REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Resolvido em vídeo

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | | Ensino Secundário |

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho | Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

Exame nacional de matemática – 2018.1

Versão de 2 de Janeiro de 2022.

Verifica se existe versão com data mais recente do exame nacional 2018.1 aqui.

Acede ao exame nacional 2018.2 aqui, 2019.1 aqui e 2019.2 aqui.

Podes encontrar em www.academiaaberta.pt mais exames, vídeos e fichas.

Este ficheiro PDF inclui:

- o enunciado do exame nacional de matemática 12 da 1.ª fase de 2018 (formulário no fim);
- a resolução do exame;
- o exame resolvido em vídeo, com a explicação de todos os detalhes. Para visualizares o vídeo de cada exercício deves clicar no ícone junto ao mesmo.

Esta obra pretende proporcionar uma auto-avaliação da tua preparação para o Exame Nacional de matemática 12.

Podes encontrar a **preparação completa** no livro Preparação para o Exame Nacional de Matemática e na Plataforma de preparação para o Exame Nacional de Matemática A.

REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2018

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2) : 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
Só é permitido o uso de calculadora gráfica no Caderno 1.
Não é permitido o uso do corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
Para cada resposta, identifique o caderno e o item.
Apresente as suas respostas de forma legível.
Apresente apenas uma resposta para cada item.
A prova inclui um formulário.
As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos itens de desenvolvimento, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

CADERNO 1 - 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
É permitido o uso de calculadora

Os dois itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.
O item 1.1. integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (P2001/2002).
O item 1.2. integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (PMC2015).
Responda apenas a um dos dois itens.
Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

1.1 Na Figura 1, está representado um dado tetraédrico equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 4.
Lança-se dez vezes esse dado e, em cada lançamento, regista-se o número da face que fica voltada para baixo.
Qual é a probabilidade, arredondada às milésimas, de sair exatamente seis vezes a face com o número 3?

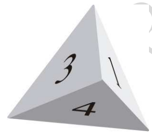


Figura 1

(A) $0,146$ **(B)** $0,016$ **(C)** $0,008$ **(D)** $0,007$

PMC2015

1.2. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Seja f uma função diferenciável no intervalo $[0,2]$ tal que

- $f(0) = 1$
- $\forall x \in [0,2], 0 < f'(x) < 9$

O teorema de Lagrange, aplicado à função f em $[0,2]$, permite concluir que:

(A) $0 < f(2) < 18$ **(B)** $1 < f(2) < 19$ **(C)** $2 < f(2) < 20$ **(D)** $3 < f(2) < 21$

2. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma hexagonal regular.

Sabe-se que:

- $[PQ]$ e $[QR]$ são arestas de uma das bases do prisma;
- $\overline{PQ} = 4$.

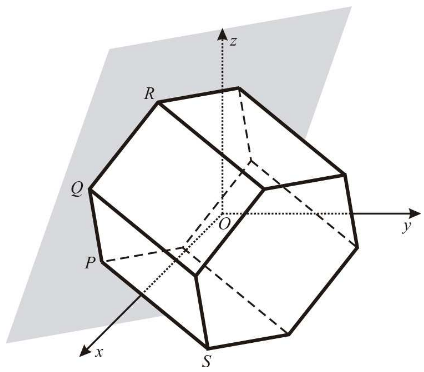


Figura 2

2.1. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Determine o produto escalar $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}$.

2.2. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Sabe-se ainda que:

- o plano PQR tem equação $2x+3y-z-15=0$;
- uma das arestas laterais do prisma é o segmento de reta $[PS]$, em que S é o ponto de coordenadas $(14,5,0)$.

Determine a área lateral do prisma.
Apresente o resultado arredondado às décimas.
Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2.3. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Escolhem-se, ao acaso, dois vértices de cada uma das bases do prisma.

Determine a probabilidade de esses quatro pontos pertencerem a uma mesma face lateral do prisma.
Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

3. Uma escola dedica-se ao ensino de Espanhol e de Inglês, entre outras línguas.

3.1. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Doze alunos dessa escola, quatro de Espanhol e oito de Inglês, dispõem-se lado a lado em linha reta para tirar uma fotografia.
De quantas maneiras se podem dispor os doze alunos, de modo que os alunos da mesma disciplina fiquem juntos?

