REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A
Prova 635 | | Ensino Secundário |
12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho | Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

Resolvido em vídeo

Exame nacional de matemática – 2019.2

Versão de 2 de Janeiro de 2022.
Verifica se existe versão com data mais recente do exame nacional 2019.2 aqui.

Acede ao exame nacional 2018.1 aqui, 2018.2 aqui e 2019.1 aqui.

Podes encontrar em www.academiaaberta.pt mais exames, vídeos e fichas.

Este ficheiro PDF inclui:

- o enunciado do exame nacional de matemática 12 da 2.ª fase de 2019 (formulário no fim);
- a resolução do exame;
- o exame resolvido em vídeo, com a explicação de todos os detalhes. Para visualizares o vídeo de cada exercício deves clicar no ícone junto ao mesmo.

Esta obra pretende proporcionar uma auto-avaliação da tua preparação para o Exame Nacional de matemática 12.

Podes encontrar a **preparação completa** no livro Preparação para o Exame Nacional de Matemática e na Plataforma de preparação para o Exame Nacional de Matemática A.

REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2019

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2) : 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
Só é permitido o uso de calculadora gráfica no Caderno 1.
Não é permitido o uso do corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
Para cada resposta, identifique o caderno e o item.
Apresente as suas respostas de forma legível.
Apresente apenas uma resposta para cada item.
A prova inclui um formulário.
As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos itens de desenvolvimento, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

CADERNO 1 - 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
É permitido o uso de calculadora

1. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$.
Sabe-se que:
   - o vértice A pertence ao eixo Ox e o vértice B pertence ao eixo Oy;
   - o vértice C tem coordenadas $(0, 3, 6)$ e o vértice G tem coordenadas $(6, 11, 0)$;
   - o plano ABC é definido pela equação $3x + 4y - 12 = 0$.

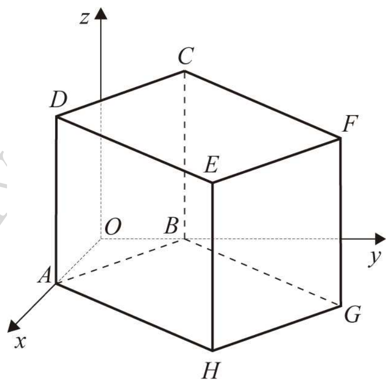


Figura 1

1.1. Determine o volume do paralelepípedo $[ABCDEFGH]$.

1.2. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Seja P o ponto de coordenadas $(1, -4, 3)$, e seja r a reta que passa pelo ponto P e é perpendicular ao plano ABC.
Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o plano ABC.

1.3. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Escolhe-se, ao acaso, um vértice do paralelepípedo e, seguidamente, também ao acaso, escolhe-se um outro vértice, diferente do anterior.
Designe-se por X o primeiro vértice escolhido e por Y o segundo vértice escolhido.
Qual é a probabilidade de a terceira coordenada do vetor $\overrightarrow{XY}$ ser igual a zero?
Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2. Uma escola secundária tem apenas turmas de 10.º, 11.º e 12.º anos.

2.1. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Relativamente aos alunos desta escola, sabe-se que:
   - $\frac{3}{5}$ dos alunos do 10.º ano são rapazes;
   - $\frac{11}{21}$ dos alunos da escola são rapazes;
   - $\frac{1}{7}$ dos alunos da escola são rapazes e frequentam o 10.º ano.

Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa escola.
Determine a probabilidade de o aluno escolhido ser uma rapariga e não frequentar o 10.º ano.
Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

2.2. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Uma turma dessa escola tem 26 alunos, dos quais 15 são raparigas.
O delegado de turma é um rapaz.
Pretende-se formar uma comissão com três alunos desta turma, para organizar uma festa de fim de ano.

Quantas comissões diferentes, que incluam rapazes e raparigas, se podem formar, sabendo-se que o delegado de turma tem de fazer parte da comissão?

