FORMULÁRIO DE MATEMÁTICA 12.º

Folha n.º 1

PROBABILIDADES E ANÁLISE COMBINATÓRIA

Lei de Laplace: $P(A)=\dfrac{\text{n.º de casos favoráveis}}{\text{n.º de casos possíveis}}$ $\quad 0\le P(A)\le 1 \quad P(\text{ac. imp.})=0 \quad P(\text{ac. certo.})=1$

	Interessa a ordem?	Há repetição de elementos?
Permutação de n: $P_n=n!$	Sim	Não
Arranjos sem repetição: ${}^nA_p=\dfrac{n!}{(n-p)!}$, $n\ge p$	Sim	Não
Combinações de p no meio de n: ${}^nC_p=\dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$, $n\ge p$	Não	Não
Arranjos com repetição de p no meio de n: ${}^nA'_p=n^p$	Sim	Sim

Sucessivamente $\rightarrow$ ARRANJOS

Simultaneamente $\rightarrow$ COMBINAÇÕES

Códigos, Sorteios, Grupos c/ cargos $\Big\}$ Interessa a ordem $\rightarrow$ ARRANJOS

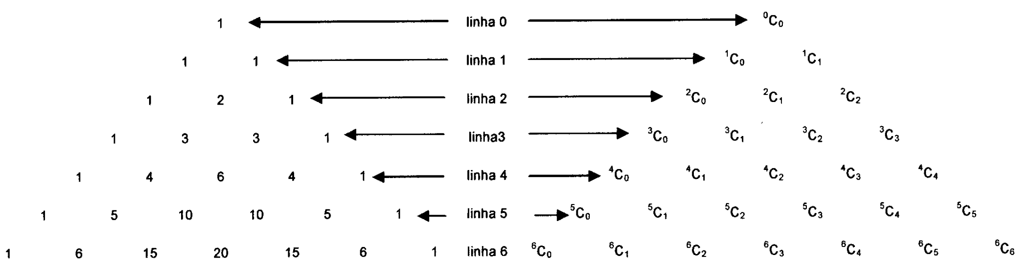
Comissões, Grupos, Conjuntos $\Big\}$ Não interessa a ordem $\rightarrow$ COMBINAÇÕES

e $\rightarrow \times$

ou $\rightarrow +$

- Leis de De Morgan: $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B} \qquad \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.
- Se $A\cap B=\varnothing$ (são acontecimentos incompatíveis) então $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
- Acontecimentos compatíveis: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
- Probabilidade de acontecimentos contrários: $P(\bar{A})=1-P(A)$
- Probabilidade condicionada: $P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}, \quad P(B)\ne 0$
- A e B são acontecimentos independentes sse $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ ou $P(A\mid B)=P(A)$.

TRIÂNGULO DE PASCAL



PROPRIEDADES DAS COMBINAÇÕES

1. Em cada linha são iguais os números equidistantes dos extremos
   ${}^nC_p={}^nC_{n-p}, \quad \forall n,\ p\in I\!N_0,\ n\ge p$
2. A soma de dois números consecutivos de uma linha é igual ao número que na linha seguinte fica entre eles
   ${}^nC_p+{}^nC_{p+1}={}^{n+1}C_{p+1}, \quad \forall n,\ p\in I\!N\ n\ge p$
3. A soma de todos os elementos de cada linha é uma potência de 2, isto, é igual a ${}^nC_0+{}^nC_1+\ldots+{}^nC_n=2^n$.

NOTA: A linha n do Triângulo de Pascal tem $n+1$ elementos. O segundo e o penúltimo elementos de cada linha dão-nos o seu número.

