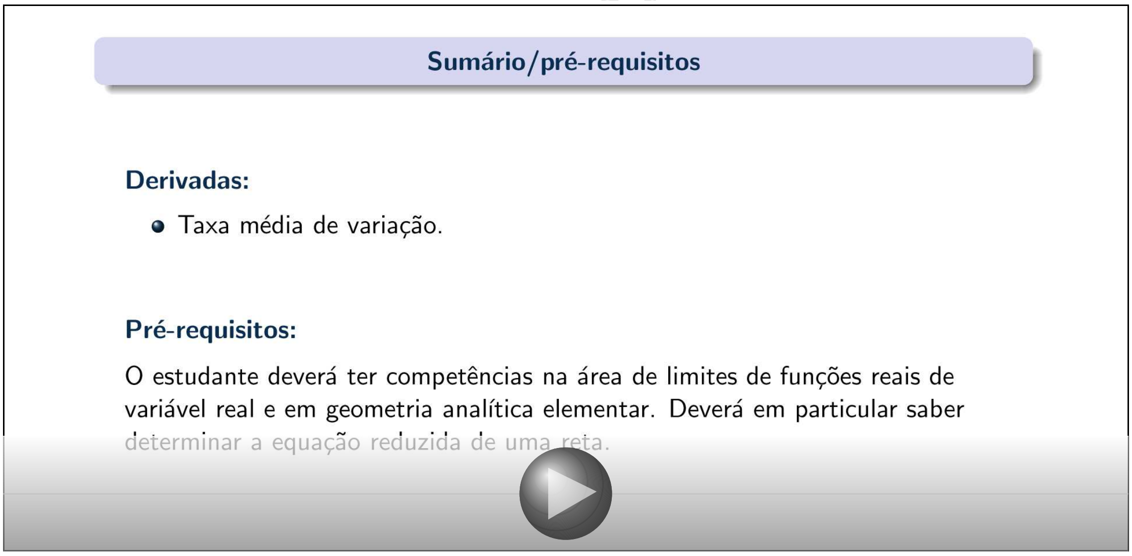
Matemática A 11.º

Ficha+Aulas de Derivadas

Academia Aberta

Conteúdo: 7 aulas e 23 exercícios em vídeo.
Versão: 10 de janeiro de 2022.
Verifique se existe versão com data mais recente: aqui.
Autor: Rui Paiva (ruipaivac@gmail.com, www.academiaaberta.pt).
Instruções: Vídeo da aula → Exercícios → Confirmar resultados nos vídeos
Nota: Para visualizar a resolução dum exercício deve clicar no ícone.

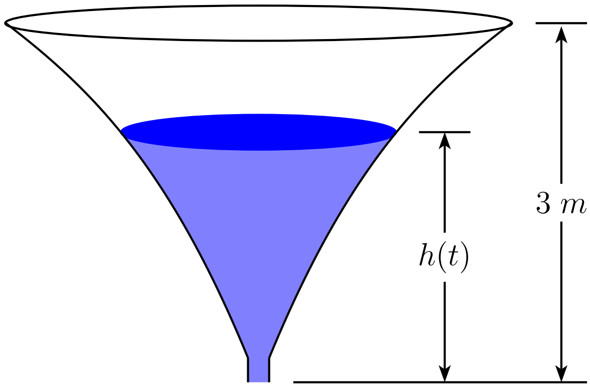
AULA 1: Taxa média de variação - Parte 1



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 1 - Parte 1 clique em.

1.1. A figura representa um reservatório com três metros de altura. Considere que, inicialmente, o reservatório está cheio de água e que, num certo instante, se abre uma válvula e o reservatório começa a ser esvaziado. O reservatório fica vazio ao fim de nove horas. Admita que a altura, em metros, da água no reservatório, t horas após este ter começado a ser esvaziado, é dada para $t \in [0, 9]$ por

$$h(t) = \frac{14t - a}{3t - b}.$$



(a) Mostre que $a = 126$ e $b = 42$.

(b) Qual a altura, em metros, da água no reservatório sabendo que a válvula esteve aberta 5 horas?

(c) Determine a taxa de variação média de h no intervalo $[3, 5]$ e interprete o resultado.

AULA 1: Reta tangente - Parte 2

Sumário/pré-requisitos

Derivadas:

- Reta tangente.

Pré-requisitos:

O estudante deverá ter competências na área de limites de funções reais de variável real e em geometria analítica elementar. Deverá em particular saber determinar a equação reduzida de uma reta.

Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 1 - Parte 2 clique em .

