

## Proposta de resolução

### Caderno 1

**1.1.** Começemos por notar a existência de independência entre as dez experiências de lançamento do dado. Deste modo, como a probabilidade de obter o número 3 é igual a  $\frac{1}{4}$ , a variável aleatória

$X$ : "n.º de vezes que se obtém o número 3 em 10 lançamentos do dado tetraédrico"

é tal que  $X \sim B(10, \frac{1}{4})$  (distribuição Binomial com dez experiências e probabilidade de sucesso igual a  $\frac{1}{4}$ ). Logo,  $P(X = 6) = {}^{10}C_6 \times (\frac{1}{4})^6 \times (\frac{3}{4})^4 \approx 0.016$ .

A opção correta é a **(B)**.

**1.2.** Uma vez que  $f$  é diferenciável em  $[0, 2]$  então, pelo teorema da derivabilidade e continuidade, também é contínua em  $[0, 2]$ . Assim, pelo Teorema de Lagrange

$$\exists c \in ]0, 2[ : f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}.$$

Como  $f(0) = 1$  então

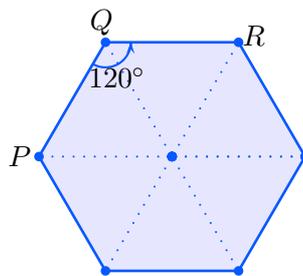
$$\exists c \in ]0, 2[ : f'(c) = \frac{f(2) - 1}{2}.$$

Por outro lado, como  $0 < f'(x) < 9$  então

$$0 < f'(c) < 9 \Leftrightarrow 0 < \frac{f(2) - 1}{2} < 9 \Leftrightarrow 1 < f(2) < 19.$$

A opção correta é a **(B)**.

**2.1.** Podemos observar na figura seguinte que  $\widehat{PQR} = 120^\circ$ .



Pela definição de produto escalar temos

$$\begin{aligned} \vec{QP} \cdot \vec{QR} &= \|\vec{QP}\| \times \|\vec{QR}\| \times \cos(120^\circ) \\ &= 4 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -8. \end{aligned}$$

**2.2.** Vamos começar por determinar as coordenadas do ponto  $P$ , ponto de interseção da reta  $PS$  com o plano  $PQR$ .

Para isso, começemos por notar que, como  $\vec{n} = (2, 3, -1)$  é um vetor normal ao plano  $PQR$ , então  $(x, y, z) = (14, 5, 0) + k(2, 3, -1)$ ,  $k \in \mathbb{R}$  é uma equação vetorial da reta  $PS$ .

Temos portanto:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z - 15 = 0 \\ (x, y, z) = (14, 5, 0) + k(2, 3, -1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(14 + 2k) + 3(5 + 3k) - (-k) - 15 = 0 \\ (x, y, z) = (14 + 2k, 5 + 3k, -k) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ (x, y, z) = (14 + 2k, 5 + 3k, -k) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ (x, y, z) = (10, -1, 2). \end{cases}$$

Podemos concluir que  $P(10, -1, 2)$ .

$$\begin{aligned} \overline{PS} &= \sqrt{(10 - 14)^2 + (-1 - 5)^2 + (2 - 0)^2} \\ &= \sqrt{56}. \end{aligned}$$

Deste modo, a área lateral (6 faces laterais) arredondada às décimas é

$$6 \times \overline{PQ} \times \overline{PS} = 6 \times 4 \times \sqrt{56} \approx 179.6.$$

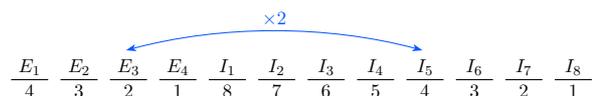
**2.3.** Como os vértices são escolhidos ao acaso, podemos utilizar a Lei de Laplace para resolver o problema.

Os casos possíveis são  ${}^6C_2 \times {}^6C_2$  uma vez que para cada uma das  ${}^6C_2$  possíveis escolhas de dois vértices de uma das faces podemos escolher dois vértices da outra face de  ${}^6C_2$  modos.

Os casos favoráveis são 6 uma vez que há seis faces laterais.