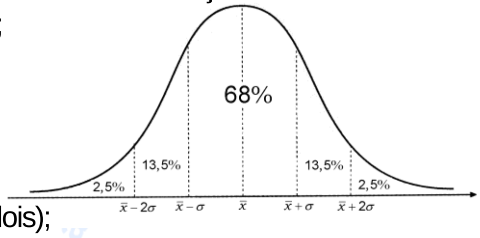
BINÓMIO DE NEWTON

$$(a+b)^n={}^nC_0a^nb^0+{}^nC_1\,a^{n-1}b^1+\ldots+{}^nC_{n-1}a^1b^{n-1}+{}^nC_na^0b^n \quad \text{ou} \quad (a+b)^n=\sum_{p=0}^{n}{}^nC_pa^{n-p}b^p$$

Observando a fórmula podemos concluir que:

- Os coeficientes no desenvolvimento de $(a+b)^n$ são os números da linha n do Triângulo de Pascal;
- O desenvolvimento de $(a+b)^n$ tem $n+1$ termos;
- No desenvolvimento de $(a-b)^n$ os termos são alternadamente $+$ e $-$;
- O grau dos monómios do desenvolvimento de $(a+b)^n$ é n;
- Termo geral do desenvolvimento $T_{p+1}={}^nC_pa^{n-p}b^p$;
- A ordem do termo médio:
  - $\dfrac{n}{2}+1$ se n é par (há um só) • $\dfrac{n+1}{2}$ e $\dfrac{n+1}{2}+1$ se n é ímpar (há dois);
- O termo independente de x corresponde a um termo em x^0;
- O termo constante não tem parte literal e logo corresponde a um termo em x^0;
- O termo em x corresponde a um termo em x^1.

Distribuição normal



$$\mu=\sum_{i=1}^{n}x_i\times P(X=x_i);\ \ \sigma^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}\times P(X=x_i)-\mu^2.$$

FORMULÁRIO DE MATEMÁTICA 12.º

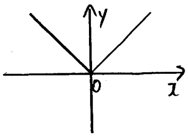
FUNÇÕES

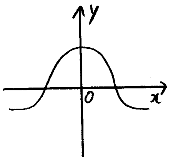
FUNÇÃO PAR

$f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$

O gráfico é simétrico em relação eixo Oy

Exemplos:



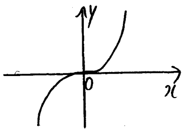


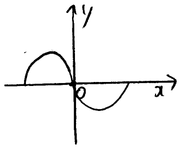
FUNÇÃO ÍMPAR

$f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$

O gráfico é simétrico em relação à origem.

Exemplos:



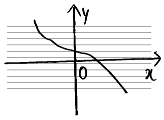


FUNÇÃO INJECTIVA

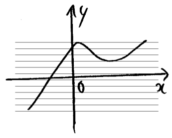
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in D_f$

Qualquer recta horizontal intersecta gráfico em apenas um ponto.

Exemplos:



é injectiva



não é injectiva

- **Definição de limite segundo Heine**
  Toda a sucessão de objectos $x_n \to a \wedge x_n \in D_f \setminus \{a\} \Rightarrow$ a sucessão de imagens $f(x_n) \to b \quad \therefore \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.
- **Continuidade** (O gráfico não apresenta interrupções)
  f é contínua em $x = a$ sse $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$
  isto é $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

	Parâmetro	Alteração da função em relação à inicial
$f(x)+k$	$k>0$	Desloca-se para cima
	$k<0$	Desloca-se para baixo
$f(x-k)$	$k>0$	Desloca-se para a direita
	$k<0$	Desloca-se para a esquerda
$kf(x)$	$k>1$	Estica segundo o eixo dos yy
	$0<k<1$	Encolhe segundo o eixo dos yy
$f(kx)$	$0<k<1$	Estica segundo o eixo dos xx
	$k>1$	Encolhe segundo o eixo dos xx
$-f(x)$		Simetria em relação ao eixo dos xx
$f(-x)$		Simetria em relação ao eixo dos yy
$\lvert f(x) \rvert$		Mantêm-se os pontos de ordenada positiva ou nula e para os pontos de ordenada negativa têm-se uma simetria em relação ao eixo dos xx
$f(\lvert x \rvert)$		Mantêm-se os pontos de abcissa positiva ou nula e para os pontos de abcissa negativa têm-se uma simetria em relação ao eixo dos yy

