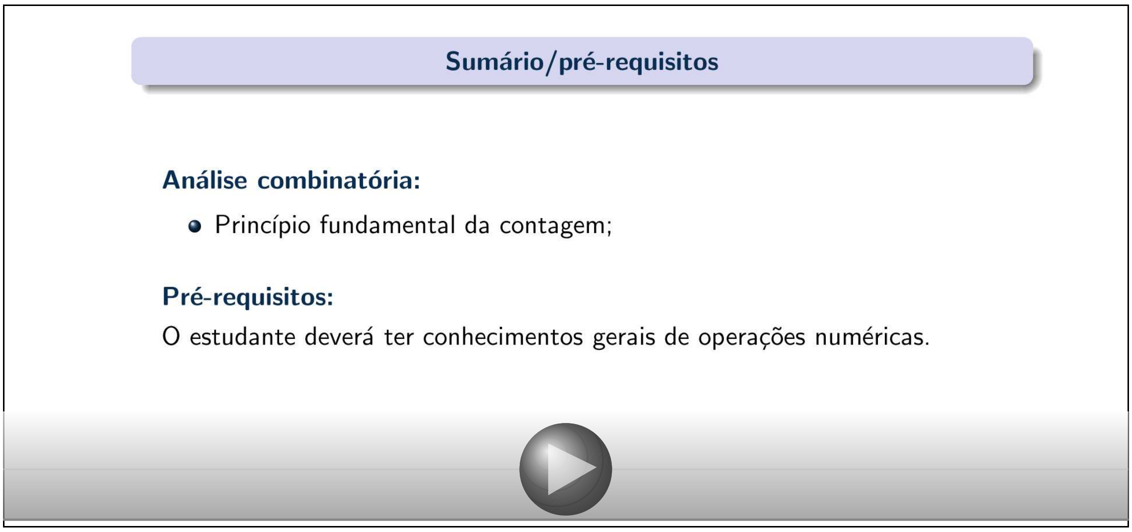
Matemática A 12.º

Ficha+Aulas de Análise Combinatória, Triângulo de Pascal e Binómio de Newton

Conteúdo: 7 aulas e 59 exercícios em vídeo.
Versão: 6 de janeiro de 2022.
Verifique se existe versão com data mais recente: aqui.
Autor: Rui Paiva (ruipaivac@gmail.com, www.academiaaberta.pt).
Instruções: Vídeo da aula → Exercícios → Confirmar resultados nos vídeos
Nota: Para visualizar a resolução dum exercício deve clicar no ícone.
Conteúdos do mesmo autor:

- Livro Preparação híbrida para o Exame Nacional de Matemática A 2021
- Plataforma de preparação para o 12.º e para o Exame Nacional de Matemática A
- Fichas de itens dos exames nacionais dos últimos 15 anos compilados por temas com resolução e/ou vídeo

AULA 1: Análise Combinatória - Princípio fundamental da contagem



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 1 clique em.

1.1. Num restaurante uma ementa é constituída por 4 entradas, 6 pratos e 7 sobremesas. De quantos modos se pode escolher uma refeição formada por uma entrada, um prato e uma sobremesa?

1.2. A Carla tem 3 saias, 4 blusas e 2 pares de sapatilhas. De quantos modos diferentes se pode vestir?

1.3. Quantos códigos Multibanco existem para um cartão?

1.4. Extraem-se sucessivamente duas cartas de um baralho com 52 cartas. Quantos pares de cartas podemos formar sendo:

(a) a primeira carta ouros e a segunda espadas?

(b) a primeira ouros e a segunda um ás?

(c) a primeira figura e a segunda copas?

1.5. Dados os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5

(a) Quantos números de três algarismos podemos escrever?

(b) Quantos números de três algarismos diferentes podemos escrever?

(c) Quantos números de três algarismos diferentes e menores que 300 podemos escrever?

1.6. (IN Exame 2001) Capicua é uma sequência de algarismos cuja leitura da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita dá o mesmo número. Por exemplo, 75957 e 30003 são capicuas. Quantas capicuas existem com cinco algarismos, sendo o primeiro algarismo ímpar?

1.6. Considere todos os números naturais superiores a 9999 e inferiores a 22000. Destes números, quantos se podem escrever com os algarismos 0, 1, 2 e 3?

(A) 192 **(B)** 236 **(C)** 384 **(D)** 512

1.7. Considere todos os números naturais superiores a 9999 e inferiores a 22000. Destes números, quantos se podem escrever com os algarismos 0, 1, 2 e 3?

