



Exame Final Nacional de Matemática
Prova 635 | Ensino Secundário |

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho | Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

Exame nacional de matemática – 2019.1


Versão de 2 de Janeiro de 2022.

Verifica se existe versão com data mais recente do exame nacional 2019.1 [aqui](#).

Acede ao exame nacional 2018.1 [aqui](#), 2018.2 [aqui](#) e 2019.2 [aqui](#).

Podes encontrar em www.academiaaberta.pt mais exames, vídeos e fichas.

Este ficheiro PDF inclui:

- o enunciado do exame nacional de matemática 12 da 1.ª fase de 2019 (formulário no fim);
- a resolução do exame;
- o exame resolvido em vídeo, com a explicação de todos os detalhes. Para visualizares o vídeo de cada exercício deves clicar no ícone  junto ao mesmo.

Esta obra pretende proporcionar uma auto-avaliação da tua preparação para o Exame Nacional de matemática 12.

Todos os direitos de autor estão reservados para o autor Rui Castanheira de Paiva (ruipaivac@gmail.com).

Podes encontrar a **preparação completa** no [livro Preparação para o Exame Nacional de Matemática](#) e na [Plataforma de preparação para o Exame Nacional de Matemática A](#).

Exame Final Nacional de Matemática A
Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2019
12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2) : 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
Só é permitido o uso de calculadora gráfica no Caderno 1.
Não é permitido o uso do corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
Para cada resposta, identifique o caderno e o item.
Apresente as suas respostas de forma legível.
Apresente apenas uma resposta para cada item.
A prova inclui um formulário.
As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.


Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
Na resposta aos itens de desenvolvimento, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

CADERNO 1 - 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
É permitido o uso de calculadora

1. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$.


Os vértices A e C têm coordenadas $(2, 1, 0)$ e $(0, -1, 2)$, respetivamente.

O vértice V tem coordenadas $(3, -1, 2)$.

- 1.1.  Determine a amplitude do ângulo VAC .

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

- 1.2.  (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)

Determine uma equação do plano que contém a base da pirâmide.

Apresente a equação na forma $ax + by + cz + d = 0$.

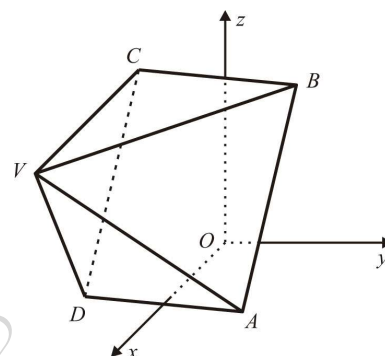


Figura 1

Os dois itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O item 2.1. integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (P2001/2002).

O item 2.2. integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (PMC2015).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

- 2.1.  (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)

Seja X uma variável aleatória com distribuição Normal de valor médio 5 e desvio padrão $\frac{1}{2}$.

Qual é o valor, arredondado às milésimas, de $P(X > 6)$?

- (A) 0,046 (B) 0,042 (C) 0,023 (D) 0,021

PMC2015

- 2.2.  (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)

Qual é o limite da sucessão de termo geral $\left(\frac{n-2}{n}\right)^{3n}$?

- (A) $\frac{1}{e^3}$ (B) e^3 (C) $\frac{1}{e^6}$ (D) e^6

3. Uma caixa contém bolas de várias cores, indistinguíveis ao tato, umas com um logotipo desenhado e outras não. Das bolas existentes na caixa, dez são amarelas. Dessas dez bolas, três têm o logotipo desenhado.

3.1.  (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)

Retira-se, ao acaso, uma bola da caixa. Sabe-se que a probabilidade de ela não ser amarela ou de não ter um logotipo desenhado é igual a $\frac{15}{16}$.
Determine o número de bolas que a caixa contém.

3.2.  (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)

Dispõem-se, ao acaso, as dez bolas amarelas, lado a lado, em linha reta.
Qual é a probabilidade de as três bolas com o logotipo desenhado ficarem juntas?

(A) $\frac{1}{16}$

(B) $\frac{1}{15}$

(C) $\frac{1}{14}$

(D) $\frac{1}{13}$

4.  (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)

Considere todos os números naturais de sete algarismos que se podem escrever utilizando dois algarismos 5, quatro algarismos 6 e um algarismo 7.