- **Teorema de Bolzano** – Toda a função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ não passa de um extremo a outro sem passar por todos os valores intermédios
  $$\left.\begin{array}{l} f \text{ contínua em } [a, b] \\ f(a) < k < f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists x \in \,]a, b[\, : f(x) = k$$
- **Corolário do Teorema de Bolzano (Para Zeros)**
  $$\left.\begin{array}{l} f \text{ contínua em } [a, b] \\ f(a) \times f(b) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists x \in \,]a, b[\, : f(x) = 0 \quad (\text{Existe pelo menos um zero em }]a, b[.)$$
  NOTA: Se pedirem para provar que o zero é único estuda-se a monotonia da função em $]a, b[$.
- $tvm_{[a,b]} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \to$ dá-nos a variação média por unidade do eixo Ox. Geometricamente é o declive da recta secante ao gráfico de f nos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$.
- **Definição de derivada:** $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
- Também se chama a $f'(x_0)$ taxa de variação instantânea em $x = x_0$.
- Velocidade – 1.ª derivada; Aceleração – 2.ª derivada.
- Derivadas laterais $f'(x_0^-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $f'(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- $f'(x_0)$ existe sse $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$
- Significado geométrico de derivada: $m_t = f'(a)$ onde t é a recta tangente e a a abcissa do ponto de tangência.
- **NOTA:** Também se pode calcular m_t através da fórmula $m_t = \tan \alpha$ onde α é a inclinação da recta t ou também pela fórmula $m_t = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ conhecidos dois pontos da recta.
- Tangente ao gráfico de f num ponto $\left\{\begin{array}{l} \text{Ponto de tangência } (a, f(a)) \\ m_t = f'(a) \end{array}\right.$ $\quad t : y = m_t x + b$ ou $y - f(a) = m_t (x - a)$
- Normal ao gráfico de f num ponto $\left\{\begin{array}{l} \text{Ponto de tangência } (a, f(a)) \\ m_n = -\dfrac{1}{m_t} \end{array}\right.$ $\quad n : y - f(a) = -\dfrac{1}{m_t}(x - a)$.
- Uma função é derivável num ponto quando admite derivada finita nesse ponto.
- Teorema da derivabilidade e continuidade: Toda a função com derivada finita num ponto (intervalo) é contínua nesse ponto (intervalo).

FORMULÁRIO DE MATEMÁTICA 12.º

REGRAS DE DERIVAÇÃO

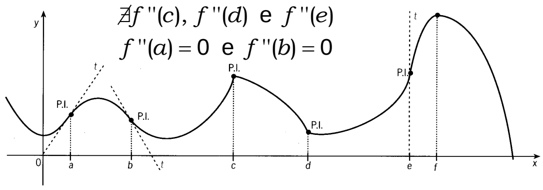
1. $(k)'=0$;
2. $x'=1$
3. $(mx+b)'=m$
4. $(kx^n)'=k\times n\times x^{n-1}$
5. $(f\pm g)'=f'\pm g'$
6. $(f\times g)'=f'\times g+f\times g'$
7. $(k\times f)'=k\times f'$
8. $\left(\dfrac{k}{x}\right)'=-\dfrac{k}{x^2}$
9. $(f^n)'=n\times f^{n-1}\times f'$
10. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$
11. $(f\circ g)'(x)=g'(x)\times f'(g(x))$

- Monotonia: D_f / $f'(x)$ / $f'(x)=0$ / Sinal de $f'(x)$. $f'(x)>0\Rightarrow f$ é $\nearrow$; $f'(x)<0\Rightarrow f$ é $\searrow$;
- Extremos relativos:
  - Máximo – f' passa de + para –.
  - Mínimo – f' passa de – para +.

x		a	
$f'(x)$	+	0	–
f	$\nearrow$		$\searrow$

x		a	
$f'(x)$	–	0	+
f	$\searrow$		$\nearrow$

- Concavidades: D_f / $f''(x)$ / $f''(x)=0$ / Sinal de $f''(x)$. $f''(x)>0\Rightarrow f$ é $\cup$; $f''(x)<0\Rightarrow f$ é $\cap$;
  Pontos de inflexão – pontos onde o gráfico muda o sentido da concavidade.



