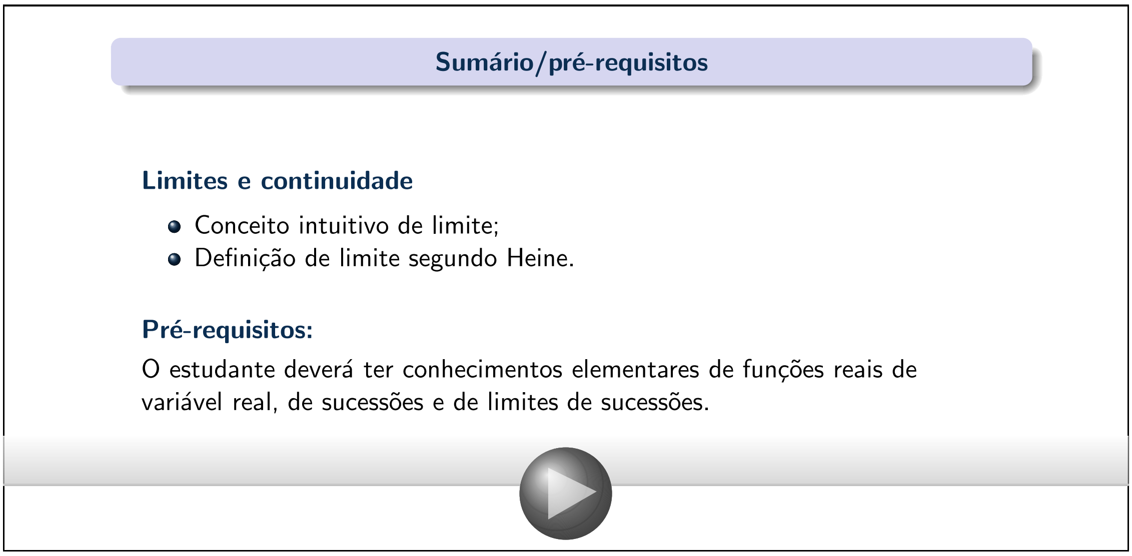
Matemática A 12.º

Ficha+Aulas de limites e continuidade, Teorema de Bolzano, assíntotas

Conteúdo: 8 aulas e 60 exercícios em vídeo.
Versão: 6 de janeiro de 2022.
Verifique se existe versão com data mais recente: aqui.
Autor: Rui Paiva (ruipaivac@gmail.com, www.academiaaberta.pt).
Instruções: Vídeo da aula → Exercícios → Confirmar resultados nos vídeos
Nota: Para visualizar a resolução dum exercício deve clicar no ícone .
Conteúdos do mesmo autor:

- Livro Preparação híbrida para o Exame Nacional de Matemática A 2021
- Plataforma de preparação para o 12.º e para o Exame Nacional de Matemática A
- Fichas de itens dos exames nacionais dos últimos 15 anos compilados por temas com resolução e/ou vídeo

AULA 1: Revisões. Definição de limite segundo Heine



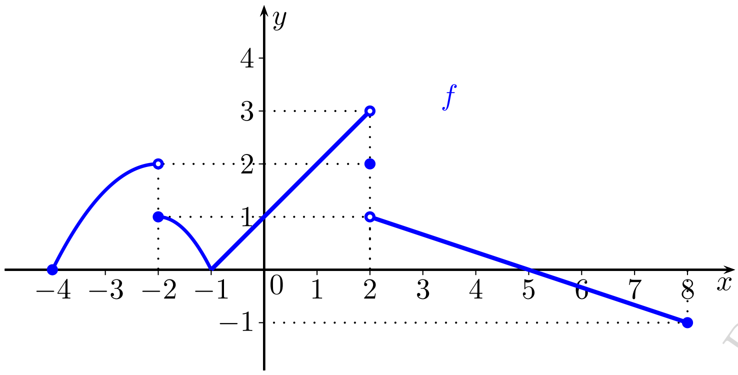
Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 1 clique em .

1.1. Calcule $\lim f\left(a_n\right)$ onde:

(a) $f(x) = 4x - 24$ e $a_n = \dfrac{3n-2}{n}$;

(b) $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ e $a_n = \dfrac{1}{n}$.