(A) 195 **(B)** 215 **(C)** 235 **(D)** 255

Os dois itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.
O item 3.1. integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (P2001/2002).
O item 3.2. integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (PMC2015).
Responda apenas a um dos dois itens.
Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

3.1 (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Uma caixa contém duas bolas brancas e três bolas pretas.
Retiram-se, ao acaso e em simultâneo, duas bolas da caixa.
Seja X a variável aleatória «número de bolas brancas retiradas».
Qual é o valor médio da variável aleatória X?

(A) 0.9 **(B)** 0.8 **(C)** 0.7 **(D)** 0.6

PMC2015

3.2. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
De um triângulo, sabe-se que os comprimentos dos seus lados são 4, 5 e 6.
Seja α a amplitude do maior ângulo interno desse triângulo.
Qual é o valor de $\operatorname{sen}\alpha$, arredondado às milésimas?

(A) 0.989 **(B)** 0.992 **(C)** 0.995 **(D)** 0.998

4. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
O nível, N, de um som, medido em decibéis, é função da sua intensidade, I , medida em microwatt por metro quadrado ($\mu W/m^2$), de acordo com a igualdade

$$N = 60 + 10\log_{10} I,\ \text{com } I > 0.$$

Relativamente ao som de um certo despertador, sabe-se que, aumentando a sua intensidade em 150 $\mu W/m^2$, o seu nível passa a ser $1,4\%$ do quadrado do nível inicial.
Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor da intensidade inicial do som desse despertador, sabendo-se que pertence ao intervalo $[20, 80]$ e que, neste intervalo, esse valor é único.
Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.
Na sua resposta:
— apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
— reproduza o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) obter o valor pedido;
— apresente esse valor em $\mu W/m^2$, arredondado às unidades.

5. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Para um certo número real k, é contínua em $\mathbb{R}$ a função f, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log_3 k & \text{se } x = 1 \\ \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{se } x \neq 1 \end{cases}$$

Qual é o valor de k?

(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 8 **(D)** 9

6. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Sejam a e b dois números reais diferentes de zero.
Sabe-se que 2, a e b são três termos consecutivos de uma progressão geométrica.
Sabe-se ainda que $a - 2$, b e 2 são três termos consecutivos de uma progressão aritmética.
Determine a e b.

7. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Na Figura 2, está representado, no plano complexo, o quadrado $[ABCD]$.

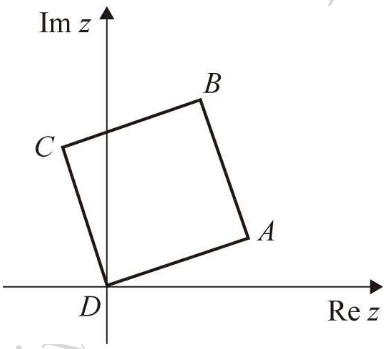


Figura 2

Sabe-se que o ponto A é o afixo (imagem geométrica) de um número complexo z e que o ponto D é o afixo (imagem geométrica) do complexo nulo.
Qual é o número complexo cujo afixo (imagem geométrica) é o ponto B?

(A) $z(1 + i)$ **(B)** iz **(C)** $i^3 z$ **(D)** $z(2 + i)$

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item										
Cotação (em pontos)										
1.1.	**1.2.**	**2.1**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	
12	12	12	13	8	8	12	8	12	8	105

CADERNO 2 - 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
Não é permitido o uso de calculadora

8. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, $z_1 = 2 - 3i$ e $z_2 = 1 - 2i$.
Mostre que o afixo (imagem geométrica) do número complexo $w = \dfrac{3z_1 - i\overline{z_2}}{1 + i^7}$ pertence à circunferência de centro no afixo (imagem geométrica) de z_1 e raio igual a $\sqrt{53}$.

Os dois itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.
O item 9.1. integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (P2001/2002).
O item 9.2. integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (PMC2015).
Responda apenas a um dos dois itens.
Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

9.1. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Na Figura 3, está representada a região admissível de um problema de Programação Linear.

Esta região corresponde ao sistema $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 150 \\ y \leq 300 \\ x + y \leq 400. \end{cases}$

Qual é o valor máximo que a função objetivo, definida por $L = 2x + y$, pode alcançar nesta região?