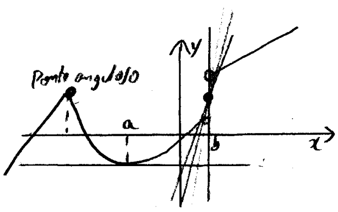
- Assimptotas $\begin{cases}\text{A. verticais}\\ \text{A. não verticais}\begin{cases}\text{A. horizontais} - m=0\\ \text{A. obliquas} - m\neq 0\end{cases}\end{cases}$
  - $x=a$ é A. vertical sse $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$
  - A recta de equação $y=b$ é assimptota horizontal do gráfico de f se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$
  - A recta de equação $y=mx+b$ é uma assimptota obliqua do gráfico de f quando $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ se $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(mx+b)\right]=0$ (ou respectivamente $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(mx+b)\right]=0$).

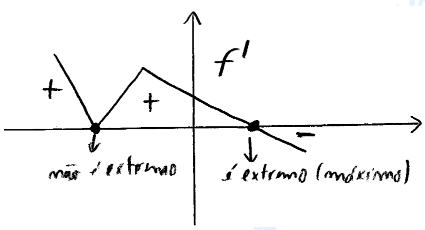
  NOTA: Na recta de equação $y=mx+b$

  $$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\begin{cases}0,\ \text{pode ser A.H.}\\ \text{n.º real}\\ \pm\infty\ \text{não há A.O.}\end{cases}\qquad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]=\begin{cases}\text{n.º real}\\ \pm\infty\ \text{não há A.O.}\end{cases}$$

  NOTA: Se uma função é contínua em IR não admite A. verticais. Se uma função tem domínio IR pode ou não admitir A.V. Se uma função tem como domínio um intervalo limitado não admite A. não verticais (A.H. e A.O.) mas poderá admitir A. verticais se o intervalo for aberto e verificar a definição.

- **Gráficos:**
  - Função: $\nearrow$ $\searrow$ $\rightarrow$ / 1.ª derivada: + – 0 — Nos pontos angulosos não há derivada
  - Função: $\cup$ $\cap$ / 2.ª derivada: + – — Quando há mudança do sentido da concavidade há ponto de inflexão e $f''(x)=0$
  - Se $f'(a)$ é infinita a recta tangente ao gráfico é vertical
  - Se $f'(a)=0$ a recta tangente ao gráfico é horizontal e tem de equação $y=f(a)$.
  - Quando f' se anula e há mudança de sinal então o gráfico tem 1 extremo relativo.

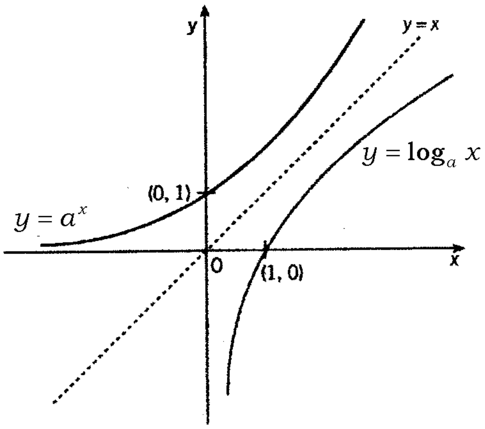




FORMULÁRIO DE MATEMÁTICA 12.º

Folha n.º 4

FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARITMICA



Função exponencial (base $a>1$)

$f: IR \to IR$

$x \mapsto a^x$

- $D = IR \quad D' = IR^+$
- é sempre positiva;
- não tem zeros;
- é contínua;
- é injectiva
- $y=0$ é A.H. unilateral quando $x \to -\infty$;
- $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$
- é crescente:
  $\forall x_1, x_2 \in D_f,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Função logarítmica (base $a>1$)

$g: IR \to IR$

$x \mapsto \log_a x$

- $D = IR^+ \quad D' = IR$
- tem um zero;
- é contínua;
- é injectiva;
- $x=0$ é A.V. unilateral
- $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$;
- é crescente:
  $\forall x_1, x_2 \in D_g,\ x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$.