(A) 192 **(B)** 236 **(C)** 384 **(D)** 512

1.8. Dispõe-se de catorze caracteres (a saber: os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e as vogais a, e, i, o, u) para formar códigos de quatro caracteres.
Quantos códigos iniciados por uma vogal seguida de três algarismos diferentes se podem formar?

(A) 420 **(B)** 504 **(C)** 1840 **(D)** 2520

1.9. Considere todos os números naturais de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9.
Destes números, quantos são múltiplos de 5?

(A) 729 **(B)** 1458 **(C)** 3645 **(D)** 6561

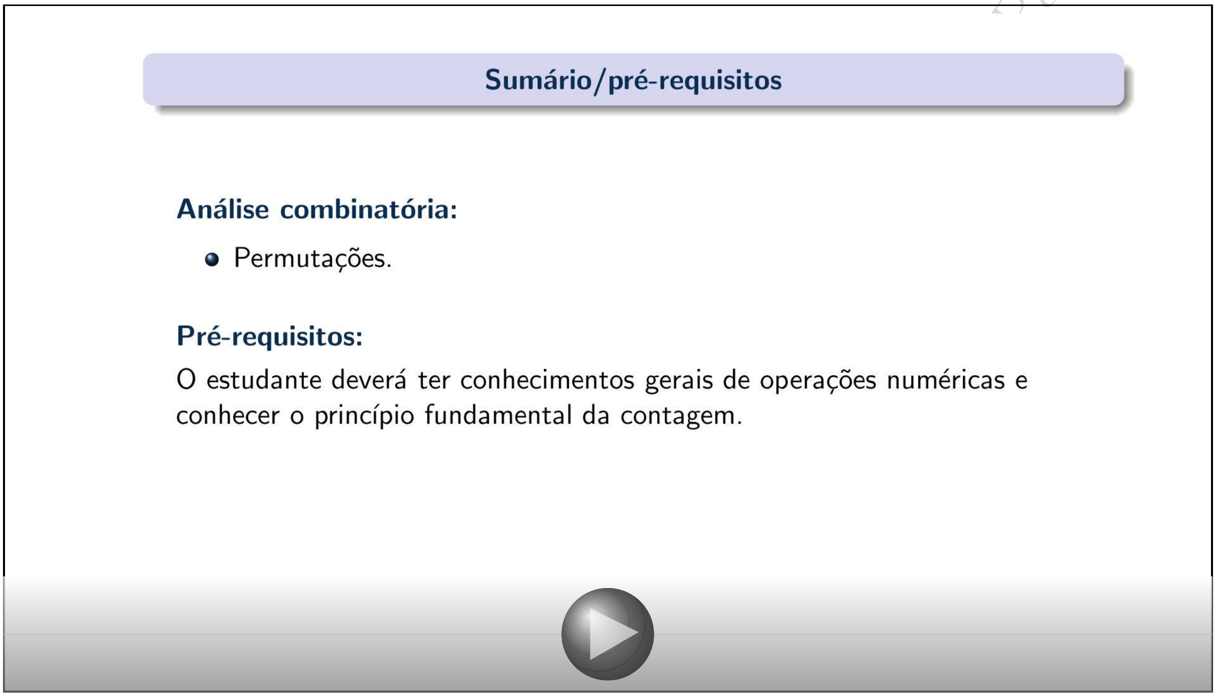
1.10. Considere uma turma de uma escola secundária, com 8 rapazes e 12 raparigas. Pretende-se eleger o Delegado e o Subdelegado da turma. De quantas maneiras se pode fazer essa escolha, de modo a que os alunos escolhidos sejam de sexos diferentes?

(A) 96 **(B)** 190 **(C)** 192 **(D)** 380

1.11. Quantos números naturais, escritos com algarismos todos diferentes, existem entre os números 1000 e 3000?

(A) 992 **(B)** 998 **(C)** 1002 **(D)** 1008

AULA 2: Análise Combinatória - Permutações



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 2 clique em .

2.1. De quantas maneiras diferentes se podem colocar numa prateleira, em fila, 2 livros de Física e 3 de Matemática

(a) sem restrições?

(b) se os livros ficarem juntos por disciplinas?

2.2. De quantas maneiras diferentes podem sentar-se 7 amigos:

(a) no balcão de um snack-bar?

(b) numa mesa redonda?

(c) num banco tendo em conta que a Ana não quer ficar junto do Pedro, seu ex-namorado?

