

Proposta de resolução

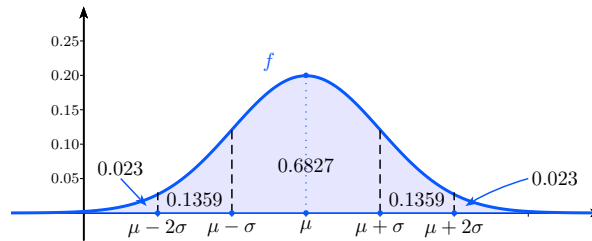
1.1. Sabemos que se $X \sim N(\mu, \sigma)$ então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$$

Consideremos o gráfico seguinte, que ilustra parte destas propriedades.



Deste modo, $P(X > \mu - 2\sigma) = 1 - 0.023 = 0.977$.

A opção correta é a **(C)**.

1.2. $\widehat{ACB} = 180^\circ - 57^\circ - 81^\circ = 42^\circ$.

Pelo Teorema dos senos,

$$\begin{aligned} \frac{\sin 42^\circ}{\overline{AB}} &= \frac{\sin 81^\circ}{5} \\ \Leftrightarrow \overline{AB} &= \frac{5 \sin 42^\circ}{\sin 81^\circ} \\ \Rightarrow \overline{AB} &\approx 3.39. \end{aligned}$$

A opção correta é a **(C)**.

2. Consideremos, relativamente à experiência de escolha aleatória de um atleta do clube, os acontecimentos:

B : “pratica basquetebol”;

F : “pratica futebol”.

Dos dados do enunciado podemos concluir que

$$P(B) = \frac{1}{5}, P(F) = \frac{2}{5} \text{ e } P(\overline{B|\overline{F}}) = \frac{3}{4}.$$

$$\begin{aligned} P(\overline{B|\overline{F}}) &= \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{P(\overline{B \cap \overline{F}})}{P(\overline{F})} &= \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow P(\overline{B \cup F}) &= \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow 1 - P(B \cup F) &= \frac{9}{20} \\ \Leftrightarrow P(B \cup F) &= \frac{11}{20} \\ \Leftrightarrow P(B) + P(F) - P(B \cap F) &= \frac{11}{20} \\ \Leftrightarrow P(B \cap F) &= \frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \frac{11}{20} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow P(B \cap F) = \frac{1}{20}.$$

Como $P(B \cap F) > 0$ então há pelo menos um atleta que pratica as duas modalidades desportivas.

3.1. Vamos recorrer ao esquema seguinte e ao Princípio fundamental da contagem para resolver o problema

$$\frac{V}{5} \frac{A}{9} \frac{A}{8} \frac{A}{7}$$

Temos portanto $5 \times 9 \times 8 \times 7 = 2520$ códigos possíveis.

A opção correta é a **(D)**.

3.2. Uma vez que a escolha dos códigos é feita ao acaso, podemos recorrer à Lei de Laplace para calcular a probabilidade pedida.

Os casos possíveis são ${}^{14}A'_4 = 14^4$.

Relativamente aos casos favoráveis, notemos que para o produto dos três algarismos ser ímpar, o código tem obrigatoriamente que ter três algarismos ímpares. O esquema seguinte ilustra a situação.

$$\frac{I}{5} \frac{I}{4} \frac{I}{3} \frac{I}{2}$$

Como a vogal pode ocupar qualquer uma das quatro posições temos $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 5 \cdot 4 = 120$ casos favoráveis.

Pela Lei de Laplace podemos concluir que a probabilidade pedida é $\frac{120}{14^4} \approx 0.003$.

4.1. O ponto P é da forma $P(1, 3, z)$ com $z \in \mathbb{R}$.

Substituindo na equação da superfície esférica temos

$$\begin{aligned} (1-1)^2 + (3-2)^2 + (z+1)^2 &= 10 \\ \Leftrightarrow (z+1)^2 = 9 &\Leftrightarrow z = 2 \vee z = -4. \end{aligned}$$

Logo $P(1, 3, -4)$.

Sendo $\vec{r} = (4, 1, -2)$ um vetor diretor da reta r , a equação do plano é da forma $4x + y - 2z + d = 0$.