Definição de logaritmo: $\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y,\ \forall x>0,\ a \in IR^+ \setminus \{1\}$

LIMITES DE REFERÊNCIA (os que estão a vermelho não podem ser usados diretamente)

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \lim\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k,\ k \in IR \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^p} = 0,\ p \in IR^+$

$\lim\left(1+\frac{k}{u_n}\right)^{u_n} = e^k,\quad u_n \to \pm\infty,\ k \in IR \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{\ln x} = +\infty,\ p \in IR^+$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^p} = +\infty,\ a>1,\ p \in IR$ e logo $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)} = 1$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{a^x} = 0,\ a>1,\ p \in IR$ e logo $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{e^x} = 0 \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1 \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x} = 1$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1} = 1$

NOTA: Quando, nos limites anteriores se substitui x por $f(x)$ mantém-se as igualdades.

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(e^x)' = e^x \qquad (e^u)' = u' \times e^u, \qquad (a^x)' = a^x \times \ln a \qquad (a^u)' = u' \times a^u \times \ln a \qquad u$ – função de x

$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u} \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$

REGRAS OPERATÓRIAS DOS LOGARITMOS

$\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(xy) \qquad \log_a(x) - \log_a(y) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right) \qquad p\log_a(x) = \log_a(x^p)$;

$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ e consequentemente $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ (fórmula da mudança de base)

$a^{\log_a(x)} = x \qquad \log_a a^x = x \qquad \log_a \frac{1}{x} = -\log_a x \qquad \log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1.$

Propriedades das potências:

1. $a^n \times a^m = a^{n+m}$ 2. $a^n \times b^n = (ab)^n$ 3. $(a^n)^m = a^{n\times m}$ 4. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

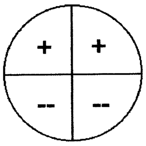
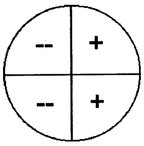
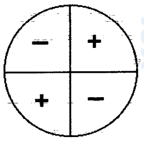
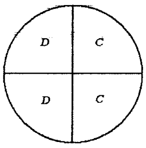
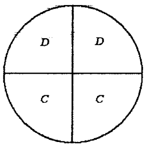
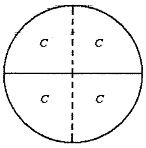
5. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ 6. $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n};\ a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ 7. $a^{-n} = \frac{1}{a^n};\ a^{-1} = \frac{1}{a}$

FORMULÁRIO DE MATEMÁTICA 12.º

Academia Aberta

Folha n.º 5

TRIGONOMETRIA

	SENO	CO-SENO	TANGENTE
SINAL			
MONOTONIA E VALORES			
PERÍODO POSITIVO	2π / 360º $\operatorname{sen}(x+2k\pi)=\operatorname{sen}x$	2π / 360º $\cos(x+2k\pi)=\cos x$	π / 180º $\operatorname{tg}(x+k\pi)=\operatorname{tg}x$
D	IR	IR	$IR\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$
D'	$[-1,1]$	$[-1,1]$	IR

$\operatorname{sen}\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; $\cos\alpha=sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

$-\operatorname{sen}(\alpha)=\operatorname{sen}(-\alpha)$; $-\cos(\alpha)=\cos(\pi-\alpha)$;

Resultados de referência

α	$30^\circ=\frac{\pi}{6}$	$45^\circ=\frac{\pi}{4}$	$60^\circ=\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{sen}\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fórmulas trigonométricas