1.2. Na figura seguinte está representado o gráfico de uma função real de variável real f.



Calcule, se existir:

(a) $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x)$;

(b) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$;

(c) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$

(d) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$;

(e) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$;

(f) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$;

(g) $\lim\limits_{x \to 8^-} f(x)$;

1.3. Considere o gráfico da função real de variável real f do exercício anterior. Calcule:

(a) $\lim f\left(-4 + \frac{1}{n}\right)$;

(b) $\lim f\left(-2 - \frac{2}{n^2}\right)$;

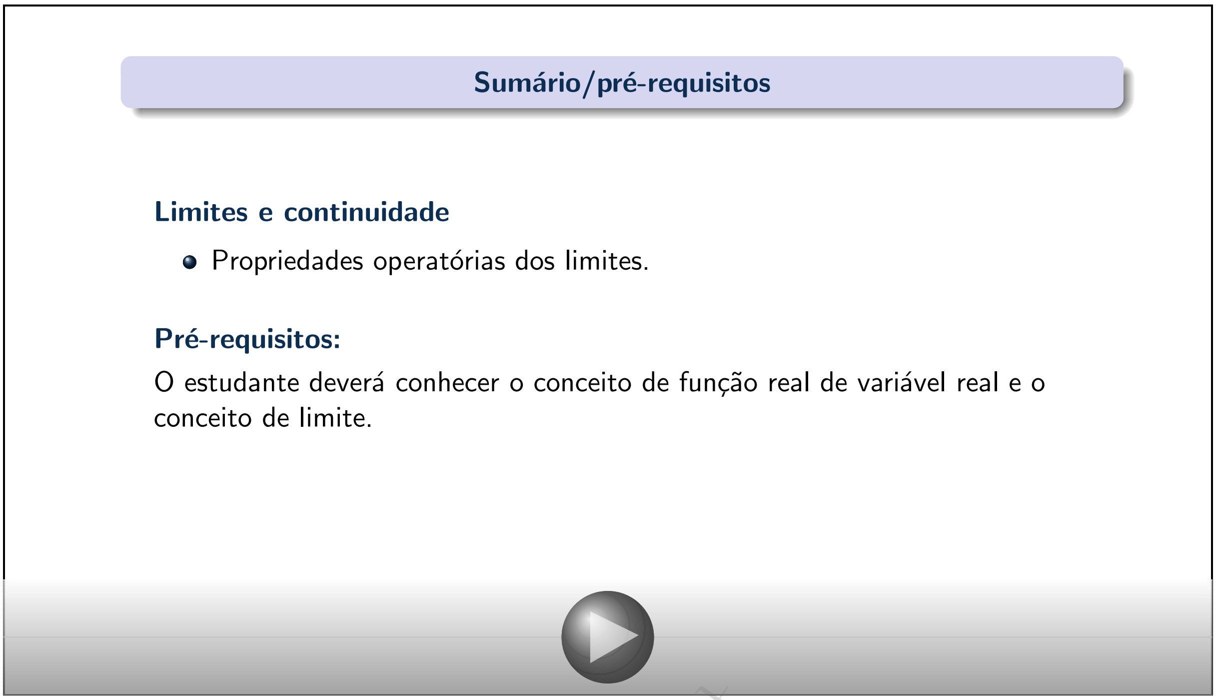
(c) $\lim f\left(-2 + \frac{1}{2^n}\right)$;

(d) $\lim f\left(2 - \frac{1}{n^2+1}\right)$;

(e) $\lim f\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)$;

(f) $\lim f\left(8 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

(g) $\lim f\left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$;



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 2 clique em .

2.1. Calcule, se existirem, os seguintes limites aplicando as suas regras operatórias:

(a) $\lim\limits_{x\to 3}(5x)$

(b) $\lim\limits_{x\to -3}\left(5x^2-4x^5+2\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x-4}{x+4}$

(d) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{x^3}$

(e) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ onde $f(x)=\begin{cases} 2-3x & \text{se } x<1 \\ 4 & \text{se } x=1 \\ -1+x^2-x & \text{se } x>1 \end{cases}$

AULA 3: Limites e o infinito

Sumário/pré-requisitos

Limites e continuidade

- Limites e infinito.

Pré-requisitos:

O estudante deverá conhecer o conceito de função real de variável real e as regras operatórias dos limites.

Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 3 clique em .

3.1. Calcule cada um dos seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(10+x)$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(10+x)$ (c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(9999-2x)$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+5x^5\right)$ (e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x-x^2\right)$

3.2. Calcule cada um dos seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{1}{x-2}$ (b) $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{-3}{3-x}$ (c) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2x}{x^2-4}$

(d) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{5x+2}{x^2-3x}$ (e) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{4x^2}{2x-x^2}$ (f) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{2}-2}{1-x^2}$

AULA EXTRA: Resultados sobre limites

Teorema

Dado $D \subset \mathbb{R}$, funções $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : D \to \mathbb{R}$ e um ponto a aderente a D, se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ e se g é limitada então $\lim\limits_{x \to a} [f(x)g(x)] = 0$.

