


A Ficha+Aulas de Complexos inclui 5 aulas teóricas e 59 exercícios em vídeo. Todos os direitos de autor estão reservados para o autor Rui Castanheira de Paiva (ruipai-vac@gmail.com, www.academiaaberta.pt e www.facebook.com/aaberta). A ficha também está disponível em www.academiaaberta.pt juntamente com outros conteúdos interativos e fórum de tira dúvidas. Recomendamos que a utilize de acordo com a seguinte sequência:

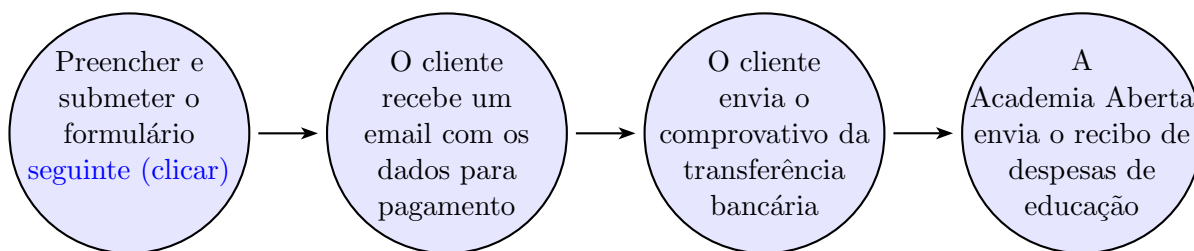
Vídeo da aula → Resolver os exercícios → Confirmar resultados nos vídeos

Para visualizar a resolução dum exercício deve clicar no ícone  junto ao mesmo.

Os vídeos associados a esta ficha de trabalho têm acesso gratuito. Quando compra um conteúdo à Academia Aberta contribui para a manutenção e melhoria do site, aquisição de equipamento e software e para mostrar aos autores a sua gratidão!

*Quem acolhe um benefício com gratidão, paga a primeira prestação da sua dívida.
(Sêneca, 04 a.C.-65).*

Caros estudantes, professores, explicadores, pais e amantes da matemática, podem contribuir para a Academia Aberta através da compra voluntária da licença de utilização desta obra (≥ 3 euros ou ≥ 12 reais). O pagamento pode ser feito por transferência bancária ou Paypal. Para tal, deve preencher o seguinte [formulário](#) ([clique](#)). Depois de o fazer receberá um email com a informação necessária.



AULA 1: Primitivas e primitivas imediatas/antiderivadas

Sumário/pré-requisitos

Primitivas/antiderivadas:

- Noção de primitiva/antiderivada. Primitivas imediatas.

Pré-requisitos:

O estudante deverá saber derivar muito bem e saber aplicar fórmulas matemáticas.



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 1 clique em .

ATENÇÃO: Há uma tabela de primitivas imediatas na última página desta ficha.

1.1. Calcule as primitivas das funções definidas pelas expressões analíticas.

- (a) $x^3 + 3x^2 - 4$ (b) $\frac{x^3 + x + 2}{\sqrt{x}}$ (c) $\cos x e^{\sin x}$
- (d) $\sin x \cos x$ (e) $\sin^2 x \cos x$ (f) $\frac{e^{2x}}{4 + e^{2x}}$
- (g) $\frac{\ln x}{x}$ (h) $\tan^2(x) \sec^2(x)$ (i) $\sin(4x)$
- (j) $x \cos(4x^2)$ (l) $\frac{3x}{1 + x^2}$ (m) $\frac{2}{1 + x^2}$
- (n) $\frac{3}{4 + x^2}$ (o) $\frac{x - 1}{\sqrt{4 - x^2}}$ (p) $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$
- (q) $x7^{x^2}$ (r) $\frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$ (s) $\frac{1}{x(1 + \ln^2 x)}$
- (t) $-\frac{6x^2}{\sqrt{4 - 16x^6}}$ (u) $\frac{x}{\cos^2(x^2)}$ (v) $\frac{1 - 2x}{\sqrt{9 - x^2}}$
- (w) $\frac{1}{x \ln x}$ (x) $\frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 - \sin^4 x}}$ (z) $\frac{x^3}{x^8 + 5}$
- (a2) $\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$ (b2) $(2e^{x+1} + 10x)^3 (e^{x+1} + 5)$ (c2) $e^{x^2-3x} (2x - 3)$
- (d2) $\frac{(\ln(x) - 4)^4}{x}$ (e2) $\frac{\ln(x)}{x(\ln^2(x) + 3)}$

AULA 2: Primitivas por partes

Sumário/pré-requisitos

Primitivas/antiderivadas:

- Primitivas por partes.