(A) 450 **(B)** 500

(C) 550 **(D)** 600

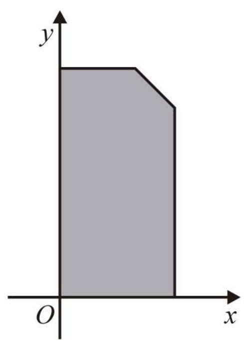


Figura 3

PMC2015

9.2. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Qual é o valor de $\operatorname{sen}\left(3 \arccos \frac{1}{2}\right)$?

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(B)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(C)** 0 **(D)** 1

10. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Na Figura 4, está representada, num referencial o.n. xOy, a reta AB.
Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo negativo Ox e o ponto B pertence ao semieixo positivo Oy;
- a reta AB tem equação $y = 2x + 4$.

Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$. Quais são as coordenadas do ponto M?

(A) $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ **(B)** $(-1, 2)$

(C) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ **(D)** $(-2, 4)$

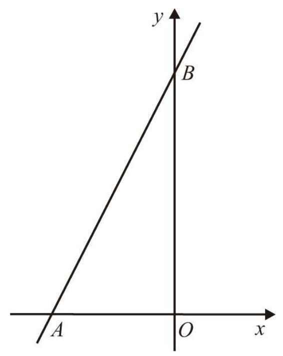


Figura 4

Os dois itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.
O item 11.1. integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (P2001/2002).
O item 11.2. integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (PMC2015).
Responda apenas a um dos dois itens.
Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

11.1. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta r definida por $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{3-y}{4} = z$. Qual dos seguintes vetores pode ser um vetor diretor de uma reta perpendicular à reta r?

(A) $\overrightarrow{a}(2,4,1)$ **(B)** $\overrightarrow{b}(-3,1,0)$ **(C)** $\overrightarrow{c}(1,1,2)$ **(D)** $\overrightarrow{d}(-4,2,0)$

PMC2015

11.2. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Qual é, para qualquer número real positivo a, o limite da sucessão $\left(\dfrac{n+\ln a}{n}\right)^{n+2}$?

(A) a^2 **(B)** $2a$ **(C)** a **(D)** $\sqrt{a}$

12. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, definida por $h(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$.

12.1. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Estude a função h quanto à existência de assíntotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso existam, escreva as suas equações.

12.2. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Resolva, em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, a equação $(x-1) \times h(x) + 2e^{-x} = 3$.

13. Seja g a função definida em $]0, \pi[$ por $g(x) = \dfrac{1}{4}\cos(2x) - \cos x$.

13.1. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.
Na sua resposta, apresente:
— o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo;
— o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima;
— as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g, caso este(s) exista(m).

13.2. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Seja f a função, de domínio, $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, definida por $f(x) = g(-x) + g\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
Qual das expressões seguintes também pode definir a função f?

(A) $\operatorname{sen} x + \cos x$ **(B)** $-\operatorname{sen} x - \cos x$ **(C)** $\operatorname{sen} x - \cos x$ **(D)** $-\operatorname{sen} x + \cos x$

14. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Na Figura 5, está representado o gráfico da função f, definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = x^2$.
Considere que um ponto P, de abcissa positiva, se desloca sobre o gráfico da função f.
Para cada posição do ponto P, seja:

- r a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto;
- s a reta perpendicular a r e tangente ao gráfico de f;
- Q o ponto de tangência da reta s com o gráfico de f;
- I o ponto de intersecção das retas r e s.

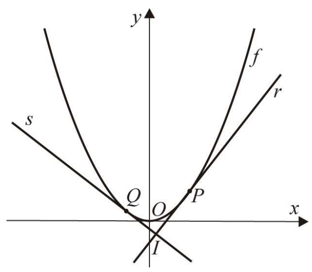


Figura 5

Mostre que, qualquer que seja a abcissa do ponto P, a ordenada do ponto I é sempre igual a $-\frac{1}{4}$.
Sugestão: Designe a abcissa do ponto P por a.