$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

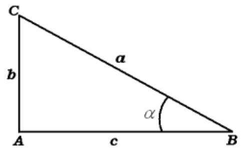
$\operatorname{sen}^2 x=1-\cos^2 x$

$\cos^2 x=1-\operatorname{sen}^2 x$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

$1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$

$\operatorname{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$



$\operatorname{sen}\alpha=\frac{b}{a}$; $\cos\alpha=\frac{c}{a}$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{c}$

Comprimento de um arco de circunferência: αr

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α em radianos)

- **Equações trigonométricas**

$\operatorname{sen}x=\operatorname{sen}\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+2k\pi \ \vee\ x=\pi-\alpha+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\cos x=\cos\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+2k\pi \ \vee\ x=-\alpha+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

- **Fórmulas da soma e diferença de ângulos**

$\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b$ $\quad$ $\operatorname{sen}(a\pm b)=\operatorname{sen}a\cos b\pm\cos a\operatorname{sen}b$ $\quad$ $\operatorname{tg}(a\pm b)=\frac{\operatorname{tg}(a)\pm\operatorname{tg}(b)}{1\mp\operatorname{tg}(a)\times\operatorname{tg}(b)}$

$\cos(2a)=\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a$ $\quad$ $\operatorname{sen}(2a)=2\operatorname{sen}a\cos a$ $\quad$ $\operatorname{tg}(2a)=\frac{2\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}^2 a}$

- **Limites de referência**

$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$ $\quad$ $\lim_{f(x)\to0}\frac{\operatorname{sen}f(x)}{f(x)}=1$ $\quad$ $\lim_{x\to0}\frac{x}{\operatorname{sen}x}=1$ $\quad$ $\lim_{f(x)\to0}\frac{f(x)}{\operatorname{sen}f(x)}=1$ $\quad$ $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1$

- **Derivadas das funções trigonométricas**

$(\operatorname{sen}x)'=\cos x$ $\quad$ $(\cos x)'=-\operatorname{sen}x$ $\quad$ $(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$

$(\operatorname{sen}u)'=u'\cos u$ $\quad$ $(\cos u)'=-u'\operatorname{sen}u$ $\quad$ $(\operatorname{tg}u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$

$f: x \to y=\operatorname{sen}x$

- Gráfico – sinusóide
- Função ímpar: $\operatorname{sen}(-x)=-\operatorname{sen}x$

(gráfico simétrico em relação à origem)

$f: x \to y=\cos x$

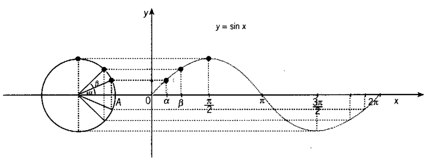
- Gráfico – co-sinusóide
- Função par: $\cos(-x)=\cos x$

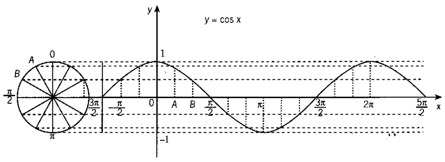
(gráfico simétrico em relação a Oy)

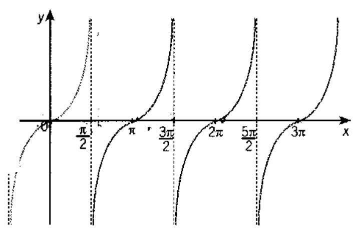
$f: x \to y=\operatorname{tg}x$

- Gráfico – tangentóide
- Função ímpar $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x$

(gráfico simétrico em relação à ori gem)





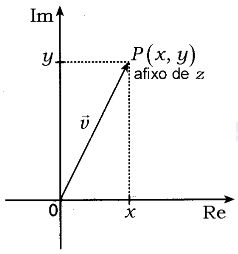


FORMULÁRIO DE MATEMÁTICA 12.º

COMPLEXOS

FORMA ALGÉBRICA

$z = x + yi \rightarrow$ Ponto (x, y),
vector (x, y)



$z = x + yi \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = x \\ \mathrm{Im}(z) = y \end{cases}$

z é real $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$;

z é imaginário puro $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = 0 \\ \mathrm{Im}(z) \neq 0 \end{cases}$