NOTA: o presente resultado ainda é válido em limites por valores superiores ou inferiores a a bem como em limites em $\pm\infty$.

Teorema

Dadas as funções reais de variável real f e g e um ponto a aderente a $D_{g \circ f}$, se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c \in \mathbb{R}$, onde $b, c \in \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$.

Exercícios: Exercícios de escolha múltipla e de desenvolvimento com resolução deste tema no livro Preparação híbrida para o Exame nacional de Matemática e na Plataforma de preparação para o Exame Nacional de Matemática 12. Pode ver mais pormenores e adquirir o livro ou uma licença de acesso à Plataforma clicando nos links.

AULA 4: Limites e indeterminações

Sumário/pré-requisitos

Limites e continuidade

- Limites e indeterminações.

Pré-requisitos:

O estudante deverá conhecer os conceitos de função real de variável real e saber aplicar as propriedades operatórias dos limites.

Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 4 clique em .

4.1. Calcule cada um dos seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^5 + 3x + 2\right)$ (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^5 - 3x + 2\right)$

(c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(4x^5 - 3x - x^6\right)$ (d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(9x - 42x^2 - 2x^3\right)$

(e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 + 7x}{2 - x}$ (f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 + 5x}{x^2 + 3x + 2}$

(g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^3 + 9}$ (h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{x^5}{4 - 2x}\right)$

4.2. Calcule cada um dos seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3x}-\sqrt{7+3x}}{2}$

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{\sqrt{1-2x}-\sqrt{3-2x}}$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{1}{2}\times x^2}{\sqrt{x^2}-\sqrt{5+4x^2}}$

4.3. Calcule:

(a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

(b) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{x+1}$

(c) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{2x^3-6x^2+8}$

(d) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3+x^2-5x+3}$

(e) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^4+x^2}{x^3}$

(f) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3+x^2-5x+4}$

(g) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{x}}$

(h) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

(i) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^3-x^2}$

(j) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{1-\sqrt{x+4}}{x+3}$

AULA 5: Continuidade de uma função

Sumário/pré-requisitos

Limites e continuidade

- Continuidade de uma função num ponto e num intervalo.

Pré-requisitos:

O estudante deverá conhecer o conceito de função real de variável real e saber calcular limites de uma função num ponto.

Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 5 clique em .

5.1. Considere a função real de variável real definida por $f(x)=\begin{cases}|k|-5 & \text{se } x\geq-1\\ \frac{x^3+1}{x^2+x} & \text{se } x<-1\end{cases}$ onde $k\in\mathbb{R}$.

Determine os valores de k de modo a que a função seja contínua em $x=-1$.

5.3. Estude cada uma das seguintes funções quanto à continuidade justificando pormenorizadamente.

(a) $f(x) = x^4 - 3x + 5$

(b) $g(x) = \dfrac{2 - x^3}{9 - x^2}$

AULA EXTRA: Teoremas de comparação, das sucessões e das funções enquadradas

Proposição – Resultados de sucessões

Consideremos as sucessões (u_n) e (v_n).

- Se (u_n) e (v_n) forem convergentes e a partir de uma certa ordem $u_n \leq v_n$ então $\lim u_n \leq \lim v_n$.
- Se a partir de uma certa ordem $u_n \leq v_n$ e $\lim u_n = +\infty$ então $\lim v_n = +\infty$.
- Se a partir de uma certa ordem $u_n \leq v_n$ e $\lim v_n = -\infty$ então $\lim u_n = -\infty$.

Teorema das sucessões enquadradas

Consideremos as sucessões (u_n), (v_n) e (w_n). Se (u_n) e (v_n) forem convergentes para o mesmo limite l e a partir de uma certa ordem $u_n \leq w_n \leq v_n$ então (w_n) é convergente e $\lim w_n = l$.

Resultado de limite de funções

Sejam f e g duas funções reais de variável real de domínio D e $a \in \mathbb{R}$ um ponto aderente a D. Se para todo o $x \in D$, $f(x) \geq g(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ (respetivamente $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$), então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ (respetivamente $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$).

NOTA: Este resultado pode ser adaptado para valores superiores ou inferiores a a bem como ao caso de limites em $\pm\infty$.

Teorema das funções enquadradas

Sejam l um número real, f, g e h funções reais de variável real de domínio D e $a \in \mathbb{R}$. Se $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l$ e se para todo o $x \in D$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

NOTA: Este resultado pode ser adaptado para valores superiores ou inferiores a a bem como ao caso de limites em $\pm\infty$.