FIM

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item	8.	9.1.	9.2.	10.	11.1.	11.2.	12.1	12.2.	13.1.	13.2.	14.	
Cotação (em pontos)	13	8	8	8	8	8	14	13	13	8	10	95

TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2): 200

Proposta de resolução

1.1. O volume do paralelepípedo $[ABCDEFGH]$ é dada pelo produto da área da base vezes a altura, ou seja

$$\overline{AB} \times \overline{BG} \times \overline{BC}.$$

Para obter a área da base, vamos começar por determinar as coordenadas do ponto A.
Uma vez que A pertence ao eixo Ox, as suas coordenadas são da forma $A(a, 0, 0)$ para alguma constante $a \in \mathbb{R}$.
Substituindo na equação do plano ABC temos:

$$3 \times a + 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow a = 4.$$

Assim, $A(4, 0, 0)$.
Como $B(0, 3, 0)$ e $C(0, 3, 6)$ então
$\overline{AB} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2 + (0-0)^2} = 5$;
$\overline{BG} = \sqrt{(0-6)^2 + (3-11)^2 + (0-0)^2} = 10$
e o volume do paralelepípedo é $5 \times 10 \times 6 = 300$ unidades de volume.

1.2. Sabemos que um plano definido por uma equação da forma $ax + by + cz + d = 0$ admite o vetor de coordenadas $\vec{n}(a, b, c)$ como vetor normal.
Por conseguinte, $\vec{n}(3, 4, 0)$ são as coordenadas de um vetor normal ao plano ABC e

$$(x, y, z) = (1, -4, 3) + k(3, 4, 0), \ k \in \mathbb{R}$$

é uma equação vetorial da reta r.
A solução do sistema seguinte dá-nos as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano ABC.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3x + 4y - 12 = 0 \\ (x, y, z) = (1, -4, 3) + k(3, 4, 0) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 3(1 + 3k) + 4(4k - 4) - 12 = 0 \\ (x, y, z) = (1 + 3k, -4 + 4k, 3) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 25k = 25 \\ --- \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} k = 1 \\ (x, y, z) = (4, 0, 3). \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano ABC são $(4, 0, 3)$.

1.3. Comecemos por notar que, para a terceira coordenada do vetor $\overrightarrow{XY}$ ser 0, este tem de ser paralelo ao plano xOy.
Assim, podemos escolher dois vértices do conjunto $\{A, B, G, H\}$ ou dois vértices do conjunto $\{C, D, E, F\}$.
Em qualquer um dos casos temos ${}^4A_2$ vetores. Por conseguinte, há ${}^4A_2 \times 2$ casos favoráveis.
Como se podem escolher dois vértices entre os oito vértices para formar vetores de ${}^8A_2 = 56$ modos distintos, há 56 casos possíveis.
de acordo com a Lei de Laplace, a probabilidade pedida é

$$\frac{{}^4A_2 \times 2}{56} = \frac{3}{7}.$$

2.1. Consideremos os acontecimentos:
R: "o aluno é rapaz";
F: "o aluno frequenta o 10.º ano".
De acordo com o enunciado temos:
$P(R|F) = \frac{3}{5}$;
$P(R) = \frac{11}{21}$;
$P(R \cap F) = \frac{1}{7}$.
Pretendemos calcular $P\left(\overline{R} \cap \overline{F}\right)$:

$$\begin{aligned} P\left(\overline{R} \cap \overline{F}\right) &= P\left(\overline{R \cup F}\right) \\ &= 1 - P\left(R \cup F\right) \\ &= 1 - \left(P(R) + P(F) - P\left(R \cap F\right)\right). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} & P(R|F) = \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{P\left(R \cap F\right)}{P(F)} = \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\frac{1}{7}}{P(F)} = \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow\ & P(F) = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{5}} \\ \Leftrightarrow\ & P(F) = \frac{5}{21}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & 1 - \left(P(R) + P(F) - P\left(R \cap F\right)\right) \\ & 1 - \left(\frac{11}{21} + \frac{5}{21} - \frac{1}{7}\right) \\ = & \frac{8}{21} \approx 0.38. \end{aligned}$$

A probabilidade pedida é 0.38.