Pela Lei de Laplace, a probabilidade pedida é  $\frac{6}{{}^6C_2 \times {}^6C_2} \approx 0.03$ .

**3.1.** Começemos por ilustrar a situação com um esquema.



Note que no esquema  $E_i$  designa o estudante de Espanhol  $i$  para  $i = 1, 2, 3, 4$  e  $I_j$  designa o estudante de Inglês  $j$  para  $j = 1, \dots, 8$ .

Podemos concluir pelo Princípio fundamental da contagem que há  $4! \times 8! \times 2 = 1935360$  maneiras de fazer o pretendido.

A opção correta é a **(D)**.

**3.2.** Consideremos a experiência aleatória de escolha de um aluno da escola ao acaso e os acontecimentos:

$E$ : “estudar Espanhol”;

$I$ : “estudar Inglês”.

De acordo com os dados temos:

$$P(E) = P(I); P(E \cup I) = 4P(E \cap I).$$

Deste modo, a probabilidade pedida é:

$$P(I|E) = \frac{P(I \cap E)}{P(E)}.$$

Notemos agora que, como a escola não se dedica só ao ensino do Espanhol e do Inglês,  $P(E) = P(I)$  não implica necessariamente que  $P(E) = 0.5 \wedge P(I) = 0.5$ .

$$\begin{aligned} P(E \cup I) &= 4P(E \cap I) \\ \Leftrightarrow P(E) + P(I) - P(E \cap I) &= 4P(E \cap I) \\ \Leftrightarrow 2P(E) &= 5P(E \cap I) \\ \Leftrightarrow P(E \cap I) &= \frac{2}{5}P(E). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$P(I|E) = \frac{\frac{2}{5}P(E)}{P(E)} = 0.4$$

e podemos concluir que a probabilidade pedida é 40%.

4. Os dados do enunciado indicam que  $R = \lambda$  e  $L = \frac{I}{2}$ . Substituindo na equação dada e simplificando obtemos:

$$\begin{aligned} L &= I(1 - R)^6 e^{-3\lambda} \\ \Leftrightarrow \frac{I}{2} &= I(1 - \lambda)^6 e^{-3\lambda} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= (1 - \lambda)^6 e^{-3\lambda}. \end{aligned}$$

Introduzindo na calculadora gráfica as funções  $y = \frac{1}{2}$  e  $y = (1 - x)^6 e^{-3x}$  e recorrendo às suas potencialidades obtemos os gráficos seguintes e o seu ponto de interseção.



Logo,  $R = \lambda \approx 0.075$ .

5. Notemos que, como

$$|\cos x + i \sin x| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1,$$

então

$$\begin{aligned} (\cos x + i \sin x)^{10} &= (e^{ix})^{10} \\ &= e^{10ix} = \cos(10x) + i \sin(10x). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(z) &= \frac{1}{3} \operatorname{Re}(z) \Leftrightarrow \sin(10x) = \frac{1}{3} \cos(10x) \\ \Leftrightarrow \tan(10x) &= \frac{1}{3} \wedge \cos(10x) \neq 0. \end{aligned}$$

Logo, como  $x \in ]0, \frac{\pi}{12}[$ ,  $10x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x \approx 0.03$ .

A opção correta é a **(B)**.

6. Como  $a$ ,  $a + 6$  e  $a + 18$  são três termos consecutivos de uma progressão geométrica então

$$\frac{a+6}{a} = \frac{a+18}{a+6} \Leftrightarrow \frac{(a+6)^2 - (a+18)a}{a(a+6)} = 0$$

$$\Leftrightarrow -6a = -36 \wedge a(a+6) \neq 0 \Leftrightarrow a = 6.$$

Logo a razão da progressão geométrica é  $\frac{6+6}{6} = 2$ .

Por outro lado,

$$S_7 = 381 \Leftrightarrow a_1 \times \frac{1-2^7}{1-2} = 381 \Leftrightarrow a_1 = 3.$$

Temos portanto que o primeiro termo é 3.

7. Uma vez que a região consiste na parte de um círculo centrado na origem de raio 2, os seus pontos  $(x, y)$  terão que satisfazer a condição

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4.$$

Como se encontra à esquerda ou na reta de equação  $x = -1$  ou à direita ou na reta de equação  $x = 1$  então terá também que se verificar a condição

$$x \leq -1 \vee x \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1.$$

Podemos concluir que, como se verificam cumulativamente as duas condições, a opção correta é a **(C)**.