Teorema das funções enquadradas

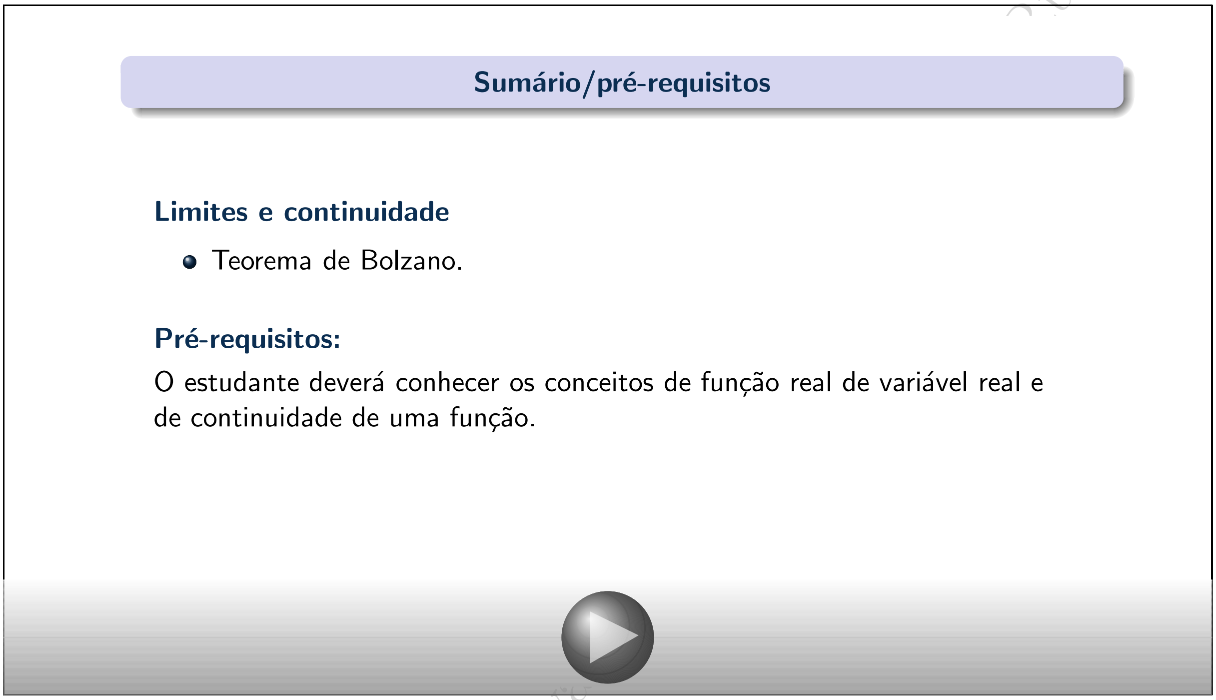
Sejam l um número real, f, g e h funções reais de variável real de domínio D e $a \in \mathbb{R}$. Se $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l$ e se para todo o $x \in D$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

NOTA: Este resultado pode ser adaptado para valores superiores ou inferiores a a bem como ao caso de limites em $\pm\infty$.

Teorema de Weierstrass
Se f é uma função real de variável real contínua num intervalo $[a, b]$ então f admite máximo e mínimo absolutos neste intervalo.

Exercícios: Exercícios de escolha múltipla e de desenvolvimento com resolução deste tema no livro Preparação híbrida para o Exame nacional de Matemática e na Plataforma de preparação para o Exame Nacional de Matemática 12. Pode ver mais pormenores e adquirir o livro ou uma licença de acesso à Plataforma clicando nos links.

AULA 6: Teorema de Bolzano



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 6 clique em .

6.1. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$.

(a) Mostre que $f(x) = 10$ tem pelo menos uma solução em $]4, 5[$.

