



Matemática A 12.º

Ficha+Aulas de derivadas, monotonia, extremos e concavidades


Conteúdo: 9 aulas e 47 exercícios em vídeo.

Versão: 6 de janeiro de 2022.

Verifique se existe versão com data mais recente: [aqui](#).

Autor: Rui Paiva (ruipaivac@gmail.com, www.academiaaberta.pt).

Instruções: Vídeo da aula → Exercícios → Confirmar resultados nos vídeos

Nota: Para visualizar a resolução dum exercício deve clicar no ícone .

Conteúdos do mesmo autor:

- [Livro Preparação híbrida para o Exame Nacional de Matemática A 2021](#)
- [Plataforma de preparação para o 12.º e para o Exame Nacional de Matemática A](#)
- [Fichas de itens dos exames nacionais dos últimos 15 anos compilados por temas com resolução e/ou vídeo](#)

AULA 1: Taxa média de variação

Sumário/pré-requisitos


Derivadas:


- Taxa média de variação.

Pré-requisitos:

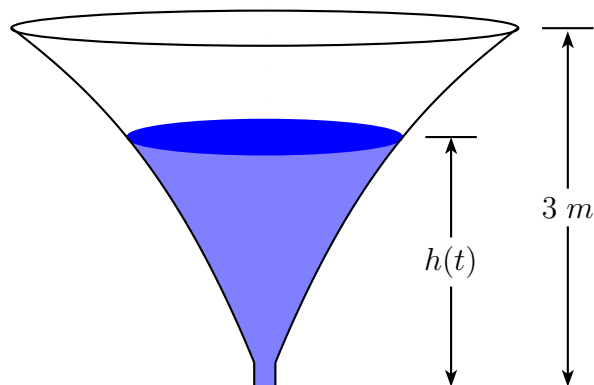
O estudante deverá ter competências na área de limites de funções reais de variável real e em geometria analítica elementar. Deverá em particular saber determinar a equação reduzida de uma reta.



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 1 clique em .

- 1.1.  A figura representa um reservatório com três metros de altura. Considere que, inicialmente, o reservatório está cheio de água e que, num certo instante, se abre uma válvula e o reservatório começa a ser esvaziado. O reservatório fica vazio ao fim de nove horas. Admita que a altura, em metros, da água no reservatório, t horas após este ter começado a ser esvaziado, é dada para $t \in [0, 9]$ por

$$h(t) = \frac{14t - a}{3t - b}.$$



- (a) Mostre que $a = 126$ e $b = 42$.
- (b) Qual a altura, em metros, da água no reservatório sabendo que a válvula esteve aberta 5 horas?
- (c) Determine a taxa de variação média de h no intervalo $[3, 5]$ e interprete o resultado.

AULA 2: Reta tangente

Sumário/pré-requisitos

Derivadas:

- Reta tangente.

Pré-requisitos:

O estudante deverá ter competências na área de limites de funções reais de variável real e em geometria analítica elementar. Deverá em particular saber determinar a equação reduzida de uma reta.




Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 2 clique em .

2.1. Calcule a equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto T onde:

(a) $f(x) = x^2 - 4$ e $T(1, -3)$

(b) $f(x) = \frac{x-4}{x+2}$ e $T(0, -2)$

- 2.2.  A reta de equação $y = x + 1$ é tangente ao gráfico da função definida por $f(x) = x^2 + 3x + 2$. Determine as coordenadas do ponto de tangência.

AULA 3: Definição de derivada. Interpretação geométrica de derivada

Sumário/pré-requisitos


Derivadas:

- Definição de derivada de uma função num ponto.
- Interpretação geométrica de derivada.


Pré-requisitos:

O estudante deverá conhecer os conceitos de reta tangente, ter competências na área de limites de funções reais de variável real e em geometria analítica elementar.




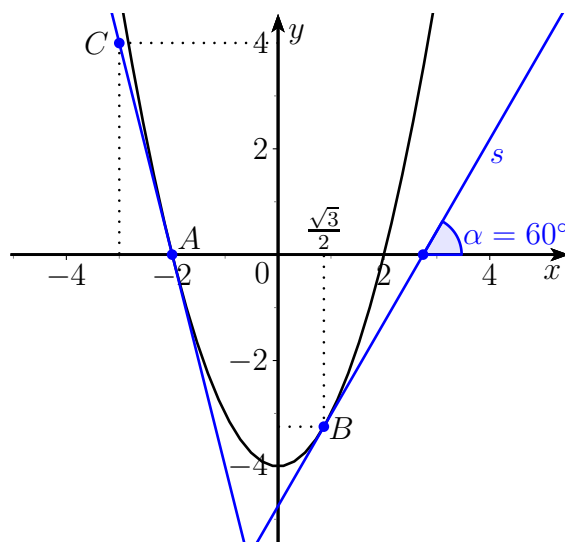
Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 3 clique em .