(d) numa banco se houver três pessoas que não querem ficar juntas?

2.3. Considere todos os números naturais de sete algarismos que se podem escrever utilizando dois algarismos 5, quatro algarismos 6 e um algarismo 7.
Determine quantos destes números são ímpares e maiores do que seis milhões.

2.4. Considere todos os números naturais de cinco algarismos diferentes que se podem formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5.
Destes números, quantos têm os algarismos pares um a seguir ao outro?

(A) 24 **(B)** 48 **(C)** 72 **(D)** 92

2.5. Dois rapazes e quatro raparigas vão sentar-se num banco corrido com seis lugares.
De quantas maneiras o podem fazer, de modo que fique um rapaz em cada extremidade do banco?

(A) 12 **(B)** 24 **(C)** 48 **(D)** 60

2.6. A Rita tem oito livros, todos diferentes, sendo três de Matemática, três de Português e dois de Biologia. A Rita pretende arrumar, numa prateleira, os oito livros, uns a seguir aos outros.
De quantas maneiras diferentes o pode fazer, ficando os livros de Matemática todos juntos numa das pontas?

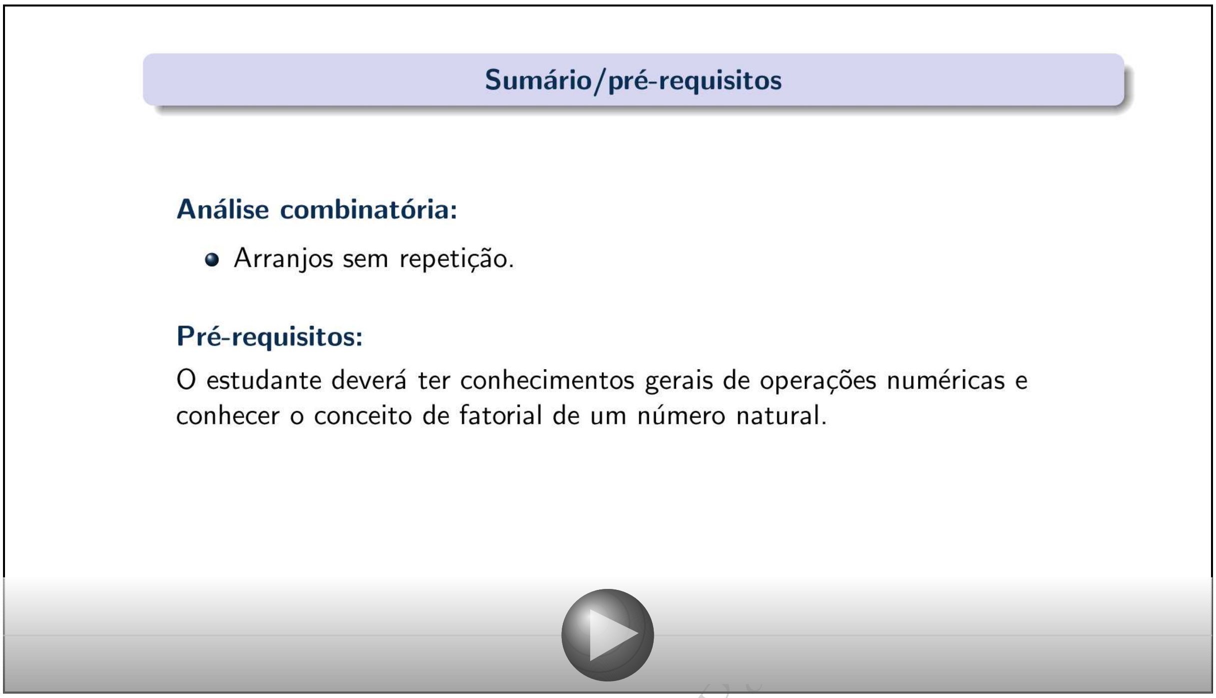
(A) 72 **(B)** 240 **(C)** 720 **(D)** 1440

2.7. Quantos números ímpares, de quatro algarismos diferentes, se pode formar com os algarismos 1, 3, 5 e 8?

(A) 4 **(B)** 6 **(C)** 18 **(D)** 24

2.8. Três rapazes, o João, o Rui e o Paulo, e três raparigas, a Ana, a Maria e a Francisca, decidem passar a tarde juntos.
De quantas maneiras se podem sentar os seis amigos, uns ao lado dos outros, num banco corrido com seis lugares, ficando um rapaz em cada uma das extremidades?