(b) Mostre que $f(x) = 0$ tem pelo menos uma solução em $]-3, 0[$

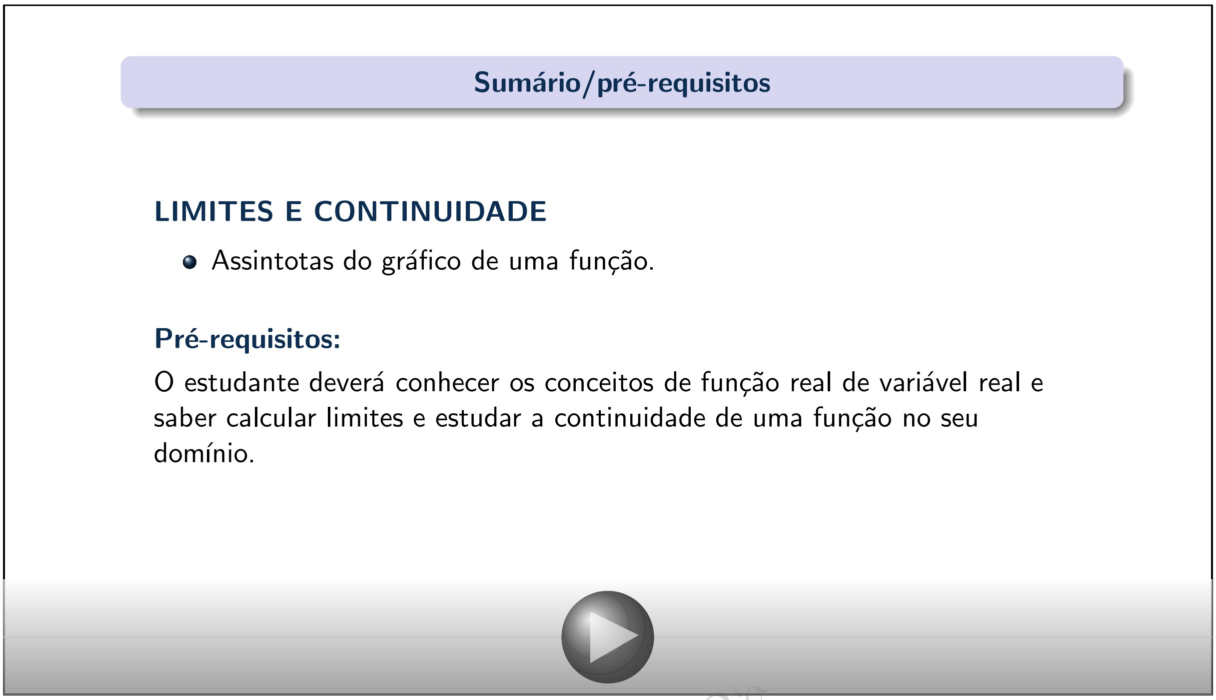
(c) Prove que f toma o valor -1 pelo menos uma vez no intervalo $]0, 3[$

6.2. Seja f uma função contínua, de domínio $[0, 5]$ e contradomínio $[3, 4]$. Seja g a função, de domínio $[0, 5]$, definida por $g(x) = f(x) - x$. Prove que a função g tem, pelo menos, um zero.

6.3. De uma função g, contínua em $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- 1 é zero de g;
- $g(3) > 0$.

Prove que a equação $g(x) = \dfrac{g(3)}{2}$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1, 3[$.

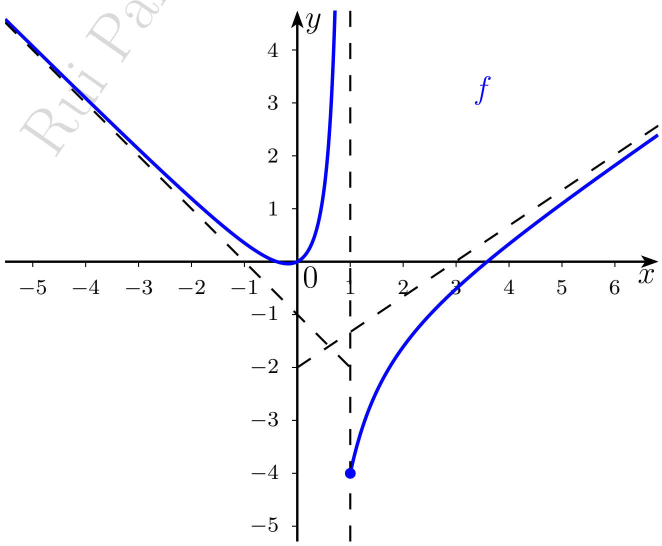


Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 7 clique em .

7.1. Determine as assíntotas dos gráficos das funções reais de variável real definidas por:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x+2}$ (b) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{3x^2-3}$

7.2. Na figura seguinte está representado parte do gráfico de uma função real de variável real f.



Indique, justificando, a veracidade de cada uma das seguintes afirmações:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - \dfrac{2}{3}x\right) = -2$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - \dfrac{2}{3}x + 2\right) = 0$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - \dfrac{1}{3}x\right) = +\infty$

(e) $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$

(f) $\lim_{x \to -\infty} (f(x) + x) = -1$

(g) $\lim_{x \to -\infty} (f(x) + x - 11) = 10$

(h) $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - x + 1) = 1$

(i) $\lim_{x \to -\infty} (f(x) + 2x) = -1$