2.2. A turma tem 15 raparigas e $26 - 15 = 11$ rapazes.
Se a comissão inclui rapazes e raparigas e o delegado de turma pertence à comissão, temos as seguintes possibilidades:

- delegado e 2 raparigas: ${}^{15}C_2 = 105$ comissões;
- delegado, outro rapaz e 1 rapariga: ${}^{10}C_1 \times {}^{15}C_1 = 150$.

No total temos $105 + 150 = 255$ comissões nas condições apresentadas.
Podemos concluir que a opção correta é a **(D)**.

3.1. Havendo duas bolas brancas e três bolas pretas, temos $S_X = \{0, 1, 2\}$.

- $P(X=0)$ corresponde à probabilidade de se tirarem duas bolas pretas: $\frac{{}^3C_2}{{}^5C_2}=\frac{3}{10}$;
- $P(X=1)$ corresponde à probabilidade de se tirar uma bola branca e uma bola preta: $\frac{{}^2C_1\times{}^3C_1}{{}^5C_2}=\frac{3}{5}$;
- $P(X=2)$ corresponde à probabilidade de se tirarem duas bolas brancas: $\frac{{}^2C_2}{{}^5C_2}=\frac{1}{10}$.

Assim,

$$\mu_X=\sum_{x\in S_X} x\times P(X=x)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{10}=0.8.$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(B)**.

3.2. Sabemos que, num triângulo, ao maior lado opõe-se o ângulo de maior amplitude.
Assim, ao lado de comprimento 6 opõe-se o ângulo de amplitude α.
Pelo Teorema de Carnot,

$$\begin{aligned}&6^2=4^2+5^2-2\times4\times5\cos\alpha\\ \Leftrightarrow\ &40\cos\alpha=5\\ \Leftrightarrow\ &\cos\alpha=\frac{1}{8}\\ \Leftrightarrow\ &\alpha\approx 82.819244^\circ.\end{aligned}$$

Logo, $\operatorname{sen}\alpha\approx 0.992$.
Podemos concluir que a opção correta é a **(B)**.
Um outro modo de resolver o exercício, a partir da etapa $\cos\alpha=\frac{1}{8}$ é aplicar a fórmula fundamental da trigonometria:

$$\begin{aligned}&\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1\\ \Leftrightarrow\ &\operatorname{sen}^2\alpha+\frac{1}{64}=1\\ \Leftrightarrow\ &\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{63}{64}\\ \Leftrightarrow\ &\operatorname{sen}\alpha=\pm\frac{\sqrt{63}}{8}.\end{aligned}$$

Como $\alpha\in\left]0,180^\circ\right[$, por ser a amplitude do ângulo interno de um triângulo, então $\operatorname{sen}\alpha=\frac{\sqrt{63}}{8}\approx 0.992$.

4. A afirmação "aumentando a intensidade do som em 150 $\mu W/m^2$, o seu nível passa a ser 1,4% do quadrado do nível inicial" traduz-se através da equação

$$N(I+150)=0.014\times[N(I)]^2.$$

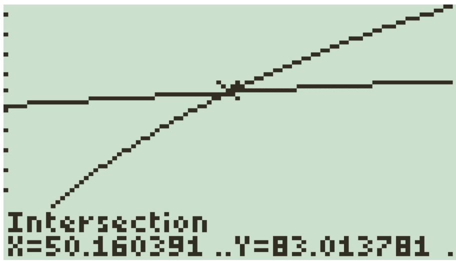
Introduzindo na calculadora gráfica as expressões

$$y=N(x+150)=60+10\log_{10}(x+150)$$

e

$$y=0.014\times[N(x)]^2=0.014\,(60+10\log_{10}x)^2$$

e recorrendo às suas potencialidades, obtemos os gráficos seguintes e o seu ponto de interseção no intervalo $[20,80]$.