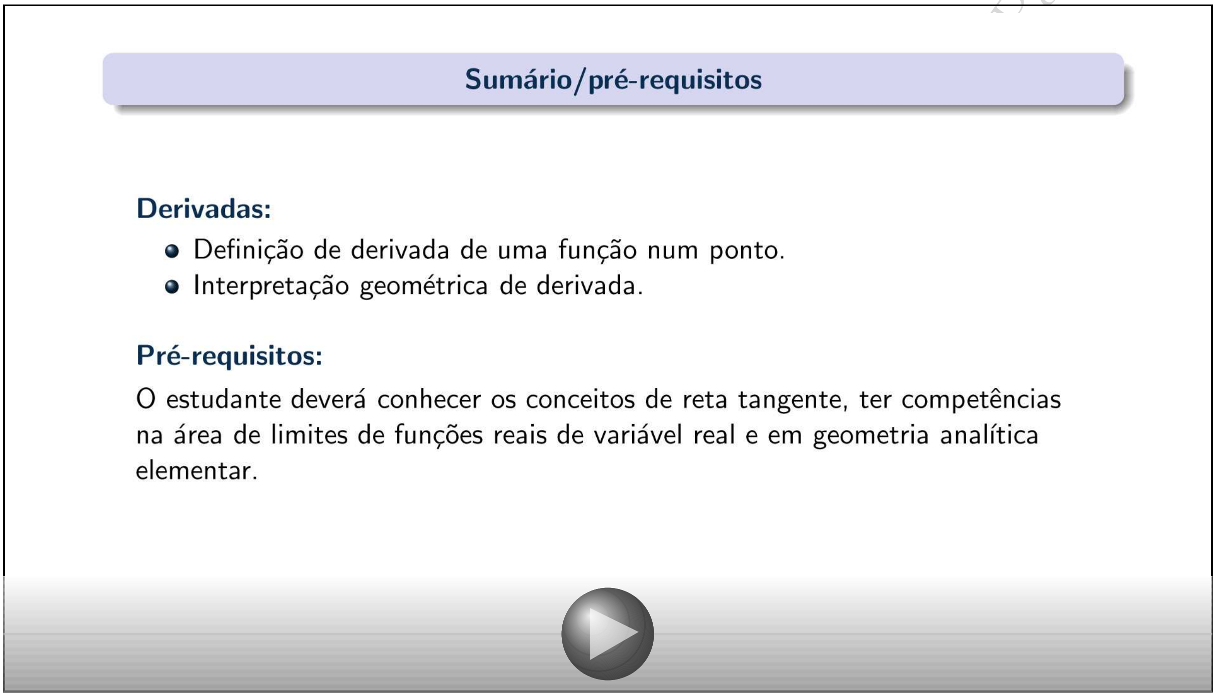
1.2. Calcule a equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto T onde:

(a) $f(x) = x^2 - 4$ e $T(1, -3)$

(b) $f(x) = \dfrac{x-4}{x+2}$ e $T(0, -2)$

1.3. A reta de equação $y = x + 1$ é tangente ao gráfico da função real de variável real definida por $f(x) = x^2 + 3x + 2$. Determine as coordenadas do ponto de tangência.

AULA 2: Definição de derivada. Interpretação geométrica de derivada



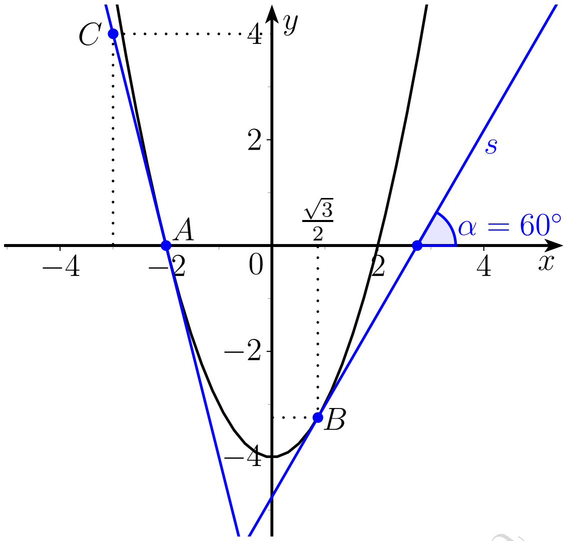
Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 2 clique em .