- 3.1. Calcule, recorrendo à definição de derivada:

(a) $f'(-1)$ onde $f(x) = \frac{x^2 - 1}{1 - x}$ 

(b) $f'(4)$ onde $f(x) = \sqrt{x}$ 

- 3.2  Na figura seguinte está representado o parte do gráfico da função definida por $f(x) = x^2 - 4$ e as suas retas tangentes nos pontos de abscissas -2 e $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Determine as equações das retas tangentes, $f'(-2)$ e $f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

AULA 4: Derivadas laterais

Sumário/pré-requisitos

Derivadas:

- Derivadas laterais de uma função num ponto.

Pré-requisitos:

O estudante deverá conhecer os conceitos de derivada e de reta tangente, ter competências na área de limites de funções reais de variável real e em geometria analítica elementar. Deverá em particular saber trabalhar com funções definidas por ramos.



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 4 clique em

4.1. Considere as funções f , g , h e i , reais de variável real definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3 & \text{se } x \leq 1 \\ 4x - 5 & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad g(x) = |x - 2| - 3x$$

$$h(x) = \begin{cases} 3x - 4 & \text{se } x \leq 1 \\ 1 - x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

- (a) Calcule $f'(1)$ e interprete graficamente o resultado obtido.
- (b) Mostre que não existe $g'(2)$ e interprete graficamente o resultado obtido.
- (c) Calcule, se existir, $h'(0)$ e $h'(1)$.

Sumário/pré-requisitos

Derivadas:

- Derivabilidade e continuidade de uma função num ponto.

Pré-requisitos:

O estudante deverá conhecer os conceitos de continuidade, derivada e reta tangente, ter competências na área de limites de funções reais de variável real e em geometria analítica elementar. Deverá em particular saber trabalhar com funções definidas por ramos.



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 5 clique em

5.1. Recorrendo à derivada mostre que a função definida por $f(x) = 3x^2 + x - 1$ é contínua no ponto de abscissa 1.

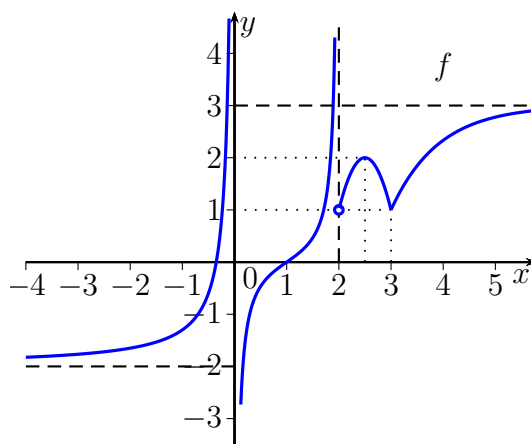
5.2. Uma função real de variável real f satisfaz $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 6$ e $f(a) = 4$. Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$?

5.3. Considere a função real de variável real f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

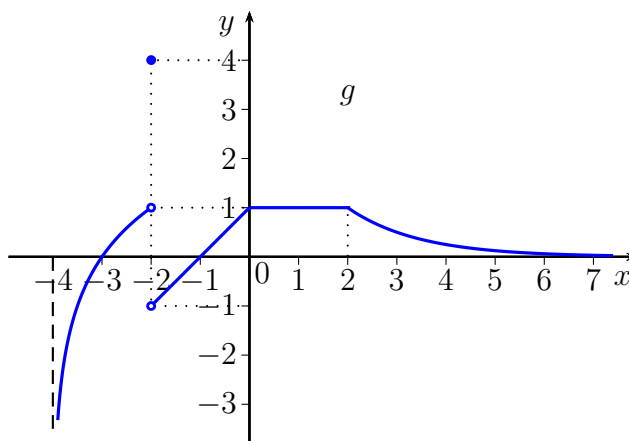
Mostre que f é contínua no ponto 1 e, no entanto, não tem derivada neste ponto.

5.4. Na figura seguinte está representado parte do gráfico de uma função real de variável real f .



Indique o conjunto de pontos onde f é derivável, com base no seu gráfico.

- 5.5. Na figura seguinte está representado parte do gráfico de uma função real de variável real g .



Estude g quanto à derivabilidade, com base no seu gráfico.

AULA 6: Função derivada

Sumário/pré-requisitos

Derivadas:

- Função derivada.

Pré-requisitos:

O estudante deverá conhecer o conceito de derivada e ter competências na área de limites de funções reais de variável real e em geometria analítica elementar. Deverá em particular saber trabalhar com funções definidas por ramos.



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 6 clique em

- 6.1. Considere a função real de variável real f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & \text{se } x \geq 4 \\ -x^2 + 4x & \text{se } x < 4 \end{cases}$$

Caraterize a função derivada de f recorrendo exclusivamente à definição de derivada.

Sumário/pré-requisitos


Derivadas:

- Regras de derivação. Derivadas de ordem superior - Parte I: derivadas triviais.