Determine quantos destes números são ímpares e maiores do que seis milhões.

5.  (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)

Uma lente de contacto é um meio transparente limitado por duas faces, sendo cada uma delas parte de uma superfície esférica. Na Figura 2, pode observar-se uma lente de contacto.



Figura 2

Na Figura 3, está representado um corte longitudinal de duas superfícies esféricas, uma de centro C_1 e raio r_1 e outra de centro C_2 e raio r_2 , com $r_2 > r_1$, que servem de base à construção de uma lente de contacto, representada a sombreado na figura.

Seja $x = \overline{C_1C_2}$.

Sabe-se que o diâmetro, d , da lente é dado por

$$\frac{\sqrt{[(r_1 + r_2)^2 - x^2] [x^2 - (r_1 - r_2)^2]}}{x},$$

com $r_2 - r_1 < x < \sqrt{r_2^2 - r_1^2}$.

Uma lente de contacto foi obtida a partir de duas superfícies esféricas com 7 mm e 8 mm de raio, respetivamente.

O diâmetro dessa lente excede em 9 mm a distância, x , entre os centros das duas superfícies esféricas.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de x , sabendo-se que esse valor é único no intervalo $]r_2 - r_1, \sqrt{r_2^2 - r_1^2}[$.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

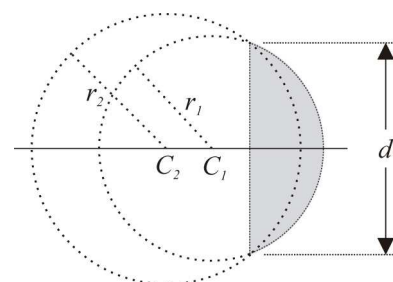


Figura 3

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor pedido em milímetros, arredondado às décimas.

6.  (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)

Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, seja $z = -1 + 2i$.

Seja θ o menor argumento positivo do número complexo \bar{z} (conjugado de z).

A qual dos intervalos seguintes pertence θ ?

(A) $]0, \frac{\pi}{4}[$

(B) $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$

(C) $]\pi, \frac{5\pi}{4}[$

(D) $]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}[$

7.  (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)

Seja r um número real maior do que 1.

Sabe-se que r é a razão de uma progressão geométrica de termos positivos. Sabe-se ainda que, de dois termos consecutivos dessa progressão, a sua soma é igual a 12 e a diferença entre o maior e o menor é igual a 3.

Determine o valor de r .

8.  (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)

Sejam a e b dois números reais positivos tais que $a > b$.

Sabe-se que $a + b = 2(a - b)$.

Qual é o valor, arredondado às décimas, de $\ln(a^2 - b^2) - 2\ln(a + b)$?

(A) 0,7

(B) 1,4

(C) -0,7

(D) -1,4

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

| Item | | | | | | | | | | | |
|---------------------|------|-----|------|------|------|----|----|----|----|----|-----|
| Cotação (em pontos) | | | | | | | | | | | |
| 1.1. | 1.2. | 2.1 | 2.2. | 3.1. | 3.2. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | |
| 12 | 12 | 8 | 8 | 13 | 8 | 12 | 12 | 8 | 12 | 8 | 105 |

CADERNO 2 - 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
Não é permitido o uso de calculadora

Os dois itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O item 9.1. integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (P2001/2002).

O item 9.2. integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (PMC2015).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

9.1. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)

Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os planos α , β e γ , definidos pelas equações $x+y+z = 1$, $2x + 2y + 2z = 1$ e $x + y = 0$, respetivamente.

A intersecção dos planos α , β e γ é

- (A) o conjunto vazio (B) um ponto (C) uma reta (D) um plano

PMC2015

9.2. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)

Na Figura 4, estão representados, num referencial o.n. xOy , uma elipse e um círculo, ambos centrados na origem do referencial. Os focos da elipse, F_1 e F_2 , pertencem ao eixo Ox .

Sabe-se que:

- a distância focal e o eixo menor da elipse são iguais ao diâmetro do círculo;
- a área do círculo é igual a 9π .

Qual das equações seguintes é a equação reduzida da elipse?