2.9. Considere as 13 cartas do naipe de copas: ás, três figuras (rei, dama e valete) e mais nove cartas (do 2 ao 10).
As cartas vão ser dispostas, ao acaso, sobre uma mesa, lado a lado, de modo a formarem uma sequência de 13 cartas.
Determine o número de sequências diferentes que é possível construir, de modo que as três figuras fiquem juntas.

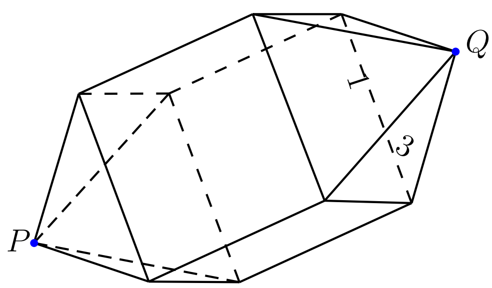


Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 3 clique em .

3.1. Numa prova final de natação participam 6 nadadores que disputam as medalhas de ouro, prata e bronze. De quantas formas diferentes se podem repartir os três prémios?

3.2. Num clube, 15 pessoas concorrem aos lugares de presidente, secretário e tesoureiro. De quantas formas diferentes podem esses lugares ser preenchidos?

3.3. (IN Exame 2000) Na figura está representado um poliedro com doze faces, que pode ser decomposto num cubo e em duas pirâmides quadrangulares regulares. Pretende-se numerar as doze faces do poliedro, com os números de 1 a 12 (um número diferente em cada face). Como se vê na figura, duas das faces do poliedro já estão numeradas, com os números 1 e 3.



(a) De quantas maneiras podemos numerar as outras dez faces, com os restantes dez números?

(b) De quantas maneiras podemos numerar as outras dez faces, com os restantes dez números, de forma a que, nas faces de uma das pirâmides, fiquem só números ímpares e, nas faces da outra pirâmide, fiquem só números pares?

3.4. Na Figura 2, está representado um tabuleiro com 16 casas, dispostas em quatro filas horizontais (A, B, C e D) e em quatro filas verticais (1, 2, 3 e 4).
Pretende-se dispor as nove fichas (numeradas de 1 a 9) no tabuleiro, de modo que cada ficha ocupe uma única casa e que cada casa não seja ocupada por mais do que uma ficha.
De quantas maneiras diferentes é possível dispor as nove fichas, de tal forma que as que têm número par ocupem uma única fila horizontal?

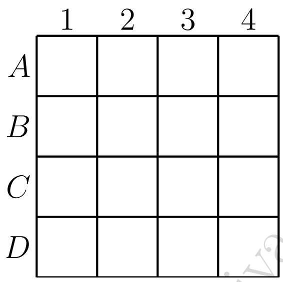


Figura 2

3.5. Considere um baralho com 52 cartas, repartidas por quatro naipes (Copas, Ouros, Espadas e Paus). Em cada naipe, há um Ás, três figuras (uma Dama, um Valete, um Rei) e mais nove cartas (do Dois ao Dez).
Retiram-se cinco cartas do baralho, que são colocadas lado a lado, em cima de uma mesa, segundo a ordem pela qual vão sendo retiradas.
Quantas sequências se podem formar com as cinco cartas retiradas, caso a primeira carta e a última carta sejam ases, e as restantes sejam figuras?

3.6. Considere todos os números de três algarismos que se podem formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.
Considere o seguinte problema:
"De entre todos os números de três algarismos diferentes que se podem formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, em quantos deles o produto dos seus algarismos é um número par?
Uma resposta correta a este problema é: ${}^9A_3 - {}^5A_3$.
Numa pequena composição explique porquê.

AULA 4: Análise Combinatória - Arranjos com repetição

Sumário/pré-requisitos

Análise combinatória:

- arranjos com repetição.

Pré-requisitos:

O estudante deverá ter conhecimentos gerais de operações numéricas e conhecer os conceitos de fatorial, arranjos sem repetição e o princípio fundamental da contagem.

Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 4 clique em .

4.1. Num certo país existem três empresas operadoras de telecomunicações móveis: A, B e C. Independentemente do operador, os números de telemóvel têm nove algarismos. Os números do operador A começam por 51, os do B por 52 e os do C por 53. Quantos números de telemóvel constituídos só por algarismos ímpares podem ser atribuídos nesse país?