Substituindo as coordenadas de P vem

$$4 \times 1 + 3 - 2 \times (-4) + d = 0 \Leftrightarrow d = -15.$$

Podemos concluir que $4x + y - 2z - 15 = 0$ é uma equação do plano em causa.

4.2. Temos $C(1, 2, -1)$ e $A(1, 2, 1)$. Por outro lado, $A\hat{O}C = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC}$ e temos

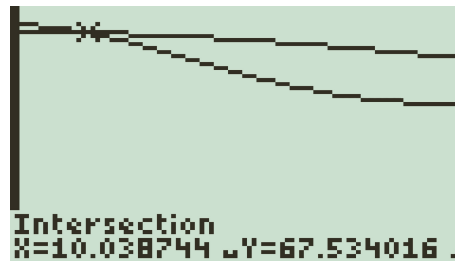
$$\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC}) &= \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OC}\|} \\ \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC}) &= \frac{(1, 2, -1) \cdot (1, 2, 1)}{\sqrt{1+4+1} \times \sqrt{1+4+1}} \\ \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC}) &= \frac{1+4-1}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} \\ \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC}) &= \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC} &\approx 48^\circ. \end{aligned}$$

5. O problema pode ser equacionado através da seguinte condição

$$d(3\alpha) = 0.97 \times d(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \frac{555}{10 - 2.06 \cos(3\alpha)} = 0.97 \times \frac{555}{10 - 2.06 \cos \alpha}.$$

Recorrendo à calculadora gráfica obtemos os gráficos de $y = \frac{555}{10 - 2.06 \cos(3x)}$ e $y = 0.97 \times \frac{555}{10 - 2.06 \cos x}$ e uma aproximação do seu ponto de interseção $P(10.04; 67.53)$.

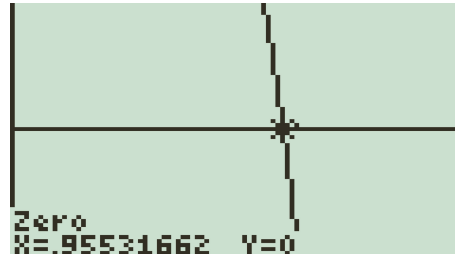


Logo, o valor do α pedido é aproximadamente 10° .

6. Como $f''(x) = 3 - \frac{1}{\cos^2 x}$ então a abcissa do ponto de inflexão é solução da equação

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - \frac{1}{\cos^2 x} = 0.$$

Recorrendo à calculadora gráfica obtemos o gráfico de $y = 3 - \frac{1}{\cos^2 x}$ e uma aproximação do seu zero em $]0, \frac{\pi}{2}[$.



Logo, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 0.96$ e podemos concluir que a opção correta é a **(D)**.

7. $u_3 = 4 \Leftrightarrow u_1 + 2r = 4 \Leftrightarrow u_1 = 4 - 2r$.

$$S_{12} = 174 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{12}}{2} \times 12 = 174$$

$$\Leftrightarrow u_1 + u_1 + 11r = 29$$

$$\Leftrightarrow 8 - 4r + 11r = 29$$

$$\Leftrightarrow r = 3.$$

Logo, $u_n = u_3 + (n - 3) \times 3 = 3n - 5$.

$u_n = 5371 \Leftrightarrow 3n = 5376 \Leftrightarrow n = 1792$.

Como $1792 \in \mathbb{N}$, podemos concluir que 5371 é termo da sucessão (u_n) .

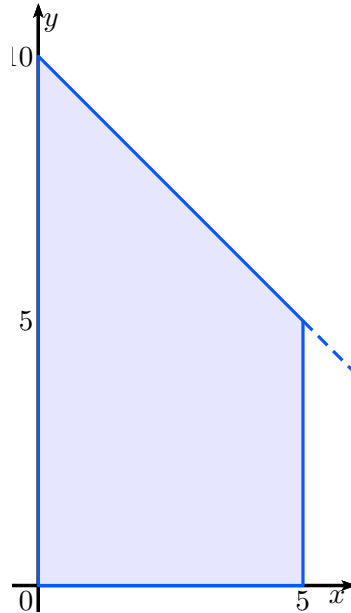
8. Como o pentágono $[ABCDE]$ é regular então os seus vértices são os afijos das raízes índice 5 de um determinado complexo. Seja w esse complexo. Sabemos que qualquer uma das raízes índice 5 elevada a 5 é igual a w . Deste modo, com C é o afixo de $e^{i\pi}$ e

$$(e^{i\pi})^5 = e^{5i\pi} = -1,$$

podemos concluir que $w = z^5 = -1$.