(A) 40320 **(B)** 80640 **(C)** 967680 **(D)** 1935360

3.2. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Relativamente a essa escola, sabe-se que:

- o número de alunos que estudam Espanhol é igual ao número de alunos que estudam Inglês;
- o número de alunos que estudam, pelo menos, uma das duas línguas é o quádruplo do número de alunos que estudam as duas línguas.

Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa escola.
Determine a probabilidade de esse aluno estudar Inglês, sabendo que estuda Espanhol.
Apresente o resultado na forma de percentagem.

4. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Um feixe de luz incide perpendicularmente sobre um conjunto de três placas sobrepostas, homogéneas e iguais, feitas de um material transparente. A Figura 3 ilustra a situação.
Admita que a potência, L, da luz transmitida, após atravessar o conjunto de placas, é dada por

$$L = I(1-R)^6 e^{-3\lambda}$$

em que:

- I é a potência da luz incidente;
- R é o coeficiente de reflexão do material $(0 < R < 1)$;
- λ é o coeficiente de absorção do material, por centímetro $(\lambda > 0)$.

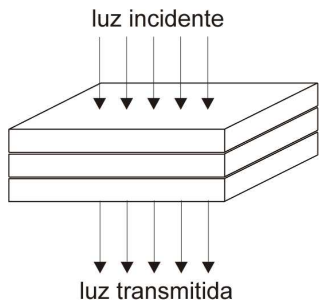


Figura 3

Relativamente ao material de que as placas são feitas, sabe-se que o coeficiente de reflexão, R, e o coeficiente de absorção, λ, têm o mesmo valor numérico.
Sabe-se ainda que a potência da luz transmitida é igual a metade da potência da luz incidente.
Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor comum dos coeficientes de absorção e de reflexão do material, sabendo-se que esse valor existe e é único.
Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.
Na sua resposta:

– equacione o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;

– apresente o valor pedido arredondado às milésimas.

5. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Para um certo número real x, pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{12}\right[$, o número complexo $z = (\cos x + i \sin x)^{10}$ verifica a condição $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{3}\operatorname{Re}(z)$.
Qual é o valor de x arredondado às centésimas?

(A) $0,02$ **(B)** $0,03$ **(C)** $0,12$ **(D)** $0,13$

6. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Seja a um número real.
Sabe-se que a, $a+6$ e $a+18$ são três termos consecutivos de uma progressão geométrica.
Relativamente a essa progressão geométrica, sabe-se ainda que a soma dos sete primeiros termos é igual a 381.
Determine o primeiro termo dessa progressão.

7. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Na Figura 4, está representada, num referencial o.n. xOy, uma circunferência de centro na origem e que passa nos pontos A, B, C, D, E e F.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox e tem abcissa igual a 2;
- os pontos B e F têm ambos abcissa igual a 1;
- os pontos C, D e E são, respetivamente, os simétricos dos pontos B, A e F relativamente ao eixo Oy.

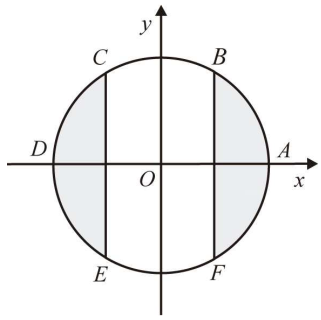


Figura 4

Qual das condições seguintes define o domínio plano representado a sombreado?

(A) $x^2+y^2 \leq 2 \wedge |x| \geq 1$ **(B)** $x^2+y^2 \leq 4 \wedge |x| \leq 1$ **(C)** $x^2+y^2 \leq 4 \wedge |x| \geq 1$ **(D)** $x^2+y^2 \leq 2 \wedge |x| \leq 1$

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	
8	8	12	12	12	8	13	12	8	12	8	100

CADERNO 2 - 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
Não é permitido o uso de calculadora

Os dois itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.
O item 8.1. integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (P2001/2002).
O item 8.2. integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (PMC2015).
Responda apenas a um dos dois itens.
Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

8.1. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta r definida pela condição

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} \wedge z = 3.$$

Qual das seguintes equações vetoriais define a reta r?