- (A) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ (B) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{9} = 1$
 (C) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{20} = 1$ (D) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1$

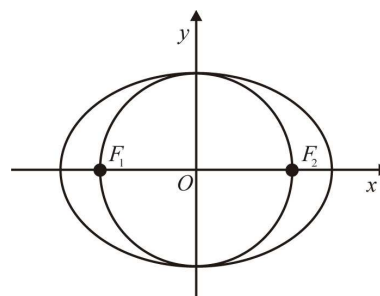


Figura 4

10. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)

Considere em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = 4 + 6i$.

Seja $w = \frac{z_1 + i^6 + 2\bar{z}_1}{z_1 - z_2}$.

No plano complexo, a condição $|z| = |w| \wedge \text{Im}(z) \geq 0 \wedge \text{Re}(z) \geq 0$ define uma linha.

Determine o comprimento dessa linha.

11.  (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)

Qual é a solução da equação $2 \cos x + 1 = 0$ no intervalo $[-\pi, 0]$?

- (A) $-\frac{5\pi}{6}$ (B) $-\frac{2\pi}{3}$ (C) $-\frac{\pi}{3}$ (D) $-\frac{\pi}{6}$

Os dois itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O item 12.1. integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (P2001/2002).

O item 12.2. integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (PMC2015).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

- 12.1.  (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)

Um dado cúbico equilibrado tem uma face numerada com o número -1 e cinco faces numeradas com o número 1 .

Lança-se este dado duas vezes.

Seja X a variável aleatória «soma dos números saídos nos dois lançamentos».

Qual é o valor de k para o qual $P(X = k) = \frac{5}{18}$?

- (A) 0 (B) 2 (C) -2 (D) -1

PMC2015

- 12.2.  (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)

Um ponto P desloca-se numa reta numérica, no intervalo de tempo $I = [0, 10]$ (medido em segundos), de tal forma que a respetiva abcissa é dada por $x(t) = 3 \cos\left(\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$, com $t \in I$.

Qual é o período, em segundos, deste oscilador harmónico?

- (A) 2 (B) 3 (C) 2π (D) 3π

13. Seja f a função, de domínio \mathbb{R} , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{x}{x - \ln x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

- 13.1.  (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)

Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 1 .

13.2.  (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)

Averigue se a função f é contínua no ponto 0.

Justifique a sua resposta.

14. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $g(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

14.1.  (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)

Estude a função g quanto à monotonia e determine, caso existam, os extremos relativos.

14.2.  (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)

Seja h a função, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $h(x) = g(x) + 2x - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Sabe-se que o gráfico da função h tem uma assíntota oblíqua.

Qual é o declive dessa assíntota?

(A) 1

(B) 2

(C) e

(D) e^2

15.  (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)

Na Figura 5, estão representados, num referencial o.n. xOy , os pontos A e B , de abcissas positivas, e as retas OB e r .

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Ox ;
- a reta OB é definida pela equação $y = \frac{4}{3}x$;
- a reta r contém a bissetriz do ângulo AOB .

Determine a equação reduzida da reta r .

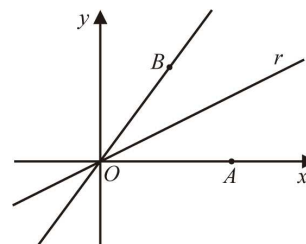


Figura 5

FIM

COTAÇÕES (Caderno 2)

| Item | | | | | | | | | | | |
|---------------------|------|-----|-----|-------|-------|------|-------|-------|-------|-----|----|
| Cotação (em pontos) | | | | | | | | | | | |
| 9.1. | 9.2. | 10. | 11. | 12.1. | 12.2. | 13.1 | 13.2. | 14.1. | 14.2. | 15. | |
| 8 | 8 | 13 | 8 | 8 | 8 | 13 | 14 | 13 | 8 | 10 | 95 |

TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2): 200

Proposta de resolução

1.1. Para determinar a amplitude do ângulo VAC vamos determinar os vetores \overrightarrow{AV} e \overrightarrow{AC} .

$$\overrightarrow{AV} = V - A = (3, -1, 2) - (2, 1, 0) = (1, -2, 2).$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0, -1, 2) - (2, 1, 0) = (-2, -2, 2).$$

$$\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{AV} \wedge \overrightarrow{AC}) &= \frac{\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AV}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|} \\ \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AV} \wedge \overrightarrow{AC}) &= \frac{(1, -2, 2) \cdot (-2, -2, 2)}{\|(1, -2, 2)\| \times \|(-2, -2, 2)\|} \\ \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AV} \wedge \overrightarrow{AC}) &= \frac{-2 + 4 + 4}{\sqrt{1 + 4 + 4} \times \sqrt{4 + 4 + 4}} \\ \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AV} \wedge \overrightarrow{AC}) &= \frac{6}{3\sqrt{12}} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AV} \wedge \overrightarrow{AC} &\approx 55^\circ. \end{aligned}$$