Igualdade de complexos

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \\ \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2) \end{cases}$

Complexos conjugados

$z = x + yi \quad \bar{z} = x - yi$

$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$ é um número real

Operações

Adição: $z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i)$
$= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$

Subtracção: $z_1 - z_2 = (x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i)$
$= (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$

Multiplicação: $z_1 \times z_2 = (x_1 + y_1 i) \times (x_2 + y_2 i)$ (distributividade)

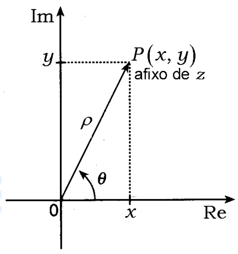
Divisão: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}$

Potenciação: $i^0 = 1 \quad i^1 = i \quad i^2 = -1 \quad i^3 = -i$

As potências de base i repetem-se de 4 em 4.
Se $n = 4q + r, n, q, r \in \mathbb{N}_0$ então $i^n = i^r$

FORMA TRIGONOMÉTRICA

$z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$
$= \rho \operatorname{cis}\theta = \rho e^{i\theta}$



$\rho \rightarrow$ módulo de z
$\theta \rightarrow$ argumento de z

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\theta = \dfrac{y}{x}$

Nota: Para achar θ devemos considerar o quadrante a que pertence o afixo de z.
$-\pi < \theta \leq \pi \rightarrow$ condição do argumento principal;
$0 \leq \theta < 2\pi \rightarrow$ condição do argumento positivo mínimo;

Igualdade de complexos

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1 e^{i\theta_1} = \rho_2 e^{i\theta_2} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Conjugado: $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$

Simétrico: $-z = \rho e^{i(\theta + \pi)}$

Operações:

Multiplicação: $z_1 \times z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

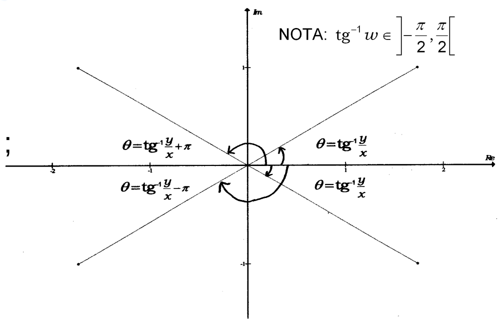
Divisão: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

Potenciação: $z^n = \rho^n e^{in\theta}$

Radiciação: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1, \ldots, n - 1$

– Os afixos das $\sqrt[n]{z}$ situam-se numa circunferência de $C(0,0)$ e $r = \sqrt[n]{\rho}$ e dividem-na em n partes iguais.
– Os afixos das $\sqrt[n]{z}$ são os vértices de um polígono regular com n lados.
– Os argumentos das $\sqrt[n]{z}$ estão em progressão aritmética de razão $\dfrac{2\pi}{n}$.

DOMÍNIOS PLANOS



- $|z| = k \rightarrow$ circunferência de centro na origem e raio k;
- $|z - z_1| = k \rightarrow$ circunferência de centro no afixo de z_1 e raio k;
- $\mathrm{Im}(z) = k \rightarrow$ recta horizontal do tipo $y = k$;
- $\mathrm{Re}(z) = k \rightarrow$ recta vertical do tipo $x = k$;
- $\arg(z - z_1) = \theta \rightarrow$ semi-recta com origem no afixo de z_1 e que faz com o eixo real positivo um ângulo de amplitude θ;
- $|z - z_1| = |z - z_2| \rightarrow$ mediatriz do segmento de recta cujos extremos são os afixos de z_1 e z_2;
- $\mathrm{Im}(z) \underset{<}{\overset{>}{-}} k, \quad \mathrm{Re}(z) \underset{<}{\overset{>}{-}} k,$ e $|z - z_1| \underset{<}{\overset{>}{-}} |z - z_2| \rightarrow$ representam semi-planos.