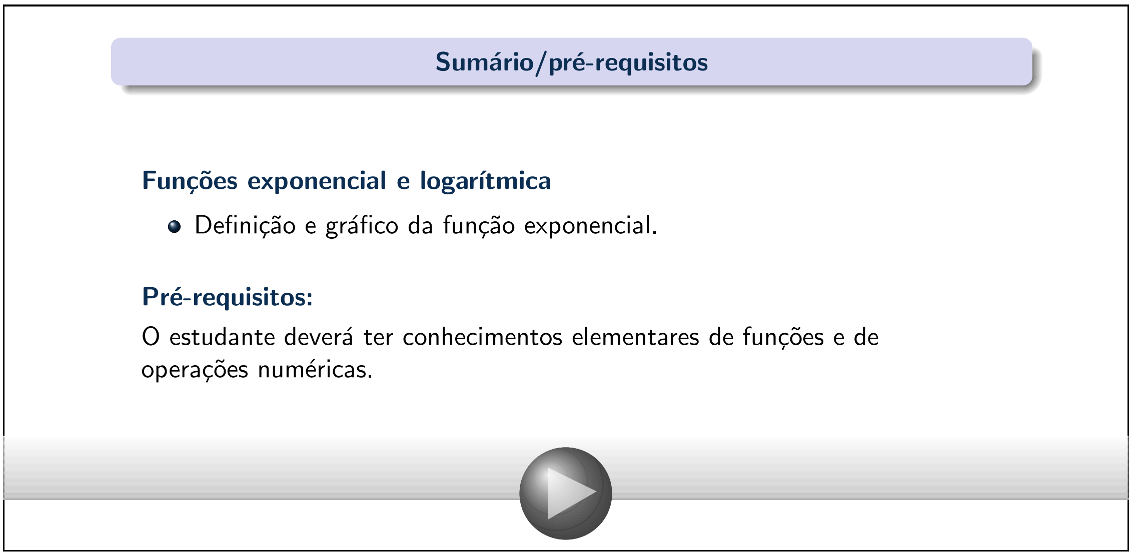
Matemática A 12.º

Ficha+Aulas de funções exponencial e logarítmica

Conteúdo: 11 aulas e 113 exercícios em vídeo.
Versão: 6 de janeiro de 2022.
Verifique se existe versão com data mais recente: aqui.
Autor: Rui Paiva (ruipaivac@gmail.com, www.academiaaberta.pt).
Instruções: Vídeo da aula → Exercícios → Confirmar resultados nos vídeos
Nota: Para visualizar a resolução dum exercício deve clicar no ícone.
Conteúdos do mesmo autor:

- Livro Preparação híbrida para o Exame Nacional de Matemática A 2021
- Plataforma de preparação para o 12.º e para o Exame Nacional de Matemática A
- Fichas de itens dos exames nacionais dos últimos 15 anos compilados por temas com resolução e/ou vídeo

AULA 1: Função exponencial. Definição e gráfico



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 1 clique em.

1.1. Partindo do gráfico da função definida por $y = 3^x$ descreva como pode obter o gráfico das funções seguintes e represente-os:

(a) $y = 3^{x-1}$
(b) $y = -3^{x-1}$
(c) $y = 4 - 3^{x-1}$
(d) $y = |3^x - 2|$
(e) $y = -|3^x - 1|$
(f) $y = 3^{|x|}$

AULA 2: Condições com exponenciais

Sumário/pré-requisitos

Funções exponencial e logarítmica

- Condições com exponenciais.

Pré-requisitos:

O estudante deverá ter conhecimentos elementares de equações e de operações numéricas.

Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 2 clique em .

2.1. Resolva em $\mathbb{R}$ cada uma das seguintes equações e inequações:

(a) $5^{-x+1} = 5^{-3x+6}$

(b) $9 \times 3^x = 729$

(c) $0.5^{-x+1} = 2^{-x+3}$

(d) $5^{-x+1} \geq 5^{-3x+6}$

(e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-3x+6}$

(f) $\pi^{x^2-3} > \pi^6$

(g) $9^x - 6 \times 3^x = 27$

(h) $3^{x-1} + 69 = 3^{2x} - 3^x$

(i) $2^x - 10^x < 0$

(j) $4^x + 2 \times 4^{-x} > 3$

(l) $x \times 3^x = 9x$

(m) $2^x \geq 3^x$

(n) $x^2 \times 3^x - x \times 3^x \leq 0$

(o) $x^2 \times 2^x - 2^{x-2} \geq 0$

(p) $2t^3 2^{-t} = t^3 2^{-0{,}7t}$

(q) $x^2 2^{2x-2} = 3 \times 2^{2x}$

2.2. Determine o domínio das seguintes funções reais de variável real:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{2^x + 1}$

(b) $g(x) = \sqrt{1 - 3^x}$;

(c) $h(x) = \dfrac{2x+1}{4^x - 1}$;

(d) $i(x) = \dfrac{x}{5^{2x} - 26 \times 5^x + 25}$.