1.2. Para determinar uma equação do plano que contém a base da pirâmide, vamos começar por determinar um vetor normal ao plano.

Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AC]$. Então

$$M = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{1-1}{2}, \frac{0+2}{2} \right) = (1, 0, 1).$$

Como \overrightarrow{MV} é um vetor normal ao plano ABC e

$$\overrightarrow{MV} = V - M = (3, -1, 2) - (1, 0, 1) = (2, -1, 1),$$

a sua equação cartesiana é da forma

$$2x - y + z + d = 0,$$

onde $d \in \mathbb{R}$.

Substituindo $A(2, 1, 0)$ na equação temos

$$2 \times 2 - 1 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$$

e podemos concluir que $2x - y + z - 3 = 0$ é uma equação do plano pretendido.

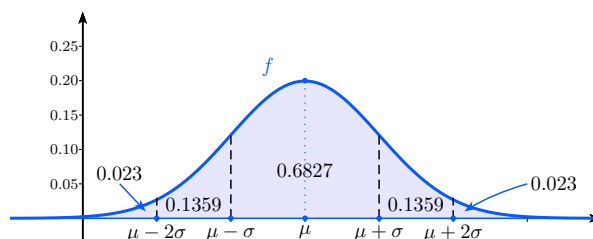
2.1. Sabemos que se $X \sim N(\mu, \sigma)$ então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$$

Consideremos o gráfico seguinte, que ilustra parte destas propriedades.



Deste modo, como $X \sim N(5, 0.5)$, então

$$P(X > \mu + 2\sigma) = P(X > 6) \approx 0.023.$$

A opção correta é a (C).

2.2. Vamos fazer uso do facto de $\lim (1 + \frac{k}{n})^n = e^k$.

$$\lim \left(\frac{n-2}{n}\right)^{3n} = \left(\lim \left(1 + \frac{-2}{n}\right)^n\right)^3 = (e^{-2})^3 = e^{-6} = \frac{1}{e^6}.$$

A opção correta é a (C).

3.1. Consideremos, relativamente à experiência de escolha aleatória de escolha de uma bola, os acontecimentos:

A: “a bola é amarela”;

L: “a bola ter o logotipo desenhado”.

Dos dados do enunciado podemos concluir que

$$P(\overline{A} \cup \overline{L}) = \frac{15}{16}. \text{ Deste modo,}$$

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cup \overline{L}) &= \frac{15}{16} \\ \Leftrightarrow P(\overline{A \cap L}) &= \frac{15}{16} \\ \Leftrightarrow 1 - P(A \cap L) &= \frac{15}{16} \\ \Leftrightarrow P(A \cap L) &= \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

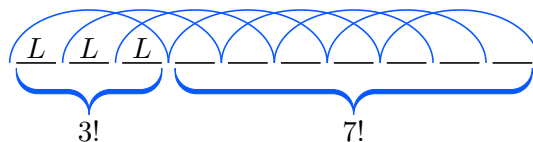
Como as bolas são indistinguíveis ao tato e são seleccionadas ao acaso, a Lei de Laplace garante que

$$\begin{aligned} P(A \cap L) &= \frac{1}{16} \\ \Leftrightarrow \frac{\#(A \cap L)}{\#E} &= \frac{1}{16} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{\#E} &= \frac{1}{16} \\ \Leftrightarrow \#E &= 48. \end{aligned}$$

Podemos concluir que a caixa contém 48 bolas.

3.2. Vamos determinar a probabilidade pedida recorrendo à Lei de Laplace.

Para determinar os casos favoráveis vamos recorrer ao esquema seguinte e ao Princípio fundamental da contagem.