Pré-requisitos:

O estudante deverá conhecer o conceito de derivada e saber aplicar fórmulas matemáticas.



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 7 - Parte I clique em .

Sumário/pré-requisitos


Derivadas:

- Regras de derivação. Derivadas de ordem superior - Parte II: derivadas não triviais.


Pré-requisitos:


O estudante deverá conhecer o conceito de derivada e saber aplicar fórmulas matemáticas.





Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 7 - Parte II clique em .


7.1. Determine a derivada de cada uma das seguintes funções usando as regras de derivação:


(a) $y = 3x + 5$ 


(b) $y = (1 + x) + (3x + x^2)$ 


(c) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4}x^4 - 5x^6$ 


(d) $y = (3x - 4)(4x^2 - 4x)$ 

(e) $y = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\left(2x^4 - \frac{x}{2}\right)$ 


(f) $y = (5x + 1)^6$ 


(g) $y = (-x^2 + 3x - 2)^2$ 

(h) $y = \frac{x + 1}{x - 3}$ 


(i) $y = \frac{x^2 + x}{2x + 1}$ 


7.2. Calcule a derivada das seguintes funções no ponto indicado:

(a) $f(x) = x^2 - \frac{x}{4} + 2$ e $x = 4$; 

(b) $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 2}$ e $x = -1$; 

7.3. Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto T onde:

(a)  $f(x) = x^2 - 3x + 4$ e T é o ponto de abcissa 1;

(b)  $f(x) = \frac{4}{x} + 2x$ e T é o ponto de abcissa -2 ;

AULA 8: Monotonia e extremos

Sumário/pré-requisitos

Derivadas:

- Aplicações das derivadas ao estudo da monotonia e extremos de uma função.


Pré-requisitos:


O estudante deverá conhecer os conceitos de derivada e de extremo de uma função, saber aplicar as regras de derivação e resolver equações. Deverá ainda conhecer os gráficos das funções afim, quadrática, exponencial, logarítmica e trigonométricas.





Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 8 clique em .

8.1. Estude a monotonia e a existência de extremos relativos de cada uma das seguintes funções:


(a) $f(x) = x^2 + 1$ 

(b) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ 

(c) $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 + 3$ 

(d) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 

8.2. A partir de folhas metálicas retangulares com dimensões 6 m por 8 m pretendem-se construir contentores sem tampa com a forma de paralelepípedo. Dos cantos da chapa, extraem-se quadrados de modo o permitir a sua construção.

Quais são as dimensões da caixa de maior volume? 

AULA EXTRA: Teorema de Lagrange

Teorema de Lagrange

Se f é uma função real de variável real contínua num intervalo $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$ então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Exercícios: Exercícios de escolha múltipla e de desenvolvimento com resolução deste tema no livro [Preparação híbrida para o Exame nacional de Matemática](#) e na [Plataforma de preparação para o Exame Nacional de Matemática 12](#). Pode ver mais pormenores e adquirir o livro ou uma licença de acesso à Plataforma clicando nos links.

AULA 9: Concavidade e pontos de inflexão

Sumário/pré-requisitos

Derivadas:


- Aplicações das derivadas ao estudo das concavidades e dos pontos de inflexão do gráfico de uma função.

Pré-requisitos:

O estudante deverá conhecer o conceito de derivada, saber aplicar as regras de derivação e resolver equações. Deverá ainda conhecer os gráficos das funções afim, quadrática, exponencial, logarítmica e trigonométricas.



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 9 clique em .

- 9.1  Estude a concavidade e os pontos de inflexão do gráfico da função definida por $f(x) = x^4 - 6x^2$.

AULA EXTRA: Segunda derivada e extremos

Segunda derivada e extremos

Seja f uma função duas vezes derivável num intervalo $I =]a, b[$ e seja $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

- (i) Se $f''(c) > 0$ então $f(c)$ é mínimo relativo de f ;
- (ii) Se $f''(c) < 0$ então $f(c)$ é máximo relativo de f .

Exercícios: Exercícios de escolha múltipla e de desenvolvimento com resolução deste tema no livro [Preparação híbrida para o Exame nacional de Matemática](#) e na [Plataforma de preparação para o Exame Nacional de Matemática 12](#). Pode ver mais pormenores e adquirir o livro ou uma licença de acesso à Plataforma clicando nos links.

Tabela de derivadas

Sejam f e g funções reais de variável real.

Sejam $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ e $k \in \mathbb{R}$ constantes.

| | |
|---|-----------------------------|
| $k' = 0$ | $x' = 1$ |
| $(kx)' = k$ | $(x^k)' = kx^{k-1}$ |
| $(f + g)' = f' + g'$ | $(f - g)' = f' - g'$ |
| $(kf)' = kf'$ | $(f \times g)' = f'g + fg'$ |
| $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ | $(f^k)' = kf'f^{k-1}$ |