Podemos concluir que $x \approx 50$.
Assim, a intensidade inicial do som do despertador em causa é aproximadamente 50 $\mu W/m^2$.

5. Como f é contínua em $\mathbb{R}$, também é em particular contínua no ponto 1.
Assim tem que verificar $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$. Como

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \\ &\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1}(x+1) = 2\end{aligned}$$

então f é contínua no ponto 0 se e só se

$$\log_3 k = 2 \Leftrightarrow k = 3^2 \Leftrightarrow k = 9.$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(D)**.

6. Uma vez que:

- 2, a e b são três termos consecutivos de uma progressão geométrica, então $\dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{a}$;
- $a-2$, b e 2 são três termos consecutivos de uma progressão aritmética então $b-(a-2) = 2-b$.

Vamos determinar os valores de a e b através da resolução do sistema seguinte.

$$\begin{aligned}&\begin{cases} \dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{a} \\ b-(a-2) = 2-b \end{cases} \overset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (2b)^2 = 2b \\ 2b = a \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 4b^2 - 2b = 0 \\ --- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(2b-1) = 0 \\ --- \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} b = 0 \vee b = \frac{1}{2} \\ --- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Como, por hipótese, $a \neq 0$ e $b \neq 0$ então $a = 1$ e $b = \frac{1}{2}$.

7. Sabemos que sendo A o afixo de z, como C se obtém a partir de A através de uma rotação centrada na origem de amplitude $\dfrac{\pi}{2}$, então C é o afixo de iz.
Como $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$, o afixo de B é $z + iz = z(1+i)$.
Podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

8.

$$w = \frac{3z_1 - i\overline{z_2}}{1+i^7} = \frac{3(2-3i) - i(1+2i)}{1-i}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{6-9i-i+2}{1-i} = \frac{8-10i}{1-i}\\&= \frac{(8-10i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{8+8i-10i+10}{1^2+1^2}\\&= \frac{18-2i}{2} = 9-i.\end{aligned}$$

A equação da circunferência de centro no afixo de z_1 e raio $\sqrt{53}$ é $|z-(2-3i)| = \sqrt{53}$. Substituindo w nesta equação vem:

$$|9-i-(2-3i)| = \sqrt{53} \Leftrightarrow |7+2i| = \sqrt{53} \Leftrightarrow \sqrt{7^2+2^2} = \sqrt{53} \Leftrightarrow \sqrt{53} = \sqrt{53}.$$

Podemos assim concluir que o afixo de w pertence à circunferência.

9.1. Vamos começar por determinar os vértices dos polígonos, resolvendo os sistemas seguintes.

$$\begin{cases} y = 300 \\ x+y = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 300 \\ x = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 150 \\ x+y = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 150 \\ y = 250 \end{cases}$$

Podemos concluir que $O(0,0)$, $A(150,0)$, $B(150,250)$, $C(100,300)$ e $D(0,300)$.
Um vez que o valor máximo da região ocorre num destes vértices, vamos avaliar a função objetivo, definida por $L = 2x+y$ em cada um destes pontos:

- $L(0,0) = 2\times 0 + 0 = 0$;
- $L(150,0) = 2\times 150 + 0 = 150$;
- $L(100,300) = 2\times 100 + 300 = 500$;
- $L(150,250) = 2\times 150 + 250 = 550$;
- $L(0,300) = 2\times 0 + 300 = 300$.

Podemos concluir que o valor máximo alcançado na região é 550.
A opção correta é a **(C)**.

9.2. $\operatorname{sen}\left(3\arccos\frac{1}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(3\times\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\pi = 0$.
A opção correta é a **(C)**.

10. Podemos obter as coordenadas do ponto A, ponto de interseção da reta AB com Ox, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 2x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -2. \end{cases}$$

Podemos concluir que $A(-2,0)$.
Podemos obter as coordenadas do ponto B, ponto de interseção da reta AB com Oy, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4. \end{cases}$$

Podemos concluir que $B(0,4)$.
As coordenadas do ponto médio são

$$\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\frac{-2+0}{2},\frac{0+4}{2}\right)=(-1,2).$$

A opção correta é a **(B)**.