Sumário/pré-requisitos

Funções exponencial e logarítmica

- Definição de logaritmo.

Pré-requisitos:

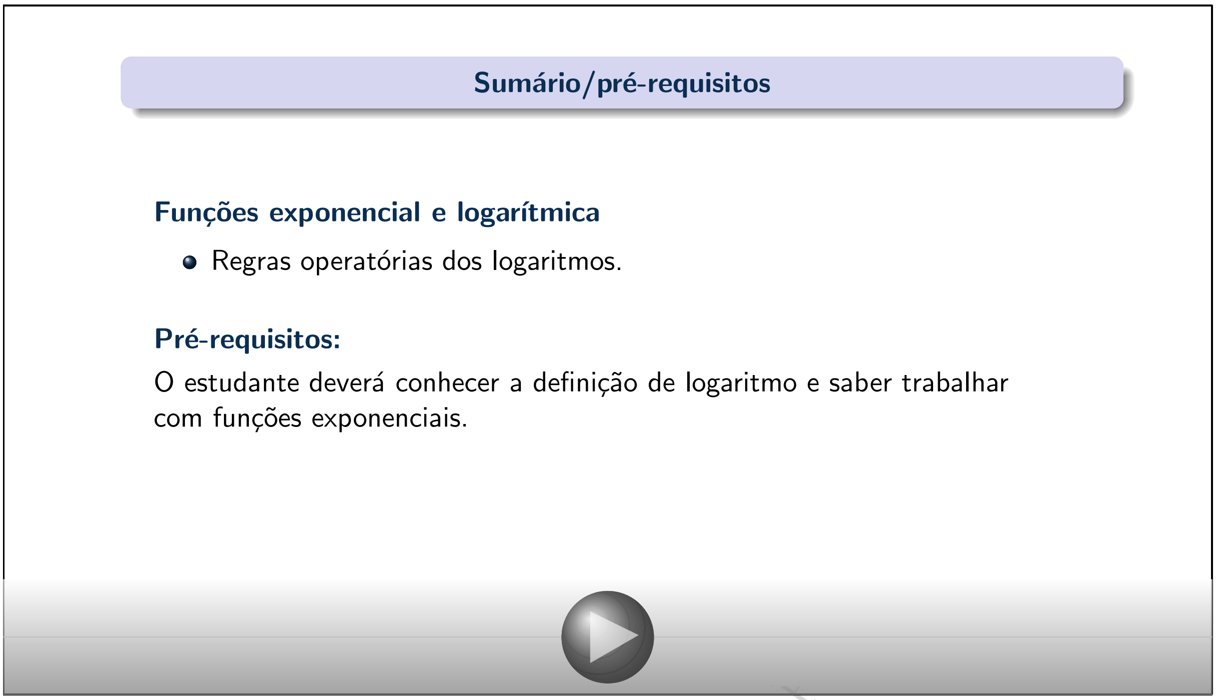
O estudante deverá ter conhecimentos elementares de potências e exponenciais.

Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 3 clique em .

3.1. Calcule:

(a) $\log_2 16$	(b) $\log_{10} 100$	(c) $\log_5 125$	(d) $\log_2 64$
(e) $\log_3 \frac{1}{9}$	(f) $\log_3 81$	(g) $\log_3 243$	(h) $\log_3 1$
(i) $\log_3 \frac{1}{81}$	(j) $\log_2 \sqrt{2}$	(l) $\log_2 \sqrt{4}$	(m) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}$
(n) $\log_2 2^{\frac{3}{5}}$	(o) $\log_2 \left(\sqrt{8}\right)^5$	(p) $\ln e^5$	(q) $\ln \sqrt[3]{e}$
(r) $\ln \frac{1}{\sqrt{e}}$	(s) $\ln \frac{\sqrt[3]{e}}{e}$	(t) $\log 1000$	(u) $\log \sqrt{10^{-3}}$

AULA 4: Regras operatórias dos logaritmos



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 4 clique em .