A opção correta é a **(A)**.

9.1. Começemos por representar a região admissível num referencial cartesiano.



Vamos avaliar a função objetivo em cada um dos vértices do polígono:

- $L(5, 0) = 5 + 5 \times 0 = 5$;
- $L(5, 5) = 3 \times 5 + 5 \times 5 = 40$;
- $L(0, 10) = 3 \times 0 + 5 \times 10 = 50$.

Podemos concluir que o valor máximo é 50 e que a opção correta é a **(B)**.

9.2. Temos

$$\overline{F_1 F_2} = 12 \Leftrightarrow 2c = 12 \Leftrightarrow c = 6.$$

Por outro lado, como a soma das distâncias aos focos de uma elipse é sempre igual ao comprimento do eixo maior $2a$ então

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 20 \Leftrightarrow 2a = 20 \Leftrightarrow a = 10.$$

Deste modo,

$$b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow b^2 = 100 - 36 \Leftrightarrow b^2 = 64$$

e podemos concluir que a equação da elipse centrada na origem é

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

A opção correta é a **(B)**.

10.

$$\begin{aligned} z &= \frac{(2-i)^2 + 1 + i}{1-2i} + 3i^{15} \\ &= \frac{4 - 4i - 1 + 1 + i}{1-2i} + 3i^3 \end{aligned}$$

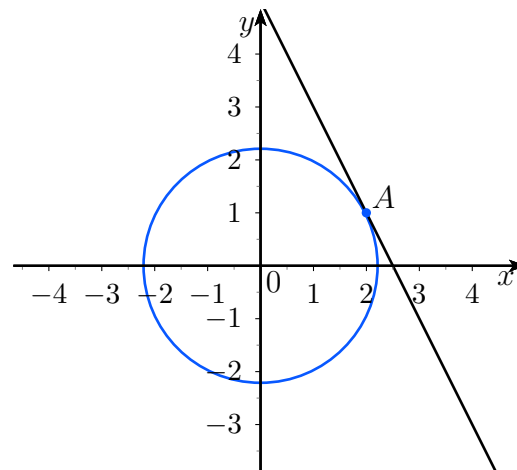
$$\begin{aligned}
&= \frac{4 - 3i}{1 - 2i} - 3i \\
&= \frac{(4 - 3i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} - 3i \\
&= \frac{10 + 5i}{5} - 3i = 2 - 2i.
\end{aligned}$$

Assim, $-\frac{1}{2}\bar{z} = -1 - i$.

Como $|-1 - i| = \sqrt{2}$ e $\text{Arg}(-1 - i) = -\frac{3\pi}{4}$ então

$$-\frac{1}{2}\bar{z} = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$

11. Começemos por representar num referencial ortonormado os elementos descritos.



$$\overrightarrow{OA} = (2, 1) \Rightarrow m_{OA} = \frac{1}{2}.$$

Logo, como a reta tangente no ponto A é perpendicular à reta OA , o seu declive é igual a -2 . Consequentemente, a sua equação reduzida é da forma $y = -2x + b$, onde $b \in \mathbb{R}$. Substituindo nesta equação as coordenadas de A temos

$$1 = -4 + b \Leftrightarrow b = 5$$

e podemos concluir que a equação reduzida da reta r é $y = -2x + 5$.

Temos portanto que a ordenada na origem da reta r é 5.

A opção correta é a **(B)**.

12.1. A resolução do sistema seguinte conduz-nos a conclusões relativamente à interseção dos três planos.

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} y = -x \\ y = z \\ 2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -x \\ 2x - 3x + x - 1 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -x \\ -1 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(D)**.

12.2.

$$\lim \left(\frac{n+5}{n+1} \right)^{\frac{n}{2}} = \lim \left(\frac{n \left(1 + \frac{5}{n}\right)}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \right)^{\frac{n}{2}} = \left[\frac{\lim \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n}{\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{e^5}{e} \right]^{\frac{1}{2}} = e^2.$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(D)**.