Relativamente aos casos favoráveis temos:

$$3! \times 7! \times 8$$

- Há 8 modos de colocar as bolas com logotipo juntas
- Há 7! permutações das bolas sem logotipo
- Há 3! permutações das bolas com logotipo

Uma vez que os casos possíveis são $10!$, correspondentes às permutações das 10 bolas, a probabilidade pedida é

$$\frac{3! \times 7! \times 8}{10!} = \frac{1}{15}.$$

A opção correta é a **(B)**.

4. Começemos por notar que, para os números serem:

- ímpares, o último algarismo deve ser 5 ou 7;
- superiores a seis milhões, o primeiro algarismo deve ser 6 ou 7.

A divisão das diferentes situações em três casos e a respetiva esquematização clarificam a resolução do problema.

Caso 1: o primeiro algarismo é 6 e o último 5:

O esquema seguinte exemplifica a situação.

$$\underline{6} \quad \underline{5} \quad \underline{6} \quad \underline{7} \quad \underline{6} \quad \underline{6} \quad \underline{5}$$

Como nos algarismos que não estão nos extremos há três algarismos iguais a 6 então há $\frac{5!}{3!}$ números nestas condições.

Caso 2: o primeiro algarismo é 6 e o último 7:

O esquema seguinte exemplifica a situação.

$$\underline{6} \quad \underline{5} \quad \underline{6} \quad \underline{5} \quad \underline{6} \quad \underline{6} \quad \underline{7}$$

Como nos algarismos que não estão nos extremos há três algarismos iguais a 6 e dois iguais a 5 então há $\frac{5!}{2!3!}$ números nestas condições.

Caso 3: o primeiro algarismo é 7 e o último 5:

O esquema seguinte exemplifica a situação.

$$\underline{7} \quad \underline{5} \quad \underline{6} \quad \underline{6} \quad \underline{6} \quad \underline{6} \quad \underline{5}$$

Como nos algarismos que não estão nos extremos há quatro algarismos iguais a 6 então, apenas a troca da posição do 5 origina números diferentes. Há 5 números nestas condições.

No total temos $\frac{5!}{3!} + \frac{5!}{2!3!} + 5 = 35$ números.

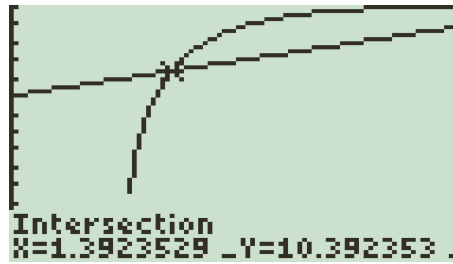
5. O problema pode ser equacionado com $d = x + 9$.

Como $r_1 = 7$ e $r_2 = 8$ temos

$$\begin{aligned} d &= x + 9 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{[(7+8)^2 - x^2]} \left[x^2 - (7-8)^2 \right]}{x} &= x + 9 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(225 - x^2)(x^2 - 1)}}{x} &= x + 9 \end{aligned}$$

$$\text{e }]r_2 - r_1, \sqrt{r_2^2 - r_1^2}[=]1, \sqrt{15}[.$$

Introduzindo na calculadora gráfica as expressões $y = \frac{\sqrt{(225-x^2)(x^2-1)}}{x}$ e $y = x + 9$ e recorrendo às suas potencialidades, obtemos os gráficos seguintes e o seu ponto de interseção no intervalo $]1, \sqrt{15}[$.



Podemos concluir que $x \approx 1.4$.

6. $\bar{z} = -1 - 2i$.

Seendo $\theta \in [0, 2\pi[$, como o afixo de \bar{z} pertence ao 3.º quadrante,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-2}{-1} \Leftrightarrow \theta = \operatorname{tg}^{-1}(2) + \pi \Leftrightarrow \theta \approx 4.25 \in \left] \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right[.$$

A opção correta é a **(D)**.

7. Como $r > 1$ e $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, a sucessão (a_n) é monótona crescente.

Sejam a_p e a_{p+1} dois termos consecutivos da sucessão.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a_p + a_{p+1} = 12 \\ a_{p+1} - a_p = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_p + r \times a_p = 12 \\ r \times a_p - a_p = 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a_p = \frac{12}{1+r} \\ a_p(r-1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - - - \\ \frac{12r-12-3-3r}{1+r} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} - - - \\ 9r - 15 = 0 \wedge r \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_p = \frac{9}{2} \\ r = \frac{5}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Podemos concluir que a razão é igual a $\frac{5}{3}$.