11.1 Como

$$\frac{x-1}{2}=\frac{3-y}{4}=z\Leftrightarrow\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-0}{1},$$

podemos concluir que $\vec{r}=(2,-4,1)$ é um vetor diretor da reta r.
Como

$$\vec{r}\cdot\vec{c}=(2,-4,1)\cdot(1,1,2)=2-4+2=0$$

então $\vec{c}\perp\vec{r}$.
A opção correta é a **(C)**.

11.2

$$\begin{aligned}\lim\left(\frac{n+\ln a}{n}\right)^{n+2}&=\lim\left(1+\frac{\ln a}{n}\right)^{n}\times\lim\left(1+\frac{\ln a}{n}\right)^{2}\\&=e^{\ln a}\times1^2=a.\end{aligned}$$

A opção correta é a **(C)**.

12.1 As assíntotas paralelas aos eixos coordenados são as assíntotas verticais e as assíntotas horizontais.

Assíntotas verticais:
Comecemos por notar que $D_h=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
Como
$\lim_{x\to1^-}h(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{e^x}{x-1}=\frac{e}{0^-}=-\infty$;
$\lim_{x\to1^+}h(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{e^x}{x-1}=\frac{e}{0^+}=+\infty$
então $x=1$ é uma equação da assíntota vertical do gráfico de h. É a única pois h é contínua em D_h, por ser a divisão de funções contínuas.

Assíntotas horizontais:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}h(x)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x-1}\\&\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x}{x}\times\frac{x}{x-1}\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}\\&=+\infty\times1=+\infty.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}h(x)&=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x-1}\\&=\frac{e^{-\infty}}{-\infty-1}=\frac{0}{-\infty}=0.\end{aligned}$$

Podemos concluir que a reta de equação $y=0$ é a única assíntota horizontal do gráfico de h.

12.2

$$\begin{aligned}
&(x-1)\times h(x)+2e^{-x}=3\\
\Leftrightarrow\ &(x-1)\times\frac{e^x}{x-1}+2e^{-x}-3=0\\
\Leftrightarrow\ &e^x+2e^{-x}-3=0\land x\neq 1\\
\Leftrightarrow\ &\left(e^x\right)^2-3e^x+2=0\land x\neq 1\\
\Leftrightarrow\ &e^x=2\lor e^x=1\Leftrightarrow x=\ln 2\lor x=0.
\end{aligned}$$

O conjunto solução é $S=\{0,\ln 2\}$.

13.1 $D_g=]0,\pi[$.

$$\begin{aligned}
g'(x)&=\left(\frac{1}{4}\cos\left(2x\right)-\cos x\right)'\\
&=-\frac{1}{4}\times 2\sin(2x)+\sin x\\
&=-\frac{1}{2}\sin(2x)+\sin x.
\end{aligned}$$

$g''(x)=-\frac{1}{2}\times 2\times\cos(2x)+\cos x=-\cos(2x)+\cos x.$

$$\begin{aligned}
g''(x)=0\ &\Leftrightarrow \cos(2x)=\cos x\\
&\Leftrightarrow 2x=x+2k\pi\lor 2x=-x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\
&\Leftrightarrow x=2k\pi\lor x=\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$g''(x)=-\cos(2x)+\cos x$		$+$	0	$-$	
g		$\cup$	P.I.	$\cap$	

Como $\frac{\pi}{2}\in\left]0,\frac{2\pi}{3}\right[$ e $g''\left(\frac{\pi}{2}\right)=1>0$ então $g''(x)>0,\ \forall x\in\left]0,\frac{2\pi}{3}\right[$.
Como $\frac{5\pi}{6}\in\left]\frac{2\pi}{3},\pi\right[$ e $g''\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$ então $g''(x)<0,\ \forall x\in\left]\frac{2\pi}{3},\pi\right[$.

$$\begin{aligned}
g\left(\frac{2\pi}{3}\right)&=\frac{1}{4}\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\
&=-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Podemos concluir que $\left(\frac{2\pi}{3},g\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\left(\frac{2\pi}{3},\frac{3}{8}\right)$ são as coordenadas do ponto de inflexão do gráfico de g.
A concavidade do gráfico de g é voltada para cima em $\left]0,\frac{2\pi}{3}\right]$ e voltada para baixo em $\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right[$.

