3.24.3)

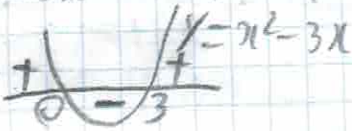
Assíntotas verticais

$D_h = \{ x \in \mathbb{R} : x-2 \neq 0 \} = \{ x \in \mathbb{R} : x \neq 2 \} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Vamos começar por escrever $h(x)$ sem o módulo.
Para isso, devemos notar que

$$|x^2-3x| = \begin{cases} x^2-3x & \text{se } x^2-3x \geq 0 \\ -x^2+3x & \text{se } x^2-3x < 0 \end{cases} = *$$

C.A.
$x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=3$



Assim temos $\begin{cases} x^2-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \vee x \geq 3 \\ x^2-3x < 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 3 \end{cases}$

$$* = \begin{cases} x^2-3x & \text{se } x \in]-\infty,0] \cup [3,+\infty[\\ -x^2+3x & \text{se } x \in]0,3[\end{cases}$$

Logo, $h(x) = \dfrac{|x^2-3x|}{x-2} = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x}{x-2} & \text{se } x \in]-\infty,0] \cup [3,+\infty[\\ \dfrac{-x^2+3x}{x-2} & \text{se } x \in]0,3[\end{cases}$

Vamos agora prosseguir com o estudo das A.V.

$\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-x^2+3x}{x-2} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

Podemos concluir que a reta de equação $x=2$ é assíntota vertical do gráfico de h. É a única para h é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ por estar definida por funções racionais contínuas neste conjunto.

Assíntotas não verticais

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2-3x}{x-2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x}{x^2-2x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}(h(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x}{x-2}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}-3x-\cancel{x^2}+2x}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x-2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x}=-1.$$

Logo, a reta de equação $y=x-1$ é assíntota oblíqua do gráfico de h.
O estudo quando $x\to-\infty$ é semelhante e conduz ao mesmo resultado.

3.24.4)

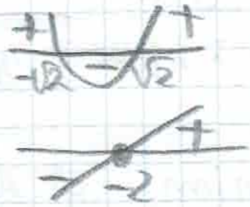
Assímptotas verticais

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^4-4 \geq 0 \wedge x \neq 0\}$

C.A.

$x^2-4 = (x^2-2)(x+2)$

x	$-\infty$	-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$
x^2-2	+	+	+	0	−	0	+
$x+2$	−	0	+	+	+	+	+
$(x^2-2)(x+2)$	−	0	+	0	−	0	+



Logo, $x^2-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$

e temos $D_f = [-2, \sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$

Como f é o quociente de f. contínuas então é contínua no seu domínio e não admite assímptotas verticais.

Assímptotas não verticais

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^4-4}}{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^4-4}}{x^2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^4-4}}{\sqrt{x^4}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^4}{x^4} - \frac{4}{x^4}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{4}{x^4}} = \sqrt{1-0} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^4-4}}{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^4-4}-x^2}{x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4-4}-x^2\right)\left(\sqrt{x^4-4}+x^2\right)}{x\left(\sqrt{x^4-4}+x^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^4}-4-\cancel{x^4}}{x\left(\sqrt{x^4-4}+x^2\right)}=\frac{-4}{+\infty}=0$$

Assim, a reta de equação $y=x$ é assíntota oblíqua do gráfico de f.

O estudo quando $x\to-\infty$ é semelhante.