2.1. Calcule, recorrendo à definição de derivada:

(a) $f'(-1)$ onde $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{1 - x}$

(b) $f'(4)$ onde $f(x) = \sqrt{x}$

2.2 Na figura seguinte está representado o parte do gráfico da função definida por $f(x) = x^2 - 4$ e as suas retas tangentes nos pontos de abcissas -2 e $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Determine as equações das retas tangentes, $f'(-2)$ e $f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

AULA 3: Pontos onde não existe derivada

Sumário/pré-requisitos

Derivadas:

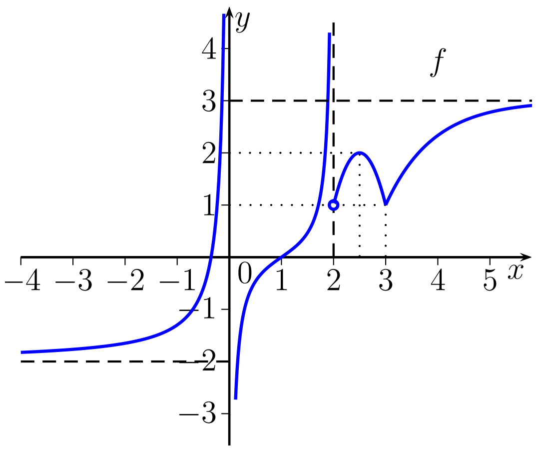
- Pontos onde não existe derivada.

Pré-requisitos:

O estudante deverá conhecer os conceitos de derivada e de reta tangente e ter competências na área de geometria analítica elementar.

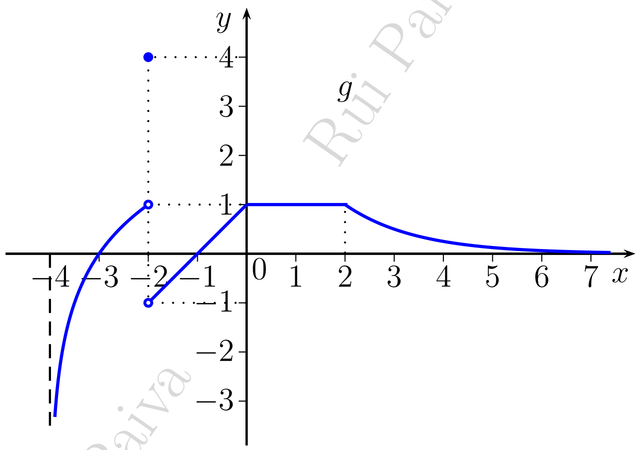
Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 3 clique em .

3.1. Na figura seguinte está representado parte do gráfico de uma função real de variável real f.



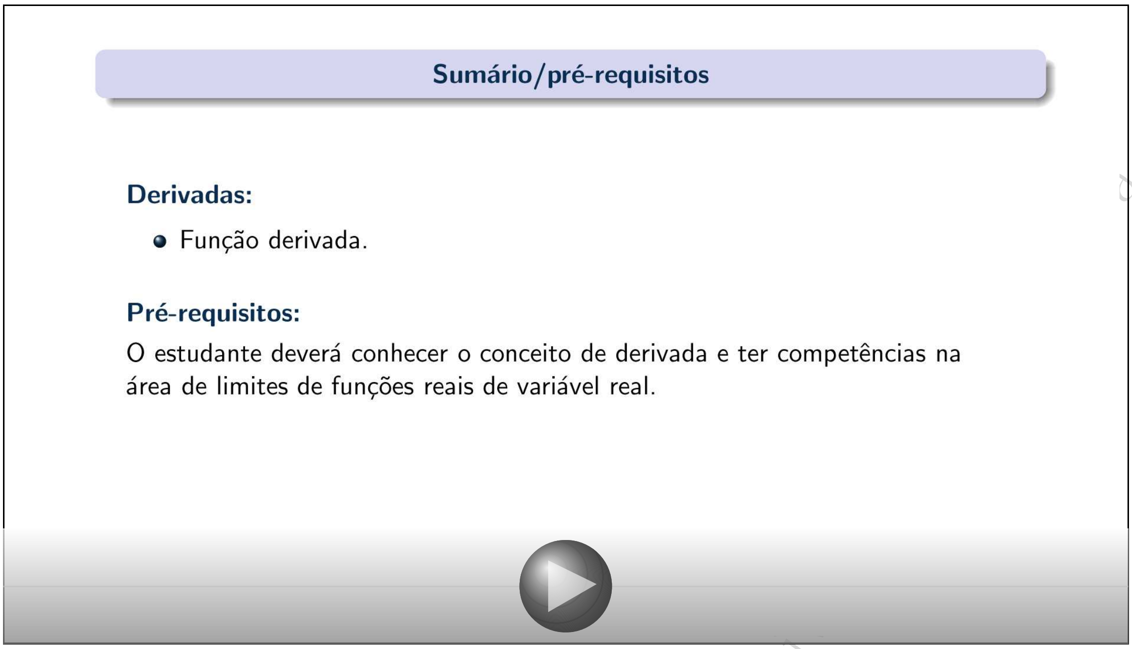
Indique o conjunto de pontos onde f é derivável, com base no seu gráfico.

3.2. Na figura seguinte está representado parte do gráfico de uma função real de variável real g.



Estude g quanto à derivabilidade, com base no seu gráfico.