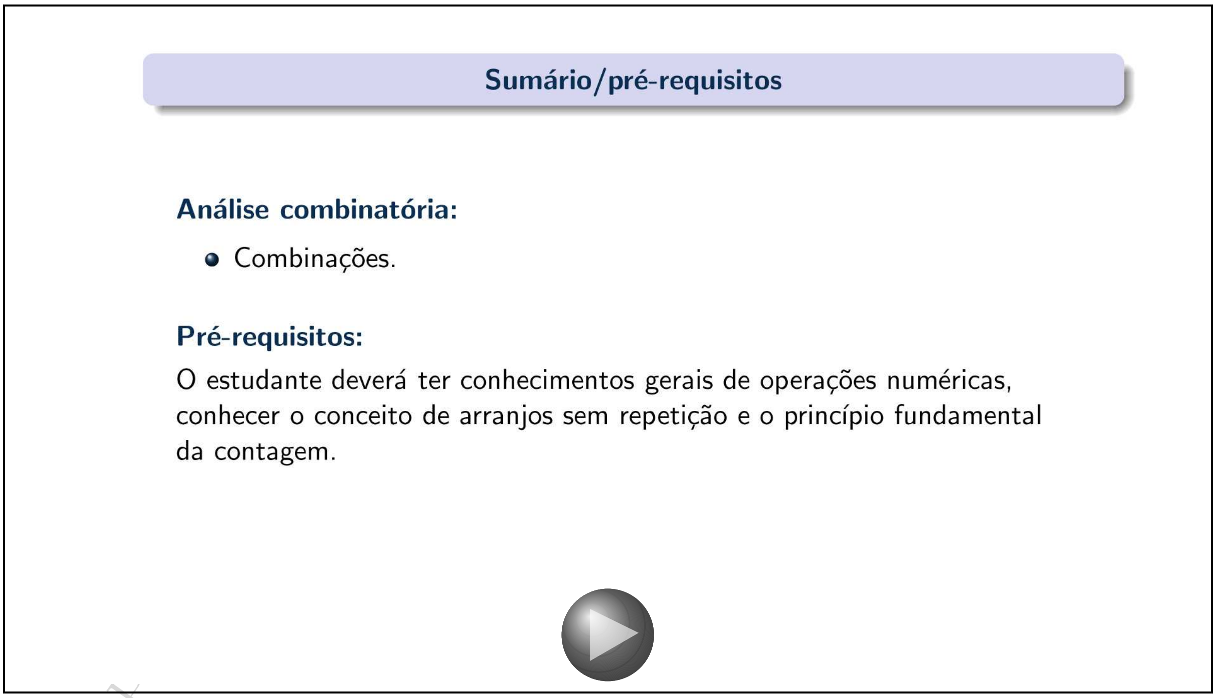
4.2. Uma turma de 12° ano tem 23 alunos, dos quais 11 são raparigas. Num saco introduziram-se 23 cartões, todos, iguais, cada um deles com o nome de um aluno da turma. Quantos são os resultados diferentes que podemos obter ao extrair 6 cartões:

(a) se tirarmos um de cada vez, sem reposição?

(b) se tirarmos um de cada vez, com reposição?

(c) de modo a que saiam apenas 2 raparigas no início, numa extração sucessiva com reposição?

AULA 5: Análise Combinatória - Combinações



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 5 clique em .

5.1. (IN EXAME) Uma pessoa tem de tomar diariamente, à mesma refeição, 2 comprimidos de vitamina C e 1 comprimido de vitamina A. Por lapso, misturou todos os comprimidos no mesmo frasco. Os comprimidos têm igual aspecto exterior, sendo 20 de vitamina A e 35 de vitamina C. Ao retirar simultaneamente 3 comprimidos do frasco, de quantas formas diferentes o pode fazer de modo

(a) a que sejam todos do mesmo tipo de vitamina?

(b) a cumprir as indicações do médico?

5.2. (IN EXAME) Um quadro de palavras cruzadas, constituído por 5 linhas e 5 colunas, tem 9 quadriculas a cheio. Destas, sabe-se que 5 ocuparão os 4 cantos e o quadrado central, podendo os restantes ocupar qualquer outra posição.

(a) Quantos quadros diferentes se podem obter satisfazendo as condições indicadas?

(b) Quantos quadros têm pelo menos uma das diagonais com quadriculas a cheio?

5.3. (IN EXAME 2002) Considere todos os números de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9.

(a) Quantos números:

i. têm exatamente dois algarismos iguais a 1

ii. têm os algarismos todos diferentes e são maiores do que 9800.