13.2 Como
$g(-x)=\frac{1}{4}\cos(-2x)-\cos(-x)=\frac{1}{4}\cos(2x)-\cos x$
e

$$\begin{aligned}
g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)&=\frac{1}{4}\cos\left(2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\\
&=\frac{1}{4}\cos(\pi-2x)-\sin x\\
&=-\frac{1}{4}\cos(2x)-\sin x.
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} f(x) &= g(-x) + g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= \frac{1}{4}\cos(2x) - \cos x - \frac{1}{4}\cos(2x) - \sin x \\ &= -\cos x - \sin x. \end{aligned}$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(B)**.

14 Seja a a abcissa do ponto P.
Como $f'(x) = 2x$ então $f'(a) = 2a$ é o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a. A sua equação reduzida é da forma $y = 2ax + b$, onde $b \in \mathbb{R}$.
Substituindo as coordenadas do ponto de tangência $(a, f(a)) = \left(a, a^2\right)$ nesta equação temos

$$a^2 = 2a \times a + b \Leftrightarrow b = -a^2.$$

Podemos concluir que a equação reduzida da reta r é $y = 2ax - a^2$.
Uma vez que a reta s é perpendicular à reta r então o seu declive é $-\frac{1}{2a}$.
Vamos agora determinar uma equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f com declive $-\frac{1}{2a}$.
A sua equação reduzida é da forma $y = -\frac{1}{2a}x + b'$, $b' \in \mathbb{R}$.
Como

$$f'(x) = -\frac{1}{2a} \Leftrightarrow 2x = -\frac{1}{2a} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4a},$$

a sua abcissa é $-\frac{1}{4a}$.
$\left(-\frac{1}{4a}, f\left(-\frac{1}{4a}\right)\right) = \left(-\frac{1}{4a}, \frac{1}{16a^2}\right)$ são as coordenadas do respetivo ponto de tangência. Substituindo na equação da reta tangente temos

$$\frac{1}{16a^2} = -\frac{1}{2a} \times \left(-\frac{1}{4a}\right) + b' \Leftrightarrow b' = -\frac{1}{16a^2}.$$

Podemos concluir que a equação reduzida da reta s é $y = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2}$.
A solução do sistema seguinte vai-nos dar as coordenadas do ponto I, de interseção das retas r e s.

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y = 2ax - a^2 \\ y = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ 2ax - a^2 = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} --- \\ -16a^4 + 1 = -8ax - 32a^3x \wedge a \neq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} --- \\ x = \frac{1-16a^4}{-8a(4a^2+1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ x = \frac{(1-4a^2)(1+4a^2)}{-8a(4a^2+1)} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} y = -\frac{1}{2a} \times \frac{1-4a^2}{-8a} - \frac{1}{16a^2} \\ x = \frac{1-4a^2}{-8a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{4} \\ x = \frac{1-4a^2}{-8a} \end{cases} \end{aligned}$$

Concluímos deste modo que a ordenada do ponto I é sempre $-\frac{1}{4}$.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr ($alpha$ – amplitude em radianos, do ângulo ao centro ; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ ($alpha$ – amplitude em radianos, do ângulo ao centro ; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \acute{A}readabase \times Altura$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \acute{A}readabase \times Altura$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\frac{sinA}{a} = \frac{sinB}{b} = \frac{sinC}{c}$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$ então:
$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$
$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$
$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$
$(uv)' = u'v + uv'$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$(u^n)' = nu^{n-1}u'$ $(n \in \mathbb{R})$
$(\sin u)' = u' \cos u$
$(\cos u)' = -u' \sin u$
$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(e^u)' = u'e^u$
$(a^u)' = u'a^u \ln a$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ $(p \in \mathbb{R})$