4.1. Simplifique cada uma das seguintes designações:

(a) $\log_a x + \log_a(4x) - \log_a 2$

(b) $3\log_a(x) + 2\log_a(3x)$

(c) $2\ln(3x) - e^{\ln 3} - \ln(x)$

(d) $2^{\log_2(x)+3} + 3\ln(2x) - 2\ln(x) - 8x$

(e) $\log_2 \frac{8}{128} - \log_2 \frac{1}{2x}$

(f) $2^{5-2\log_2(8x)}$

(g) $\ln e^{2t} - \ln \frac{1}{t}$

(h) $\log_9 3^{6x+12} - 6$

(i) $10^{\log_{10} t}$

(j) $e^{2\ln x - \frac{1}{2}} \times \frac{\sqrt{e}}{x^2} - 1$

(l) $\log_{\frac{1}{3}} 3^{4x}$

(m) $e^{\ln x + \ln 2}$

4.2. Escreva como um só logaritmo:

(a) $2\log_{10} 3 + \log_{10} 5$

(b) $2 + \frac{1}{2}\log_{10} 5$

(c) $3(1 - \log_{10} a)$

(d) $3(\log_{10} x + \log_{10} y - \log_{10} z)$

(e) $3 + 2\ln x$

(f) $10 + x + \log(5x)$

4.3. Mostre que:

(a) $\log_2(x - x^2) - \log_4 x^2 = \log_2(1 - x)$, $\forall x \in]0, 1[$.

(b) $2\log_9(x+1) + 3\log_3 x = \log_3(x^4 + x^3)$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

(c) $8\log_4(3x+1)^3 - 4\log_2(3x+1) = 16\log_4(3x+1)$, $\forall x \in \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

Sumário/pré-requisitos

Funções exponencial e logarítmica

- Definição e gráfico da função logarítmica.

Pré-requisitos:

O estudante deverá conhecer os conceitos de logaritmo, função real de variável real e respetivo gráfico.

Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 5 clique em .

5.1. Represente graficamente e indique uma equação da assimptota de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x) = \ln x$ (b) $f(x) = \ln(x-1)$ (c) $f(x) = \ln x + 3$

(d) $f(x) = |\ln x|$ (e) $f(x) = \ln|x|$

5.2. Determine o domínio de cada uma das seguintes funções reais de variável real definidas pela sua expressão algébrica:

(a) $f(x) = \log(4-x) - 3$ (b) $f(x) = \ln(3-x^2)$

(c) $f(x) = \log_2(4-2^{2x}) - \frac{1}{\ln x + 1}$ (d) $f(x) = \frac{1}{x\log(x-1)}$.

5.3. Caracterize, se possível, a inversa de cada uma das seguintes funções reais de variável real definidas pela sua expressão algébrica:

(a) $f(x) = \ln x - 2$ (b) $f(x) = e^{2x-3} - 2$ (c) $f(x) = 2^{x+2} + \ln 3$

(d) $f(x) = \ln(x^2-2) - 2$ (e) $f(x) = \frac{\ln x}{1-\ln x}$

AULA 6: Condições com logaritmos

Sumário/pré-requisitos

Funções exponencial e logarítmica

- Condições com logaritmos.

Pré-requisitos:

O estudante deverá conhecer o conceito de logaritmo e respetivas regras operatórias, ter conhecimentos elementares de equações, inequações e de operações numéricas.

Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 6 clique em .

6.1. Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes condições:

(a) $\ln\left(x^2\right) = \ln\left(2x\right)$

(b) $\ln\left(x^2 - 4\right) = \ln\left(1 - 4x\right)$

(c) $4 + \log_2\left(3x^2\right) = \log_2\left(x^3\right)$

(d) $\log x > \log\left(2x - 8\right)$

(e) $3 + \log_3 x \leq 4$

(f) $\log_4\left(x^2 - x - 2\right) \leq \log_4\left(x + 1\right) + 1$

(g) $\log_{\frac{1}{3}}\left(3x - 1\right) < -1$

(h) $2\left(\ln x\right)^2 + 5\ln x - 3 = 0$

(i) $\left[\ln\left(x - 3\right)\right]^2 - 4\ln\left(x - 3\right) > 0$

(j) $2^x = 5$

(l) $e^{-2x} = \frac{1}{4}$

(m) $e^{4-3x} = 4$

(n) $e^x\left(4 - 0.1\, e^{4x-1}\right) = 0$

(o) $3^x + 2 \times 3^{-x} = 3$

(p) $e^x - 1 - 2 \times e^{-x} = 0$

6.2. Quando o pão sai do forno, a sua temperatura é aproximadamente de 100°C. Para arrefecer, é colocado em tabuleiros numa sala em que a temperatura é de 23°C. Passados 3 minutos a sua temperatura é aproximadamente de 74°C. Depois de sair do forno, ao fim do tempo t, em minutos, a temperatura do pão é dada por:

$$T\left(t\right) = 23 + ae^{-kt}$$

(a) Mostre que $a = 77$ e $k \approx 0.14$.

(b) Qual será, aproximadamente, a temperatura do pão meia hora depois de sair do forno?

(c) Para embrulhar o pão é conveniente que este esteja a uma temperatura inferior a 40°C. O António entrou na padaria no momento em que o pão estava a sair do forno. O António quer comprar pão mas está com pressa, diz que só pode esperar entre 3 a 5 minutos. Será que o António vai levar o pão? Se sim, em que condições? Como identifica nos gráficos a temperatura ambiente. Apresente a sua resposta na forma de uma pequena composição enriquecida por gráfico ou gráficos obtidos pela sua calculadora.

6.3. Considere que a altura A (em metros) de uma criança do sexo masculino pode ser expressa, aproximadamente, em função do seu peso p (em quilogramas), por

$$A(p) = -0,52 + 0,55 \ln(p)$$

Recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora para efetuar cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes.

(a) O Ricardo tem 1.4m de altura. Admitindo que a altura e o peso do Ricardo estão de acordo com a igualdade referida, qual será o seu peso?

Nota: Apresente o resultado em quilogramas, arredondado às unidades. Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

(b) Verifique que, para qualquer valor de p, a diferença $A(2p) - A(p)$ é constante. Determine um valor aproximado dessa constante (com duas casas decimais) e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

AULA 7: Limites notáveis com exponenciais e logaritmos

Sumário/pré-requisitos

Limites e continuidade

- Limites notáveis com exponenciais e logaritmos.

Pré-requisitos:

O estudante deverá conhecer os conceitos de logaritmo, exponencial, saber reconhecer um símbolo de indeterminação e saber aplicar as regras operatórias dos limites.

Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 7 clique em .

7.1. Calcule cada um dos seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{3x}}{2x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{5x}}{2x}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^{2x}-1}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{e^x-e^3}{x-3}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}e^x$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\pi^x$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}e^{3x}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x$ (l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{e^x}$ (m) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x}{e^x}$

(n) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}$ (o) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3}$ (p) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{2x}}$

7.2. Calcule cada um dos seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)^2}{4x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2x+1)}{3x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\ln(2x)}{2x-1}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x)}{x}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-3x)}{x}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5}{\ln(-x)}$

Sumário/pré-requisitos

Limites e continuidade

- Continuidade de uma função num ponto e num intervalo.

Pré-requisitos:

O estudante deverá conhecer o conceito de função real de variável real e saber calcular limites de uma função num ponto.

Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 8 clique em .

8.1. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \begin{cases} |k| - 5 & \text{se } x \geq -1 \\ \frac{x^3+1}{x^2+x} & \text{se } x < -1 \end{cases}$ onde $k \in \mathbb{R}$.

Determine os valores de k de modo a que a função seja contínua em $x = -1$.

8.2. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{kx}}{\ln(x+1)} & \text{se } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \\ \frac{1-\sqrt{-x}}{1-x^2} - \frac{1}{2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$.

Determine os valores de k de modo a que a função seja contínua em $x = 0$.

8.3. Estude cada uma das seguintes funções quanto à continuidade justificando pormenorizadamente.

(a) $f(x) = x^4 - 3x + 5$

(b) $g(x) = \dfrac{2 - x^3}{9 - x^2}$

(c) $h(x) = \ln(x-3) - \dfrac{e^x - 1}{(x-7)^2}$

(d) $i(x) = e^{x-3} + x^2$

(e) $j(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x}-1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \log_2(2x+8) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

Sumário/pré-requisitos

Derivadas:

- Regras de derivação. Derivadas de ordem superior - Parte I: derivadas triviais.

Pré-requisitos:

O estudante deverá conhecer o conceito de derivada e saber aplicar fórmulas matemáticas.

Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 9 - Parte I clique em .

Sumário/pré-requisitos

Derivadas:

- Regras de derivação. Derivadas de ordem superior - Parte II: derivadas não triviais.

Pré-requisitos:

O estudante deverá conhecer o conceito de derivada e saber aplicar fórmulas matemáticas.

Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 9 - Parte II clique em .

9.1. Determine a derivada de cada uma das seguintes funções usando as regras de derivação:

(a) $y = 3x + 5$

(b) $y = (1 + x) + \left(3x + x^2\right)$

(c) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4}x^4 - 5x^6$

(d) $y = (3x - 4)\left(4x^2 - 4x\right)$

(e) $y = \left(\dfrac{x^2}{2} + x\right)\left(2x^4 - \dfrac{x}{2}\right)$

(f) $y = (5x + 1)^6$

(g) $y = \left(-x^2 + 3x - 2\right)^2$

(h) $y = \dfrac{x + 1}{x - 3}$

(i) $y = \dfrac{x^2 + x}{2x + 1}$

(j) $y = e^{-3x+1}$

(l) $y = \dfrac{1}{3}(e^x - e^{-x})$

(m) $y = e^{\sqrt{x}} + e^{\frac{1}{x}}$

(n) $y = xe^{-x} + x^e$

(o) $y = e^{-2x}(x - 3x^4)$

(p) $y = 2^{-x+\frac{1}{x}}$

(q) $y = \ln(3x - 4)$

(r) $y = 4\ln(4x^2 - 3)$

(s) $y = \log_2(2x - 4)$

(t) $y = \dfrac{\ln(3x - 2)}{3\ln(4x)}$

9.2. Calcule a derivada das seguintes funções no ponto indicado:

(a) $f(x) = x^2 - \dfrac{x}{4} + 2$ e $x = 4$;

(b) $f(x) = x\ln x$ e $x = e$;

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 2}$ e $x = -1$;

9.3. Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto T onde:

(a) $f(x) = x^2 - 3x + 4$ e T é o ponto de abcissa 1;

(b) $f(x) = \dfrac{4}{x} + 2x$ e T é o ponto de abcissa -2;

(c) $f(x) = e^{2x} - x^2$ e T é o ponto de abcissa 0;

(d) $f(x) = x\ln x + 2x$ e T é o ponto de abcissa 1.

9.4. Considere a função real de variável real f definida por

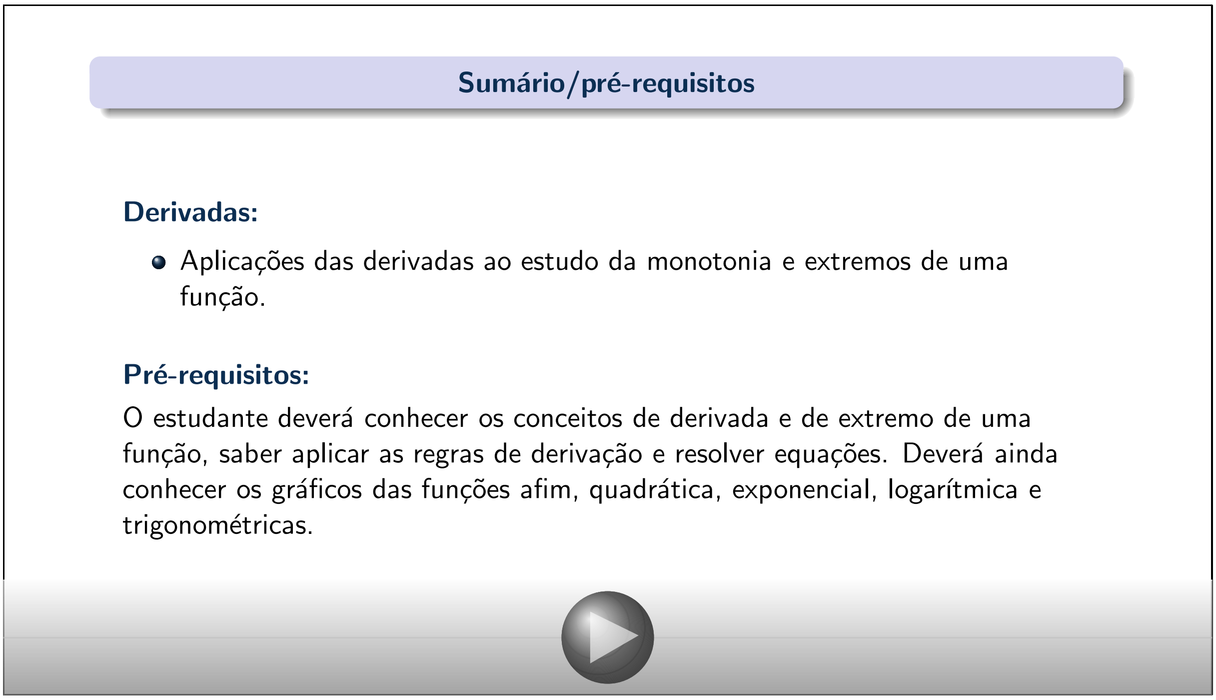
$$f(x) = \begin{cases} \ln(2 - x) & \text{se } x < 1 \\ (x + 1)e^{-3x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