(b) Considere o seguinte problema:

"De todos os números de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9, alguns deles cumprem as três condições seguintes:

- começam por 9;
- têm os algarismos todos diferentes;
- a soma dos quatro algarismos é par.

Quantos são esses números?

Uma resposta correta a este problema é $3 \times 4 \times {}^4A_2 + {}^4A_3$."

Numa pequena composição explique porquê.

5.4. Considere, num plano α, duas retas paralelas r e s.
Assinalam-se, na reta r, cinco pontos distintos e, na reta s, um certo número n de pontos, igualmente distintos.
Sabe-se que, com os pontos assinalados nas duas retas, é possível definir exatamente 175 triângulos.
Determine o valor de n.

5.5. O corfebol é um desporto coletivo misto, com origem na Holanda.
Um clube de corfebol de um certo país vai participar num torneio internacional.
A comitiva vai deslocar-se por via terrestre, utilizando um automóvel de cinco lugares e uma carrinha de nove lugares. A comitiva é constituída por três dirigentes, um treinador, cinco jogadores do sexo masculino e cinco do sexo feminino.
Escreva uma expressão que dê o número de maneiras diferentes de distribuir os catorze elementos da comitiva pelos catorze lugares disponíveis, sabendo-se que os dois condutores são dois dos dirigentes e que, no automóvel, vão dois jogadores de cada sexo.

5.6. Um saco contém oito bolas azuis e sete bolas brancas, indistinguíveis ao tato.
Cada bola tem uma única cor e só existem bolas azuis e bolas brancas no saco.
Pretende-se colocar todas estas bolas em dez caixas numeradas de 1 a 10, de tal forma que:

- cada caixa com número par tenha, pelo menos, uma bola azul;
- cada caixa com número ímpar tenha, pelo menos, uma bola branca;
- cada caixa tenha, no máximo, duas bolas.

Nestas condições, de quantas maneiras diferentes podem ficar colocadas as bolas nas dez caixas?

(A) 1176 **(B)** 2520 **(C)** 28016 **(D)** 30550

5.7. Uma escola secundária tem apenas turmas de 10.°, 11.° e 12.° anos.
Uma turma dessa escola tem 26 alunos, dos quais 15 são raparigas.
O delegado de turma é um rapaz.
Pretende-se formar uma comissão com três alunos desta turma, para organizar uma festa de fim de ano.
Quantas comissões diferentes, que incluam rapazes e raparigas, se podem formar, sabendo-se que o delegado de turma tem de fazer parte da comissão?

(A) 195 **(B)** 215 **(C)** 235 **(D)** 255

5.8. O código de um auto-rádio é constituído por uma sequência de quatro algarismos. Por exemplo, 0137.
Quantos desses códigos têm dois e só dois algarismos iguais a 7?

(A) 486 **(B)** 810 **(C)** 432 **(D)** 600

5.9. Considere todos os números de cinco algarismos que se podem formar com os algarismos 5, 6, 7, 8 e 9.
De entre estes números, quantos têm, exatamente, três algarismos 5?

(A) ${}^5C_3 \times {}^4A_2$ **(B)** ${}^5C_3 \times 4^2$ **(C)** ${}^5A_3 \times 4^2$ **(D)** ${}^5A_3 \times {}^4C_2$

5.10. De um bilhete de lotaria sabe-se que o seu número é formado por sete algarismos, dos quais três são iguais a 1, dois são iguais a 4 e dois são iguais a 5 (por exemplo: 1551414).
Determine quantos números diferentes satisfazem as condições anteriores.

5.11. Uma turma é constituída por 27 alunos, dos quais 17 são rapazes. A Maria e o Manuel são alunos dessa turma. A professora de Português vai escolher, ao acaso, um grupo de cinco alunos para definirem as regras de um Jogo de Palavras.
Determine quantos grupos diferentes se podem formar, sabendo que em cada grupo tem de estar, pelo menos, um aluno de cada sexo.

5.12. Considere o conjunto $A = \{1, 3, 5, 6, 8\}$.
Com os elementos do conjunto A, quantos números pares de quatro algarismos se podem formar, que tenham dois e só dois algarismos iguais a 5?