(A) $(x, y, z) = (3, 0, 3) + k(2, -1, 0),\ k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y, z) = (3, 0, 3) + k(2, -1, 3),\ k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y, z) = (-1, 2, 0) + k(2, -1, 3),\ k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z) = (-1, 2, 0) + k(2, -1, 0),\ k \in \mathbb{R}$

PMC2015

8.2. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Qual é o valor de $\arcsin(1) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$?

(A) $\frac{7\pi}{6}$ **(B)** $\frac{\pi}{6}$ **(C)** $\frac{3\pi}{4}$ **(D)** $\frac{\pi}{4}$

9. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w = 1 + \dfrac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}i^5}{1+2i}$.
Sabe-se que w é uma raiz quarta de um certo complexo z.
Determine a raiz quarta de z cujo afixo (imagem geométrica) pertence ao primeiro quadrante.
Apresente o resultado na forma trigonométrica, com argumento pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Os dois itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.
O item 10.1. integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (P2001/2002).
O item 10.2. integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (PMC2015).
Responda apenas a um dos dois itens.
Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

10.1. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Num saco, encontram-se quatro bolas indistinguíveis ao tato, numeradas de 0 a 3.
Retiram-se, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas do saco.
Seja X a variável aleatória «produto dos números saídos».
Para um certo valor de k, tem-se que $P(X = k) = \frac{1}{2}$.
Qual é o valor de k?

(A) 6 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 0

PMC2015

10.2. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Seja k um número real.

Considere a sucessão convergente (u_n) definida por $u_n = \left(\frac{n+k}{n}\right)^n$.

Sabe-se que o limite de (u_n) é solução da equação $\ln\left(\frac{x}{e}\right) = 3$.
Qual é o valor de k?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** 3 **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** 4

11. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Sejam a e b números reais superiores a 1 tais que $\ln b = 4 \ln a$.
Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $a^x \geq b^{\frac{1}{x}}$.
Apresente a resposta usando a notação de intervalos de números reais.

12. Seja g a função, de domínio $]-\infty, \pi]$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{4x} & \text{se } x < 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2-\sin(2x)} & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

12.1. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função g não tem zeros.

(B) A função g tem um único zero.

(C) A função g tem exatamente dois zeros.

(D) A função g tem exatamente três zeros.

12.2. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Averigue se a função g é contínua no ponto 0.
Justifique a sua resposta.

12.3. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Estude a função g quanto à monotonia no intervalo $]0, \pi]$ e determine, caso existam, os extremos relativos.

13. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)
Considere a função f definida em $]0, \pi[$ por $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$. Qual das equações seguintes define uma assíntota do gráfico da função f?

(A) $x = 0$ **(B)** $x = \pi$ **(C)** $x = 1$ **(D)** $x = \dfrac{\pi}{2}$

14. (Vídeo da resolução reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!)

Na Figura 5, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

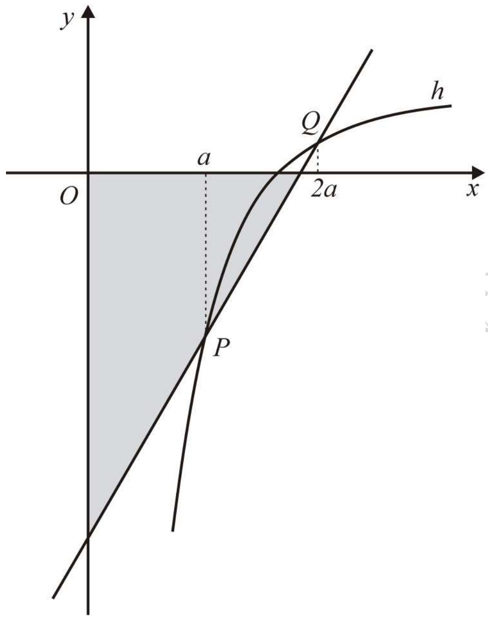


Figura 5

Para cada número real a pertencente ao intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ sejam P e Q os pontos do gráfico da função h de abcissas a e $2a$, respetivamente.
Tal como a figura sugere, a reta PQ define, com os eixos coordenados, um triângulo retângulo.
Mostre que existe, pelo menos, um número real a pertencente ao intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ para o qual esse triângulo é isósceles.
Sugestão: comece por identificar o valor do declive da reta PQ para o qual o triângulo é isósceles.