Pré-requisitos:

O estudante deverá saber derivar muito bem e saber aplicar fórmulas matemáticas. Deverá também saber fazer primitivas imediatas.



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 2 clique em

2.1. Calcule as primitivas das funções definidas pelas expressões analíticas.

- (a) $x \cos x$  (b) $x \sin x$  (c) $\arccos x$ 
- (d) $x^2 \cos x$  (e) $x \ln x$  (f) xe^x 
- (g) $e^x \sin x$  (h) $\ln x$  (i) $\ln^2(x)$ 
- (j) x^2e^x 

AULA 3: Primitivas por substituição

Sumário/pré-requisitos

Primitivas/antiderivadas:

- Primitivas por substituição.

Pré-requisitos:






O estudante deverá saber derivar muito bem e saber aplicar fórmulas matemáticas. Deverá também saber fazer primitivas imediatas.



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 3 clique em .

ATENÇÃO: Há uma tabela de primitivas por substituição no fim desta ficha.

3.1. Calcule as primitivas das funções definidas pelas expressões analíticas.

- (a) $\sqrt{4 - 4x^2}$, $x = \cos t$  (b) $\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$, $x = \sin t$ 
- (c) $\frac{1}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}$, $x = 2 \tan t$  (d) $\frac{3^{2x} - 3^x - 2}{3^x}$, t $3^x = t$ 
- (e) $\ln(\sqrt{1+x^2})$, $x = \tan t$ (f) $\sqrt{\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}}$, $e^x = t^2 + 1$ 

AULA 4: Primitivas de potências de funções trigonométricas

Sumário/pré-requisitos

Primitivas/antiderivadas:

- Primitivas de potências de funções trigonométricas.

Pré-requisitos:


O estudante deverá saber derivar muito bem e saber aplicar fórmulas matemáticas. Deverá também saber fazer primitivas imediatas.





Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 4 clique em .


ATENÇÃO: Há uma tabela de primitivas de funções trigonométricas no fim desta ficha.


4.1. Calcule as primitivas das funções definidas pelas expressões analíticas:


(a) $\cos^2 x$ 

(b) $\sin^4(3x)$ 

(c) $\tan^2(4x)$ 

(d) $\sin^2 x$ 

(e) $\cos^4(2x)$ 

(f) $\cotg^2(3x)$ 

Próxima página: Primitivas de frações racionais.

AULA 5: Primitivas de frações racionais

Sumário/pré-requisitos

Primitivas/antiderivadas:

- Primitivas de frações racionais.

Pré-requisitos:

O estudante deverá saber derivar muito bem e saber aplicar fórmulas matemáticas. Deverá também saber fazer primitivas imediatas.



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 5 clique em

5.1. Decomponha a fração $\frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$ na soma de um polinómio com uma fração própria.