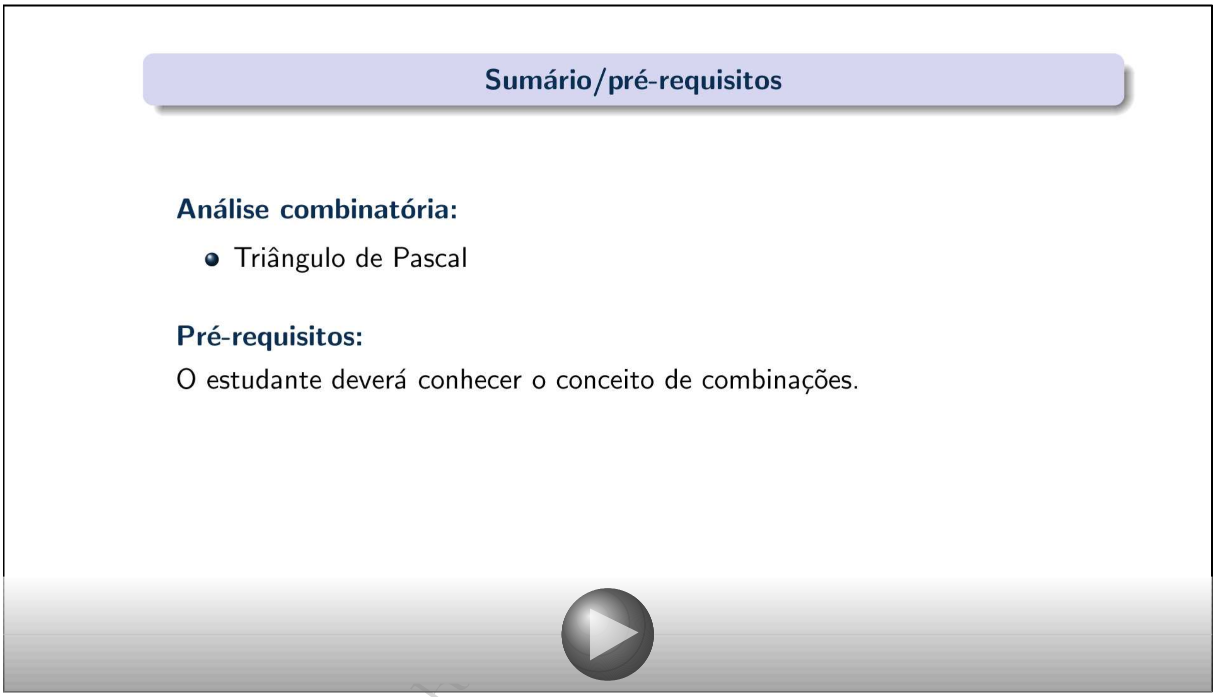
5.13. Uma turma do 12.° ano de uma Escola Secundária está a organizar uma viagem de finalistas. A turma é constituída por doze raparigas e dez rapazes, que pretendem formar uma comissão organizadora da viagem. Sabe-se que a comissão terá obrigatoriamente três raparigas e dois rapazes. A Ana e o Miguel, alunos da turma, não querem fazer parte da comissão em simultâneo. Explique, numa composição, que o número de comissões diferentes que se pode formar é dado por:

$$^{12}C_3 \times {}^{10}C_2 - {}^{11}C_2 \times 9.$$

5.14. Dispõe-se de catorze caracteres (a saber: os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e as vogais a, e, i, o, u) para formar códigos de quatro caracteres.
Quantos códigos iniciados por uma vogal seguida de três algarismos diferentes se podem formar?

(A) 420 **(B)** 504 **(C)** 1840 **(D)** 2520

AULA 6: Análise Combinatória - Triângulo de Pascal



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 6 clique em .

6.1. O penúltimo número de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 10. Qual é o terceiro número dessa linha?

6.2. O segundo número de uma determinada linha do Triângulo de Pascal é 32.

Afirma-se que

(I) o terceiro número da linha anterior é 4495;

(II) o penúltimo número da linha anterior é 31;

(III) o quarto número da linha seguinte é 5456.

Então

(A) (I) e (III) são falsas; (B) (I) e (II) são verdadeiras
(C) (II) e (III) são falsas; (D) (II) e (III) são verdadeiras.

6.3. A soma dos dois últimos elementos de uma certa linha do triângulo de Pascal é 35.
Escolhem-se, ao acaso, dois elementos dessa linha.
Determine a probabilidade de esses dois elementos serem iguais.
Apresente o resultado na forma decimal, arredondado às centésimas.

6.4. Considere a linha do triângulo de Pascal em que a soma dos dois primeiros elementos com os dois últimos elementos é igual a 20.
Escolhendo, ao acaso, um elemento dessa linha, qual é a probabilidade de ele ser par?