(a) Mostre que f não é contínua no ponto 1.

(b) Estude a diferenciabilidade de f no ponto de abcissa 1.

(c) Caraterize a função derivada de f.

AULA 10: Monotonia e extremos



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 10 clique em .

10.1. Estude a monotonia e a existência de extremos relativos de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x) = x^2 + 1$

(b) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

(c) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 3$

(d) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

(e) $f(x) = 2 - x^2 e^{4x}$

(f) $f(x) = 8 - 4x + \ln(2x + 4)$

(g) $f(x) = \dfrac{x}{1 - \ln x}$

10.2. A partir de folhas metálicas retangulares com dimensões 6 m por 8 m pretendem-se construir contentores sem tampa com a forma de paralelepípedo. Dos cantos da chapa, extraem-se quadrados de modo o permitir a sua construção.

Quais são as dimensões da caixa de maior volume?

AULA 11: Concavidade e pontos de inflexão

Sumário/pré-requisitos

Derivadas:

- Aplicações das derivadas ao estudo das concavidades e dos pontos de inflexão do gráfico de uma função.

Pré-requisitos:

O estudante deverá conhecer o conceito de derivada, saber aplicar as regras de derivação e resolver equações. Deverá ainda conhecer os gráficos das funções afim, quadrática, exponencial, logarítmica e trigonométricas.

Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 11 clique em .

11.1. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x(x^2 + x)$.

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva as alíneas seguintes:

(a) Verifique que $f'(x) = e^x(x^2 + 3x + 1)$.

(b) Estude f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

11.2 Estude a concavidade e os pontos de inflexão do gráfico da função definida por $f(x) = x^4 - 6x^2$.

AULA EXTRA: Modelos exponenciais

Proposição – Modelos de crescimento e decrescimento exponencial
Dada uma grandeza modelada pela função f, a equação diferencial $f' = kf$ traduz o facto de, em cada instante, a taxa de variação ser proporcional à quantidade de grandeza existente.
Dado $k \in \mathbb{R}$, todas as soluções em $\mathbb{R}$ da equação diferencial $f' = kf$ são da forma $f(x) = ce^{kx}$, onde c é uma constante real.

Exercícios: Exercícios de escolha múltipla e de desenvolvimento com resolução deste tema e de todos os outros no livro Preparação híbrida para o Exame nacional de Matemática e na Plataforma de preparação para o Exame Nacional de Matemática 12. Pode ver mais pormenores e adquirir o livro ou uma licença de acesso à Plataforma clicando nos links.

Tabela de derivadas

Sejam f e g funções reais de variável real.
Sejam $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ e $k \in \mathbb{R}$ constantes.

$k' = 0$	$x' = 1$
$(kx)' = k$	$(x^k)' = kx^{k-1}$
$(f+g)' = f' + g'$	$(f-g)' = f' - g'$
$(kf)' = kf'$	$(f \times g)' = f'g + fg'$
$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$	$\left(f^k\right)' = kf'f^{k-1}$
$\left(e^f\right)' = f'e^f$	$(e^x)' = e^x$
$\left(a^f\right)' = f'a^f \ln a$	$(a^x)' = a^x \ln a$
$(\ln f)' = \dfrac{f'}{f}$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
$(\log_a f)' = \dfrac{f'}{f \ln a}$	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
$(\sin f)' = f' \cos f$	$(\sin x)' = \cos x$
$(\cos f)' = -f' \sin f$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\tan f)' = \dfrac{f'}{\cos^2 f}$	$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$(\text{cotg} f)' = -\dfrac{f'}{\sin^2 f}$	$(\text{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$