FIM

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item											
Cotação (em pontos)											
8.1.	**8.2.**	**9.**	**10.1.**	**10.2.**	**11.**	**12.1.**	**12.2.**	**12.3.**	**13.**	**14.**	
8	8	12	8	8	13	8	13	13	8	12	95

TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2): 200

Proposta de resolução

Caderno 1

1.1. Comecemos por notar a existência de independência entre as dez experiências de lançamento do dado. Deste modo, como a probabilidade de obter o número 3 é igual a $\frac{1}{4}$, a variável aleatória

X: "n.º de vezes que se obtém o número 3 em 10 lançamentos do dado tetraédrico"

é tal que $X \sim B\left(10, \frac{1}{4}\right)$ (distribuição Binomial com dez experiências e probabilidade de sucesso igual a $\frac{1}{4}$). Logo, $P(X=6) = {}^{10}C_6 \times \left(\frac{1}{4}\right)^6 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx 0.016$.
A opção correta é a **(B)**.

1.2. Uma vez que f é diferenciável em $[0,2]$ então, pelo teorema da derivabilidade e continuidade, também é contínua em $[0,2]$. Assim, pelo Teorema de Lagrange

$$\exists c \in]0,2[: f'(c) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0}.$$

Como $f(0)=1$ então

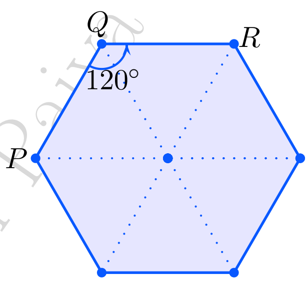
$$\exists c \in]0,2[: f'(c) = \frac{f(2)-1}{2}.$$

Por outro lado, como $0 < f'(x) < 9$ então

$$0 < f'(c) < 9 \Leftrightarrow 0 < \frac{f(2)-1}{2} < 9 \Leftrightarrow 1 < f(2) < 19.$$

A opção correta é a **(B)**.

2.1. Podemos observar na figura seguinte que
$P\hat{Q}R = 120°$.



Pela definição de produto escalar temos

$$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = ||\overrightarrow{QP}|| \times ||\overrightarrow{QR}|| \times \cos(120°)$$
$$= 4 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -8.$$

2.2. Vamos começar por determinar as coordenadas do ponto P, ponto de interseção da reta PS com o plano PQR.
Para isso, comecemos por notar que, como $\vec{n} = (2,3,-1)$ é um vetor normal ao plano PQR, então $(x,y,z) = (14,5,0) + k(2,3,-1)$, $k \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial da reta PS.
Temos portanto:

$$\begin{cases} 2x+3y-z-15=0 \\ \\ (x,y,z)=(14,5,0)+k(2,3,-1) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(14+2k)+3(5+3k)-(-k)-15=0 \\ \\ (x,y,z)=(14+2k,5+3k,-k) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=-2 \\ \\ (x,y,z)=(14+2k,5+3k,-k) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ \\ (x,y,z)=(10,-1,2)\,. \end{cases}$$

Podemos concluir que $P\,(10,-1,2)$.

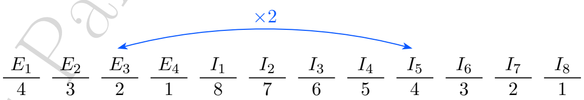
$$\overline{PS}=\sqrt{(10-14)^2+(-1-5)^2+(2-0)^2}$$
$$=\sqrt{56}.$$

Deste modo, a área lateral (6 faces laterais) arredondada às décimas é

$$6\times\overline{PQ}\times\overline{PS}=6\times 4\times\sqrt{56}\approx 179.6.$$

2.3. Como os vértices são escolhidos ao acaso, podemos utilizar a Lei de Laplace para resolver o problema.
Os casos possíveis são ${}^6C_2\times{}^6C_2$ uma vez que para cada uma das ${}^6C_2$ possíveis escolhas de dois vértices de uma das faces podemos escolher dois vértices da outra face de ${}^6C_2$ modos.
Os casos favoráveis são 6 uma vez que há seis faces laterais.
Pela Lei de Laplace, a probabilidade pedida é $\dfrac{6}{{}^6C_2\times{}^6C_2}\approx 0.03$.

