Leftrightarrow x=\ln\left(e^y-1\right).\end{aligned}$$

Temos portanto $h^{-1}(x)=\ln\left(e^x-1\right)$.
A opção correta é a **(C)**.

10.1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^-}g(x)&=\lim_{x\to0^-}\left(1+\frac{\operatorname{sen}x}{1-e^x}\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}1+\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{\operatorname{sen}x}{x}}{\frac{1-e^x}{x}}\\&=1+\frac{\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\operatorname{sen}x}{x}}{-\lim\limits_{x\to0^-}\frac{e^x-1}{x}}\overset{\star}{=}1+\frac{1}{-1}=0.\end{aligned}$$

$\star$ Limites notáveis $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}=1$ e $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x^2\ln x\right)=0\times(-\infty)$$

Uma vez que obtivemos um símbolo de indeterminação, vamos efetuar a mudança de variável $y=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x=\frac{1}{y}$ e utilizar o limite notável $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$. Como $x\to0^+$ então $y\to+\infty$.

$$\lim_{x\to0^+}\left(x^2\ln x\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y^2}\ln\frac{1}{y}\right)=-\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}\times\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}=-0\times0=0.$$

Como $g(0)=0$ então temos $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=g(0)$ e podemos concluir que g é contínua em $x=0$.

10.2. Comecemos por determinar $g'(x)$ no intervalo $]0,+\infty[$:

$$g'(x)=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}=2x\ln x+x.$$

Estudemos agora a existência de pontos críticos em $]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned}g'(x)=0&\Leftrightarrow 2x\ln x+x=0\wedge x\in]0,+\infty[\Leftrightarrow x\left(2\ln x+1\right)=0\wedge x\in]0,+\infty[\\&\Leftrightarrow\left(x=0\vee x=e^{-\frac{1}{2}}\right)\wedge x\in]0,+\infty[\Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de g' e da monotonia de g em $]0,+\infty[$.

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
x	N.D.	$+$	$+$	$+$
$2\ln x+1$	N.D.	$-$	0	$+$
$g'(x)$	N.D.	$-$	0	$+$
g	N.D.	$\searrow$	min	$\nearrow$

Podemos concluir que

$$g\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=e^{-1}\ln e^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2e}$$

é mínimo relativo.
g é monótona decrescente em $\left]0,e^{-\frac{1}{2}}\right]$ e monótona crescente em $\left[e^{-\frac{1}{2}},+\infty\right[$.