AULA 4: Função derivada



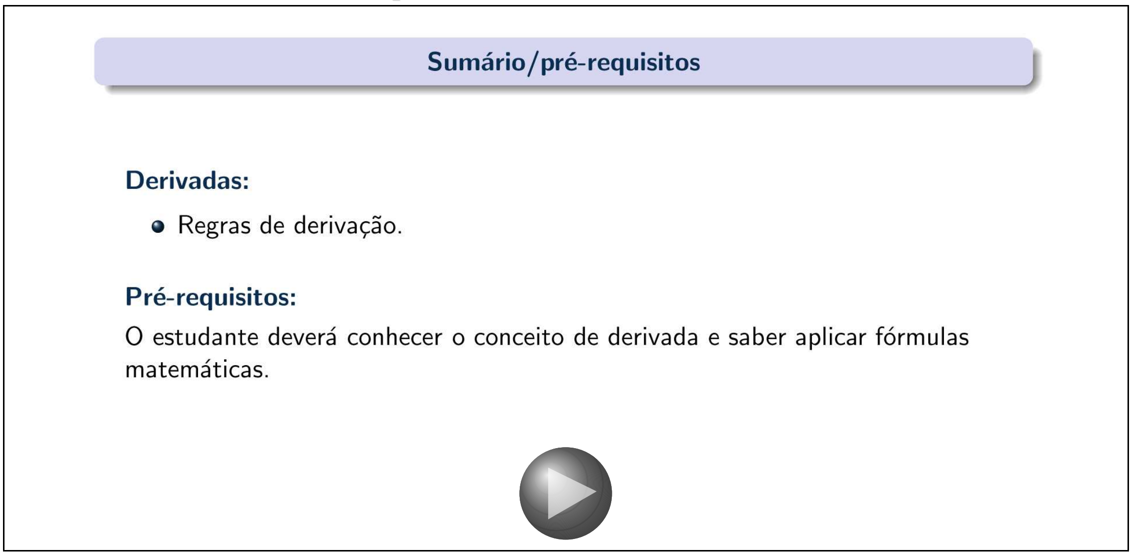
Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 4 clique em .

4.1. Caraterize a função derivada de cada uma das seguintes funções recorrendo à sua definição:

(a) $f(x) = 3x - 4$

(b) $g(x) = x^2 - 4x + 2$

AULA 5: Regras de derivação



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 5 clique em .

5.1. Determine a derivada de cada uma das seguintes funções usando as regras de derivação:

(a) $y = 3x + 5$

(b) $y = (1 + x) + \left(3x + x^2\right)$

(c) $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{4}x^4 - 5x^6$

(d) $y = \dfrac{8}{x} - \dfrac{9}{x+2}$

(e) $y = \dfrac{2x + 4}{2x}$

5.2. Calcule a derivada das seguintes funções no ponto indicado:

(a) $f(x) = x^2 - \dfrac{x}{4} + 2$ e $x = 4$;

(b) $f(x) = 5x^3 - \dfrac{4}{x}$ e $x = 1$.

5.3. Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto T onde:

(a) $f(x) = x^2 - 3x + 4$ e T é o ponto de abcissa 1;

(b) $f(x) = \dfrac{4}{x} + 2x$ e T é o ponto de abcissa -2.

AULA 6: Aplicação das derivadas à monotonia e aos extremos

Sumário/pré-requisitos

Derivadas:

- Aplicação das derivadas ao estudo da monotonia e extremos de uma função.

Pré-requisitos:

O estudante deverá conhecer os conceitos de derivada e de extremo de uma função, saber aplicar as regras de derivação e resolver equações. Deverá ainda conhecer os gráficos das funções afim e quadrática.

Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 6 clique em .

6.1. Estude a monotonia e a existência de extremos relativos de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x) = x^2 + 1$

(b) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

(c) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 3$

(d) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

6.2. A partir de folhas metálicas retangulares com dimensões 6 m por 8 m pretendem-se construir contentores sem tampa com a forma de paralelepípedo. Dos cantos da chapa, extraem-se quadrados de modo o permitir a sua construção.

Quais são as dimensões da caixa de maior volume?

Tabela de derivadas

Sejam f e g funções reais de variável real.
Sejam $a, k \in \mathbb{R}$ constantes.

$k' = 0$	$x' = 1$
$(kx)' = k$	$(x^k)' = kx^{k-1}$
$(f+g)' = f' + g'$	$(f-g)' = f' - g'$
$(kf)' = kf'$	$\left(\dfrac{k}{x}\right)' = -\dfrac{k}{x^2}$
$\left(\dfrac{k}{x+a}\right)' = -\dfrac{k}{(x+a)^2}$	