3.1. Comecemos por ilustrar a situação com um esquema.



Note que no esquema E_i designa o estudante de Espanhol i para $i=1,2,3,4$ e I_j designa o estudante de Inglês j para $j=1,...,8$.
Podemos concluir pelo Princípio fundamental da contagem que há $4!\times 8!\times 2=1935360$ maneiras de fazer o pretendido.
A opção correta é a **(D)**.

3.2. Consideremos a experiência aleatória de escolha de um aluno da escola ao acaso e os acontecimentos:
E: "estudar Espanhol";
I: "estudar Inglês".
De acordo com os dados temos:
$P(E)=P(I)$; $P(E\cup I)=4P(E\cap I)$.
Deste modo, a probabilidade pedida é:

$$P(I|E)=\frac{P(I\cap E)}{P(E)}.$$

Notemos agora que, como a escola não se dedica só ao ensino do Espanhol e do Inglês, $P(E) = P(I)$ não implica necessariamente que $P(E) = 0.5 \wedge P(I) = 0.5$.

$$\begin{aligned}
& P(E \cup I) = 4P(E \cap I) \\
\Leftrightarrow\ & P(E) + P(I) - P(E \cap I) = 4P(E \cap I) \\
\Leftrightarrow\ & 2P(E) = 5P(E \cap I) \\
\Leftrightarrow\ & P(E \cap I) = \frac{2}{5}P(E).
\end{aligned}$$

Consequentemente,

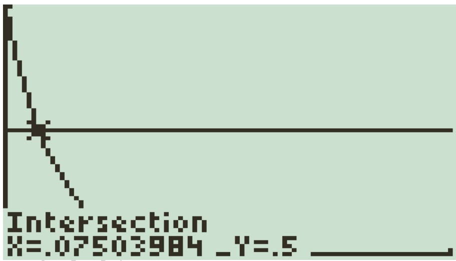
$$P(I|E) = \frac{\frac{2}{5}P(E)}{P(E)} = 0.4$$

e podemos concluir que a probabilidade pedida é 40%.

4. Os dados do enunciado indicam que $R = \lambda$ e $L = \frac{I}{2}$.
Substituindo na equação dada e simplificando obtemos:

$$\begin{aligned}
& L = I\,(1-R)^6\, e^{-3\lambda} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{I}{2} = I\,(1-\lambda)^6\, e^{-3\lambda} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2} = (1-\lambda)^6\, e^{-3\lambda}.
\end{aligned}$$

Introduzindo na calculadora gráfica as funções $y = \frac{1}{2}$ e $y = (1-x)^6\, e^{-3x}$ e recorrendo às suas potencialidades obtemos os gráficos seguintes e o seu ponto de interseção.



Logo, $R = \lambda \approx 0.075$.

5. Notemos que, como

$$|\cos x + i \sin x| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1,$$

então

$$\begin{aligned}
& (\cos x + i \sin x)^{10} = \left(e^{ix}\right)^{10} \\
& = e^{10ix} = \cos(10x) + i \sin(10x).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{3}\operatorname{Re}(z) \Leftrightarrow \sin(10x) = \frac{1}{3}\cos(10x) \\
\Leftrightarrow\ & \tan(10x) = \frac{1}{3} \wedge \cos(10x) \neq 0.
\end{aligned}$$

Logo, como $x \in \left]0, \frac{\pi}{12}\right[$, $10x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x \approx 0.03$.
A opção correta é a **(B)**.