13. Começemos por determinar o domínio da condição:

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 > 0 \wedge 8 - x > 0\} =] - 1, 8[.$$

$$\begin{aligned} \log_2(x+1) &\leq 3 - \log_2(8-x) \\ \Leftrightarrow \log_2(x+1) + \log_2(8-x) &\leq \log_2 8 \\ \Leftrightarrow \log_2((x+1)(8-x)) &\leq \log_2 8 \\ \Leftrightarrow -x^2 + 7x &\leq 0 \wedge x \in D \end{aligned}$$

Para resolver uma inequação do 2.º grau $-x^2 + 7x \leq 0$ devemos:

(i) determinar os zeros da equação $ax^2 + bx + c = 0$ associada à inequação;

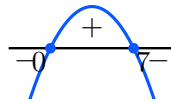
(ii) esboçar o gráfico da função definida por

$$y = ax^2 + bx + c;$$

(iii) escrever o conjunto solução.

$$\text{C.A. } -x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x = 7 \vee x = 0.$$

Esboço do gráfico da função definida por $y = -x^2 + 7x$:



Logo,

$$-x^2 + 7x \leq 0 \wedge x \in D \Leftrightarrow x \in] - 1, 0] \cup [7, 8[.$$

Podemos concluir que o conjunto solução é $S =] - 1, 0] \cup [7, 8[$.

14.1.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 + \frac{e^h}{1-h} - 4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1 + h}{h(1-h)} \\ &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{1-h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(1-h)} \\ &= 1 \times 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

14.2. Começemos por determinar as assíntotas do gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + \frac{e^x}{1-x} \right) = 3 + \frac{0}{1-(-\infty)} = 3.$$

Podemos concluir que a reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal do gráfico de f .

Determinemos agora as assíntotas do gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x^2) + 2}{x} \right) &\stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Podemos concluir que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f .

14.3. $(f \circ h^{-1})(2) = f(h^{-1}(2)).$

Como $h(x) = 2 \Leftrightarrow x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = 1$ então $h^{-1}(2) = 1$ e

$$f(h^{-1}(2)) = f(1) = \frac{\ln 1 + 2}{1} = 2.$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(C)**.

15. Sabemos que o declive da reta tangente ao gráfico de uma função num ponto é igual ao valor da sua derivada nesse ponto. Para encontrar o declive da reta r vamos determinar o máximo absoluto de g' estudando a monotonia de g' .

$$g'(x) = 2 \cos x + 2 \sin x \cos x = 2 \cos x + \sin(2x).$$

$$g''(x) = -2 \sin x + 2 \cos(2x).$$

$$\begin{aligned} g''(x) = 0 &\Leftrightarrow \sin x = \cos(2x) \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(2x) \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x = 2x + 2k\pi \vee \frac{\pi}{2} - x = -2x + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Para encontrar as soluções desta equação no conjunto $[0, \pi]$ vamos atribuir valores inteiros a k .

Começemos com $x = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}k\pi$.

- $k = -2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi = \frac{3}{2}\pi \notin [0, \pi];$
- $k = -1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi \in [0, \pi];$
- $k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \in [0, \pi];$
- $k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{3\pi}{6} \notin [0, \pi].$

Relativamente a $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ temos:

- $k = -1 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}\pi \notin [0, \pi];$
- $k = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} \notin [0, \pi];$
- $k = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}\pi \notin [0, \pi].$

Podemos concluir que

$$g''(x) = 0 \wedge x \in [0, \pi] \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Estudemos agora a monotonia e os extremos de g' numa tabela.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$g''(x)$		+	0	-	0	+	
g'		\nearrow		\searrow		\nearrow	

$$g' \left(\frac{\pi}{6} \right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2};$$

$$g'(\pi) = 2 \cos \pi + \sin(2\pi) = -2.$$

Podemos assim concluir que o máximo absoluto de g' no intervalo $[0, \pi]$ é $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, sendo este o declive da reta r .

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α - amplitude em radianos, do ângulo ao centro ; r - raio)

Área de um polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude em radianos, do ângulo ao centro ; r - raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ r - raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r - raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r - raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
 $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Complexos

$(\rho \text{cis } \theta)^n = \rho^n \text{cis } (n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \text{cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{cis } \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$
 e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$

$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se X é $N(\mu, \sigma)$ então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$