8.

$$\begin{aligned} & \ln(a^2 - b^2) - 2\ln(a + b) = \ln(a - b) + \ln(a + b) - 2\ln(a + b) \\ & = \ln(a - b) - \ln(a + b) = \ln(a - b) - \ln(2(a - b)) \\ & = \ln(a - b) - [\ln 2 + \ln(a - b)] = -\ln 2 \approx -0.7. \end{aligned}$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(C)**.

9.1. Note-se que $\vec{n}_\alpha(1, 1, 1)$ e $\vec{n}_\beta(2, 2, 2)$ são vetores normais aos planos α e β , respetivamente.

Como $\vec{n}_\beta = 2\vec{n}_\alpha$, os planos α e β são paralelos. Por outro lado,

$$x + y + z = 1 \Leftrightarrow 2x + 2y + 2z = 2 \not\Leftrightarrow 2x + 2y + 2z = 1$$

permite-nos concluir que os planos α e β são estritamente paralelos. Consequentemente, a interseção dos três planos é o conjunto vazio.

Um outro modo de concluir o pretendido é através da resolução do sistema seguinte:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 2 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \\ - - - \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 1 = 2 \\ - - - \\ - - - \end{cases} \end{aligned}$$

Como o sistema é impossível, a interseção dos três planos é o conjunto vazio. Podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

9.2. Como a área do círculo é 9π ,

$$\pi \times \overline{OF_2}^2 = 9\pi \Leftrightarrow \overline{OF_2} = \pm 3.$$

Consequentemente, o diâmetro do círculo é igual a 6.

Como a distância focal, $2c$, e o eixo menor da elipse, $2b$, são iguais ao diâmetro do círculo então

$$2c = 2b = 6 \Leftrightarrow c = b = 3.$$

Uma vez que $b^2 + c^2 = a^2$ então

$$3^2 + 3^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 = 18.$$

Assim, a equação reduzida da elipse é

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

A opção correta é a **(A)**.

10.

$$\begin{aligned} w &= \frac{z_1 + i^6 + 2\overline{z_1}}{z_1 - z_2} \\ &= \frac{3 + 4i - 1 + 6 - 8i}{-1 - 2i} \\ &= \frac{8 - 4i}{-1 - 2i} \\ &= \frac{(8 - 4i)(-1 + 2i)}{(-1 - 2i)(-1 + 2i)} \\ &= \frac{20i}{5} = 4i. \end{aligned}$$

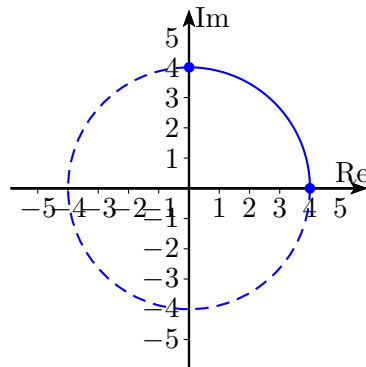
Assim,

- $|z| = |w| \Leftrightarrow |z| = 4$ representa, no plano de Argand, a circunferência centrada na origem com raio 4;
- $\text{Im}(z) \geq 0$ representa os complexos cujo afixo se encontra no eixo real ou acima deste;
- $\text{Re}(z) \geq 0$ representa os complexos cujo afixo se encontra no eixo imaginário ou à direita deste.

Na figura seguinte está representada no plano de Argand a região definida pela condição

$$|z| = |w| \wedge \text{Im}(z) \geq 0 \wedge \text{Re}(z) \geq 0.$$

Trata-se de um arco de circunferência.



Como o perímetro da circunferência completa é

$2\pi \times 4 = 8\pi$, o perímetro do arco de circunferência é $\frac{8\pi}{4} = 2\pi$ unidades de comprimento.

11. $2 \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$.

Como $-\frac{2\pi}{3} \in [-\pi, 0]$ e $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ então a opção correta é a **(B)**.

12.1. Consideramos a seguinte tabela de dupla entrada com todas as somas possíveis.

| 1.º\2.º | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|---------|----|---|---|---|---|---|
| -1 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

Começemos por notar que $S_X = \{0, -2, 2\}$.