5.2. Calcule as primitivas das funções definidas pelas expressões analíticas.

(a) $\int \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^2 + 2} dx$

(b) $\int \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} dx$

(c) $\int \frac{4 - 5x}{x^2 + 2x - 15} dx$

(d) $\int \frac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2} dx$

(e) $\int \frac{x^2 - x}{(x + 2)^2(x - 1)} dx$

(f) $\int \frac{x + 3}{(x - 1)^2(x + 1)} dx$

(g) $\int \frac{2x^2 + 3x + 1}{(x^2 + 1)x} dx$

(h) $\int \frac{2x - 4}{(x^2 + 1)(x + 2)} dx$

Função	Primitiva
1) $f' f^p$	$\frac{f^{p+1}}{p+1} + C, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
2) $f' a^f$	$\frac{a^f}{\ln a} + C, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
3) $\frac{f'}{f}$	$\ln f + C$
4) $f' \cos(f)$	$\sin(f) + C$
5) $f' \sin(f)$	$-\cos(f) + C$
6) $f' \sec^2(f)$	$\tan(f) + C$
7) $f' \operatorname{cosec}^2(f)$	$-\cot(f) + C$
8) $f' \sec(f) \tan(f)$	$\sec(f) + C$
9) $f' \operatorname{cosec}(f) \cot(f)$	$-\operatorname{cosec}(f) + C$
10) $\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$\arcsin(f) + C \quad \text{ou} \quad -\arccos(f) + C$
11) $\frac{f'}{1+f^2}$	$\arctan(f) + C \quad \text{ou} \quad -\operatorname{arccot}(f) + C$
12) $f' \tan(f)$	$-\ln \cos(f) + C$
13) $f' \cot(f)$	$\ln \sin(f) + C$
14) $f' \sec(f)$	$\ln \sec(f) + \tan(f) + C$
15) $f' \operatorname{cosec}(f)$	$\ln \operatorname{cosec}(f) - \cot(f) + C$

Tabela 1: Tabela de primitivas imediatas.

Tipo de função	Substituição
1) $R(a^{c_1x}, a^{c_2x}, \dots, a^{c_nx})$	$a^{mx} = t \Leftrightarrow x = \frac{\log_a(t)}{m}$ onde $m = m.d.c.(c_1, c_2, \dots, c_n)$
2) $R(\log_a(x))$	$t = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^t$
3) $R(x, \sqrt{a^2 - b^2x^2})$	$x = \frac{a}{b} \sin(t)$ ou $x = \frac{a}{b} \cos(t)$
4) $R(x, \sqrt{a^2 + b^2x^2})$	$x = \frac{a}{b} \tan(t)$
5) $R(x, \sqrt{b^2x^2 - a^2})$	$x = \frac{a}{b} \sec(t)$
6) $R(x, \sqrt{x}, \sqrt{a - bx})$	$x = \frac{a}{b} \sin^2(t)$
7) $R(x, \sqrt{x}, \sqrt{a + bx})$	$x = \frac{a}{b} \tan^2(t)$
8) $R(x, \sqrt{x}, \sqrt{bx - a})$	$x = \frac{a}{b} \sec^2(t)$

Tabela 2: Tabela de primitivas por substituição.

I - Potências de funções trigonométricas

Dividimos esta secção em 5 casos.

1 - Potências ímpares de $\sin(x)$ ou $\cos(x)$ – Destaca-se uma unidade à potência ímpar e o fator resultante passa-se para a co-função através da fórmula fundamental da trigonometria:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

2 - Potências pares de $\sin(x)$ ou $\cos(x)$ – Usam-se as fórmulas da redução ao cosseno do ângulo duplo:

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \quad \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)).$$

3 - Potências de $\tan(x)$ ou $\cotg(x)$ – Destaca-se $\tan^2(x)$ ou $\cotg^2(x)$ e usa-se uma das fórmulas:

$$\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1 \quad \text{ou} \quad \cotg^2(x) = \text{cosec}^2(x) - 1.$$

4 - Potências pares de $\sec(x)$ ou $\text{cosec}(x)$ – Destaca-se $\sec^2(x)$ ou $\text{cosec}^2(x)$ e ao fator resultante aplica-se uma das fórmulas:

$$\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x) \quad \text{ou} \quad \text{cosec}^2(x) = 1 + \cotg^2(x).$$

5 - Potências ímpares de $\sec(x)$ ou $\text{cosec}(x)$ – Destaca-se $\sec^2(x)$ ou $\text{cosec}^2(x)$ e primitiva-se por partes começando por esse fator.

II - Produtos de potências de funções trigonométricas

1 - Potência ímpar em $\sin(x)$ por qualquer potência em $\cos(x)$ – Destaca-se $\sin(x)$ e o fator resultante passa-se para a co-função através da fórmula:

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x).$$

2 - Potência ímpar em $\cos(x)$ por qualquer potência de $\sin(x)$ – Destaca-se $\cos(x)$ e o fator resultante passa-se para a co-função através da fórmula:

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x).$$

3 - Potência par em $\cos(x)$ por potência par em $\sin(x)$ – Aplicam-se as fórmulas:

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x); \quad \sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)); \quad \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)).$$

III - Produtos em que aparecem fatores do tipo $\sin(mx)$ e/ou $\cos(nx)$

Aplicam-se as fórmulas:

- $\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y));$
- $\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y));$
- $\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y)).$