## Caderno 2

8.1. Como

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} \wedge z = 3 \Leftrightarrow \frac{x-(-1)}{2} = \frac{y-2}{-1} \wedge z = 3$$

então podemos concluir que  $A(-1, 2, 3)$  é um ponto de  $r$  e que  $\vec{r} = (2, -1, 0)$  é um dos seus vetores diretores.

Nesta fase, como as opções **(A)** e **(D)** apresentam  $\vec{r}$  como vetor diretor então estamos inclinados para estas opções.

Relativamente à opção **(A)**, averiguemos se  $(3, 0, 3)$  é ponto de  $r$ .

Substituindo as suas coordenadas na equação da reta  $r$  dada temos

$$\frac{3+1}{2} = \frac{0-2}{-1} \wedge 3 = 3 \Leftrightarrow 2 = 2 \wedge 3 = 3.$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

8.2.  $\arcsin(1) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$ .

A opção correta é a **(A)**.

9. Vamos começar por simplificar  $w$ .

$$w = 1 + \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}i^5}{1+2i}$$

$$= 1 + \frac{(2\sqrt{3} - \sqrt{3}i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$

$$= 1 + \frac{2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}i - \sqrt{3}i - 2\sqrt{3}}{5} = 1 - \sqrt{3}i.$$

Vamos agora escrever  $w$  na forma trigonométrica.

Como  $|1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2$  e  $\text{Arg}(w) = -\frac{\pi}{3}$  então  $w = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ .

Por outro lado, sabemos que os argumentos das raízes quartas de um complexo estão em progressão aritmética de razão  $\frac{\pi}{2}$ . Consequentemente, a raiz quarta pretendida é  $2e^{-i(\frac{\pi}{3})} \times e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ .

**10.1.** Começemos por ilustrar a experiência numa tabela.

$\times$	0	1	2	3
0	$\emptyset$	0	0	0
1	0	$\cancel{1}$	2	3
2	0	2	$\cancel{4}$	6
3	0	3	6	$\cancel{9}$

Podemos observar que  $P(X = 0) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$  e concluir que a opção correta é a **(D)**.

**10.2.**  $\lim \left(\frac{n+k}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$ .

Substituindo  $e^k$  na equação dada temos

$$\ln\left(\frac{e^k}{e}\right) = 3 \Leftrightarrow \ln e^{k-1} = 3 \Leftrightarrow k-1 = 3 \Leftrightarrow k = 4.$$

A opção correta é a **(D)**.

**11.** Começemos por notar que  $\ln b = 4 \ln a \Leftrightarrow \frac{\ln b}{\ln a} = 4$ .

$$\begin{aligned} a^x &\geq b^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \ln a^x \geq \ln b^{\frac{1}{x}} \\ \Leftrightarrow x \ln a &\geq \frac{1}{x} \ln b \\ \Leftrightarrow x &\geq \frac{1 \ln b}{x \ln a} \\ \Leftrightarrow x &\geq \frac{1}{x} \times 4 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x} &\geq 0. \end{aligned}$$

Para estudar o sinal da expressão  $\frac{x^2-4}{x}$  vamos recorrer a uma tabela onde se estuda separadamente o sinal do seu numerador e denominador. Para isso, notemos que

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2.$$

$x$	$-\infty$	$-2$		$0$	$2$		$+\infty$
$x^2 - 4$	+	0	-	-	0	+	+
$x$	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{x^2-4}{x}$	-	0	+	ND	-	0	+



Podemos concluir que

$$\frac{x^2 - 4}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, 0] \cup [2, +\infty[.$$

**12.1.**

$$g(x) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left( \frac{e^{2x} - 1}{4x} = 0 \wedge x < 0 \right) \vee \left( \frac{1}{2 - \sin(2x)} = 0 \wedge 0 \leq x \leq \pi \right) \\
&\Leftrightarrow (e^{2x} - 1 = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x < 0) \vee x \in \emptyset \\
&\Leftrightarrow e^{2x} = 1 \wedge x \neq 0 \wedge x < 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x < 0 \\
&\Leftrightarrow x \in \emptyset.
\end{aligned}$$

Podemos concluir que a função  $g$  não tem zeros e que a opção correta é a **(A)**.