6. Como a, $a+6$ e $a+18$ são três termos consecutivos de uma progressão geométrica então

$$\frac{a+6}{a} = \frac{a+18}{a+6} \Leftrightarrow \frac{(a+6)^2-(a+18)a}{a(a+6)} = 0$$
$$\Leftrightarrow -6a = -36 \wedge a(a+6) \neq 0 \Leftrightarrow a = 6.$$

Logo a razão da progressão geométrica é $\frac{6+6}{6} = 2$.
Por outro lado,

$$S_7 = 381 \Leftrightarrow a_1 \times \frac{1-2^7}{1-2} = 381 \Leftrightarrow a_1 = 3.$$

Temos portanto que o primeiro termo é 3.

7. Uma vez que a região consiste na parte de um círculo centrado na origem de raio 2, os seus pontos (x, y) terão que satisfazer a condição

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4.$$

Como se encontra à esquerda ou na reta de equação $x = -1$ ou à direita ou na reta de equação $x = 1$ então terá também que se verificar a condição

$$x \leq -1 \vee x \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1.$$

Podemos concluir que, como se verificam cumulativamente as duas condições, a opção correta é a **(C)**.

Caderno 2

8.1. Como

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} \wedge z = 3 \Leftrightarrow \frac{x-(-1)}{2} = \frac{y-2}{-1} \wedge z = 3$$

então podemos concluir que $A(-1, 2, 3)$ é um ponto de r e que $\vec{r} = (2, -1, 0)$ é um dos seus vetores diretores.
Nesta fase, como as opções **(A)** e **(D)** apresentam $\vec{r}$ como vetor diretor então estamos inclinados para estas opções.
Relativamente à opção **(A)**, averiguemos se $(3, 0, 3)$ é ponto de r.
Substituindo as suas coordenadas na equação da reta r dada temos

$$\frac{3+1}{2} = \frac{0-2}{-1} \wedge 3 = 3 \Leftrightarrow 2 = 2 \wedge 3 = 3.$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

8.2. $\arcsin(1) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$.
A opção correta é a **(A)**.

9. Vamos começar por simplificar w.

$$w = 1 + \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}i^5}{1+2i}$$
$$= 1 + \frac{\left(2\sqrt{3} - \sqrt{3}i\right)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$

$$= 1 + \frac{2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}i - \sqrt{3}i - 2\sqrt{3}}{5} = 1 - \sqrt{3}i.$$

Vamos agora escrever w na forma trigonométrica.
Como $|1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2$ e $\text{Arg}(w) = -\frac{\pi}{3}$ então $w = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
Por outro lado, sabemos que os argumentos das raízes quartas de um complexo estão em progressão aritmética de razão $\frac{\pi}{2}$. Consequentemente, a raiz quarta pretendida é $2e^{-i\left(\frac{\pi}{3}\right)} \times e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

10.1. Comecemos por ilustrar a experiência numa tabela.

$\times$	0	1	2	3
0	$\cancel{0}$	0	0	0
1	0	$\cancel{1}$	2	3
2	0	2	$\cancel{4}$	6
3	0	3	6	$\cancel{9}$

Podemos observar que $P(X=0) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ e concluir que a opção correta é a **(D)**.

10.2. $\lim \left(\frac{n+k}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$.
Substituindo e^k na equação dada temos

$$\ln\left(\frac{e^k}{e}\right) = 3 \Leftrightarrow \ln e^{k-1} = 3 \Leftrightarrow k - 1 = 3 \Leftrightarrow k = 4.$$

A opção correta é a **(D)**.

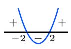
11. Comecemos por notar que $\ln b = 4 \ln a \Leftrightarrow \frac{\ln b}{\ln a} = 4$.

$$\begin{aligned} a^x \geq b^{\frac{1}{x}} &\Leftrightarrow \ln a^x \geq \ln b^{\frac{1}{x}} \\ &\Leftrightarrow x \ln a \geq \frac{1}{x} \ln b \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{x}\frac{\ln b}{\ln a} \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{x} \times 4 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Para estudar o sinal da expressão $\frac{x^2-4}{x}$ vamos recorrer a uma tabela onde se estuda separadamente o sinal do seu numerador e denominador. Para isso, notemos que

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \lor x = 2.$$

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$x^2 - 4$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x^2-4}{x}$	$-$	0	$+$	ND	$-$	0	$+$



Podemos concluir que

$$\frac{x^2 - 4}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, 0[\cup [2, +\infty[.$$

12.1.

$$g(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{e^{2x}-1}{4x}=0 \wedge x<0\right) \vee \left(\frac{1}{2-\sin(2x)}=0 \wedge 0 \leq x \leq \pi\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(e^{2x}-1=0 \wedge x \neq 0 \wedge x<0\right) \vee x \in \varnothing$$
$$\Leftrightarrow e^{2x}=1 \wedge x \neq 0 \wedge x<0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \wedge x \neq 0 \wedge x<0$$
$$\Leftrightarrow x \in \varnothing.$$

Podemos concluir que a função g não tem zeros e que a opção correta é a **(A)**.