(A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{2}{5}$ **(C)** $\frac{3}{5}$ **(D)** $\frac{4}{5}$

6.5. Considere a linha do triângulo de Pascal em que o produto do segundo elemento pelo penúltimo elemento é 484.
Qual é a probabilidade de escolher, ao acaso, um elemento dessa linha que seja superior a 1000?

(A) $\frac{15}{23}$ **(B)** $\frac{6}{11}$ **(C)** $\frac{17}{23}$ **(D)** $\frac{8}{11}$

6.6. Numa certa linha do triângulo de Pascal, o penúltimo elemento é 111.
Escolhe-se, ao acaso, um elemento dessa linha.
Qual é a probabilidade de esse elemento ser maior do que 10^5?

(A) $\frac{3}{56}$ **(B)** $\frac{53}{56}$ **(C)** $\frac{2}{37}$ **(D)** $\frac{35}{37}$

6.7. O terceiro elemento de uma linha do triângulo de Pascal é 61075.
A soma dos três primeiros elementos dessa linha é 61426.
Qual é a soma dos três últimos elementos da linha seguinte?

(A) 61425 **(B)** 61426 **(C)** 61777 **(D)** 122501

6.8. Na sequência seguinte, reproduzem-se os três primeiros elementos e os três últimos elementos de uma linha do Triângulo de Pascal.

$$1 \;\; 15 \;\; 105 \;\; \ldots \;\; 105 \;\; 15 \;\; 1$$

São escolhidos, ao acaso, dois elementos dessa linha.
Qual é a probabilidade de a soma desses dois elementos ser igual a 105?

(A) 1 **(B)** $\frac{1}{60}$ **(C)** $\frac{1}{120}$ **(D)** 0

6.9. Uma certa linha do Triângulo de Pascal é constituída por todos os elementos da forma ${}^{14}C_p$.
Escolhido, ao acaso, um elemento dessa linha, qual é a probabilidade de ele ser o número 14?

(A) $\frac{1}{15}$ **(B)** $\frac{1}{14}$ **(C)** $\frac{2}{15}$ **(D)** $\frac{4}{15}$

6.10. Uma linha do Triângulo de Pascal tem quinze elementos.
Quantos elementos dessa linha são inferiores a 100?

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 6 **(D)** 8

6.11. O 14.° elemento de uma linha do Triângulo de Pascal é igual ao 15.° elemento dessa mesma linha.
Quantos elementos tem essa linha?

(A) 14 **(B)** 15 **(C)** 28 **(D)** 30

6.12. Os quatro primeiros números de certa linha do Triângulo de Pascal são 1, 11 , 55 e 165.
Então os três últimos números da linha seguinte são:

(A) 36 , 24 e 12 **(B)** 66 , 12 e 1 **(C)** 220 , 66 e 12 **(D)** 24 , 12 e 1

6.13. A soma de todos os elementos de 2 linhas consecutivas do Triângulo de Pascal é 3072. O terceiro elemento da primeira delas é:

(A) 10 **(B)** 120 **(C)** 55 **(D)** 45

6.14. $a\ b\ c\ d\ e\ f\ g$ representam uma linha completa do Triângulo de Pascal, onde todos os elementos estão substituídos por letras.
Qual das seguintes igualdades é verdadeira?

(A) $c = {}^6C_3$ **(B)** $c = {}^6C_2$ **(C)** $c = {}^7C_3$ **(D)** $c = {}^7C_2$

6.15. O penúltimo número de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 10.
Qual é o terceiro número dessa linha?

(A) 11 **(B)** 19 **(C)** 45 **(D)** 144

AULA 7: Binómio de Newton

Sumário/pré-requisitos

Análise combinatória:

- Binómio de Newton.

Pré-requisitos:

O estudante deverá conhecer o Triângulo de Pascal e as suas propriedades e saber trabalhar com operações com polinómios e com potências.

Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 7 clique em .

7.1. O termo médio do binómio $(x+y)^n$ é ${}^nC_p x^{8-p} y^p$. Qual é o valor de n e de p?

7.2. Consideremos o binómio

$$\left(2x^2 - \frac{2}{\sqrt{2x}}\right)^n, \quad x > 0$$

(a) Sabendo que os coeficientes do oitavo e décimo sexto termos são iguais determine n.

(b) Quantos termos tem o desenvolvimento do binómio?

(c) Determine o termo médio.

(d) Determine o termo em que figura (depois de simplificado) x^9.