Como $P(X = 0) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$, $P(X = -2) = \frac{1}{36}$ e $P(X = 2) = \frac{25}{36}$, então $k = 0$ e podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

12.2. O período de um oscilador harmónico definido por $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, onde $A > 0$, $\omega > 0$ e $\phi \in [0, 2\pi[$, é dado por $P = \frac{2\pi}{\omega}$. Como $\frac{2\pi}{\omega} = 2$, o período é 2. Podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

13.1. Se $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1(x - \ln x) - x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(1 - \ln x)^2} \\ &= \frac{x - \ln x - x + 1}{(1 - \ln x)^2} \\ &= \frac{1 - \ln x}{(1 - \ln x)^2}. \end{aligned}$$

Assim, $f'(1) = \frac{1 - \ln 1}{(1 - \ln 1)^2} = 1$ e a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1 é da forma $y = x + b$, $b \in \mathbb{R}$.

Como $f(1) = \frac{1}{1 - \ln 1} = 1$ então $T(1, 1)$ é um ponto da reta tangente em estudo.

Substituindo as coordenadas de T na equação $y = x + b$ temos

$$1 = 1 + b \Leftrightarrow b = 0.$$

Podemos concluir que $y = x$ é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

13.2. Para f ser contínua, tem que se verificar:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0).$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{x} \\ &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{1 + \cos x} \\ &= 1 \times \frac{0}{1 + 1} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x - \ln x} \\ &= \frac{0}{0 - \ln 0^+} = \frac{0}{0 - (-\infty)} = 0. \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$ então f é contínua no ponto 0.

14.1. $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Para estudar a monotonia e a existência de extremos da função g vamos começar por determinar a derivada e os seus zeros. $g'(x) = \frac{-e^{-x} \times x - e^{-x} \times 1}{x^2} = \frac{e^{-x}(-x-1)}{x^2}$.

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow e^{-x}(-x-1) = 0 \wedge x^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (e^{-x} = 0 \vee -x-1 = 0) \wedge x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1. \end{aligned}$$

Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de g' e da monotonia de g .

| x | $-\infty$ | -1 | 0 | $+\infty$ |
|----------|-----------|------------|------------|------------|
| e^{-x} | + | + | + | + |
| $-x-1$ | + | 0 | - | - |
| x^2 | + | + | + | + |
| $g'(x)$ | + | 0 | - | - |
| g | | \nearrow | \searrow | \searrow |

$$g = -x - 1$$

Podemos concluir que g é crescente em $] -\infty, -1]$ e decrescente em $[-1, 0[$ e em $]0, +\infty[$.
 $g(-1) = \frac{e}{-1} = -e$ é máximo relativo.

14.2. O declive da assíntota oblíqua é dado por

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x}.$$

Como $h(x) = g(x) + 2x - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{e^{-x}}{x} + 2x - \frac{1}{\sqrt{x}}$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x^2} + 2 - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right)$$

$$= \frac{0}{+\infty} + 2 - \frac{1}{+\infty} = 2.$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(B)**.

15. Seja α a inclinação da reta OB . Como o seu declive é $\frac{4}{3}$ então $\tan \alpha = \frac{4}{3}$.
A inclinação da reta r é $\frac{\alpha}{2}$ e o seu declive $\tan \frac{\alpha}{2}$.

Como $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ então

$$\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

$$\text{Assim, } \tan \alpha = \tan \left(2 \times \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Se $1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2} \neq 0$ temos

$$\tan \alpha = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow 6 \tan \frac{\alpha}{2} = 4 - 4 \tan^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4 \tan^2 \frac{\alpha}{2} + 6 \tan \frac{\alpha}{2} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \vee \tan \frac{\alpha}{2} = -2.$$

Como a reta r tem declive positivo e passa na origem, podemos concluir que a sua equação reduzida é $y = \frac{1}{2}x$.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α - amplitude em radianos, do ângulo ao centro ; r - raio)

Área de um polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude em radianos, do ângulo ao centro ; r - raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ r - raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r - raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r - raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Complexos

$(\rho \text{cis } \theta)^n = \rho^n \text{cis } (n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \text{cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{cis } \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$)

e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$

$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se X é $N(\mu, \sigma)$ então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$