12.2.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{4x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \frac{1}{2} \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{2x}$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{y \to 0^-} \frac{e^{y}-1}{y} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2-\sin(2x)} = \frac{1}{2} = g(0).$$

Como

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^+} g(x) = g(0)$$

então g é contínua em $x=0$.

12.3.

$$g'(x) = \frac{-1 \times (-2\cos(2x))}{(2-\sin(2x))^2} = \frac{2\cos(2x)}{(2-\sin(2x))^2}.$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2\cos(2x)=0 \wedge (2-\sin(2x))^2 \neq 0$$
$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \wedge \sin(2x) \neq 2$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Para encontrar as soluções desta equação no conjunto $]0,\pi]$ vamos atribuir valores a k:

- $k=-1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} \notin]0,\pi]$;
- $k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in]0,\pi]$;
- $k=1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} \in]0,\pi]$;
- $k=2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{2} = \frac{5\pi}{4} \notin]0,\pi]$.

Podemos concluir que

$$g'(x)=0 \wedge x \in]0,\pi[\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}.$$

Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de g' e da monotonia de g em $]0,\pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	

Logo, g é crescente em $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ e em $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ e decrescente em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Temos também que $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2-\sin\frac{2\pi}{4}} = \frac{1}{1} = 1$ e $g(\pi) = \frac{1}{2-\sin(2\pi)} = \frac{1}{2}$ são máximos relativos e $g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2-\sin\frac{6\pi}{4}} = \frac{1}{3}$ é mínimo relativo.

13.

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{x}{\sin x} = \frac{\pi}{0^+} = +\infty.$$

Podemos concluir que a reta de equação $x = \pi$ é assíntota do gráfico de f e que a opção correta é a **(B)**.

14. De acordo com o enunciado temos

$$P(a, h(a)) = \left(a, \frac{\ln a}{a}\right); \quad Q(a, h(2a)) = \left(2a, \frac{\ln(2a)}{2a}\right).$$

O declive da reta PQ é

$$m_{PQ} = \frac{\frac{\ln(2a)}{2a} - \frac{\ln a}{a}}{2a - a} = \frac{\ln(2a) - 2\ln a}{2a^2}.$$

Seja $f(a) = \frac{\ln(2a)-2\ln a}{2a^2}$.
Para o triângulo da figura ser isósceles, o declive da reta PQ tem que ser igual a 1, ou seja $f(a) = 1$.
Como
$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln 1 - 2\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\ln 4 > 2\ln e = 2 > 1$;
$f(1) = \frac{\ln 2 - 2\ln 1}{2} = \frac{\ln 2}{2} < \frac{\ln e^2}{2} = 1$
então $f(1) < 1 < f\left(\frac{1}{2}\right)$. Como f é contínua em $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, por ser a diferença, divisão e composição de funções contínuas, então o Teorema de Bolzano garante que a equação $f(a) = 1$ tem pelo menos uma solução no intervalo $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (*alpha* – amplitude em radianos, do ângulo ao centro ; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (*alpha* – amplitude em radianos, do ângulo ao centro ; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Áreadabase* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Áreadabase* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\frac{sinA}{a} = \frac{sinB}{b} = \frac{sinC}{c}$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ $(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$ então:
$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$
$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$
$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$
$(uv)' = u'v + uv'$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$(u^n)' = nu^{n-1}u'$ $(n \in \mathbb{R})$
$(\sin u)' = u' \cos u$
$(\cos u)' = -u' \sin u$
$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(e^u)' = u'e^u$
$(a^u)' = u'a^u \ln a$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ $(p \in \mathbb{R})$