### 12.2.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{4x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2 - \sin(2x)} = \frac{1}{2} = g(0).$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$$

então  $g$  é contínua em  $x = 0$ .

### 12.3.

$$g'(x) = \frac{-1 \times (-2 \cos(2x))}{(2 - \sin(2x))^2} = \frac{2 \cos(2x)}{(2 - \sin(2x))^2}.$$

$$\begin{aligned}
g'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2 \cos(2x) = 0 \wedge (2 - \sin(2x))^2 \neq 0 \\
&\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \wedge \sin(2x) \neq 2 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Para encontrar as soluções desta equação no conjunto  $]0, \pi]$  vamos atribuir valores a  $k$ :

- $k = -1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} \notin ]0, \pi]$ ;
- $k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in ]0, \pi]$ ;
- $k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} \in ]0, \pi]$ ;
- $k = 2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{2} = \frac{5\pi}{4} \notin ]0, \pi]$ .

Podemos concluir que

$$g'(x) = 0 \wedge x \in ]0, \pi[ \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de  $g'$  e da monotonia de  $g$  em  $]0, \pi]$ .

$x$	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\pi$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g$		$\nearrow$	$M$	$\searrow$	$m$	$\nearrow$	

Logo,  $g$  é crescente em  $]0, \frac{\pi}{4}]$  e em  $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$  e decrescente em  $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ . Temos também que  $g(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2 - \sin \frac{2\pi}{4}} = \frac{1}{1} = 1$  e  $g(\pi) = \frac{1}{2 - \sin(2\pi)} = \frac{1}{2}$  são máximos relativos e  $g(\frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{2 - \sin \frac{6\pi}{4}} = \frac{1}{3}$  é mínimo relativo.

13.

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{x}{\sin x} = \frac{\pi}{0^+} = +\infty.$$

Podemos concluir que a reta de equação  $x = \pi$  é assíntota do gráfico de  $f$  e que a opção correta é a **(B)**.

14. De acordo com o enunciado temos

$$P(a, h(a)) = \left(a, \frac{\ln a}{a}\right); \quad Q(a, h(2a)) = \left(2a, \frac{\ln(2a)}{2a}\right).$$

O declive da reta  $PQ$  é

$$m_{PQ} = \frac{\frac{\ln(2a)}{2a} - \frac{\ln a}{a}}{2a - a} = \frac{\ln(2a) - 2 \ln a}{2a^2}.$$

Seja  $f(a) = \frac{\ln(2a) - 2 \ln a}{2a^2}$ .

Para o triângulo da figura ser isósceles, o declive da reta  $PQ$  tem que ser igual a 1, ou seja  $f(a) = 1$ .

Como

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln 1 - 2 \ln \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 \ln 4 > 2 \ln e = 2 > 1;$$

$$f(1) = \frac{\ln 2 - 2 \ln 1}{2} = \frac{\ln 2}{2} < \frac{\ln e^2}{2} = 1$$

então  $f(1) < 1 < f\left(\frac{1}{2}\right)$ . Como  $f$  é contínua em  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , por ser a diferença, divisão e composição de funções contínuas, então o Teorema de Bolzano garante que a equação  $f(a) = 1$  tem pelo menos uma solução no intervalo  $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ .

## Formulário

### Geometria

**Comprimento de um arco de circunferência:**

$\alpha r$  ( $\alpha$  amplitude em radianos, do ângulo ao centro ;  $r$  - raio)

**Área de um polígono regular:**  $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

**Área de um sector circular:**

$\frac{\alpha r^2}{2}$  ( $\alpha$  amplitude em radianos, do ângulo ao centro ;  $r$  - raio)

**Área lateral de um cone:**  $\pi r g$   $r$  - raio da base;  $g$  - geratriz)

**Área de uma superfície esférica:**  $4\pi r^2$  ( $r$  - raio)

**Volume de uma pirâmide:**  $\frac{1}{3} \times \text{Áreadabase} \times \text{Altura}$

**Volume de um cone:**  $\frac{1}{3} \times \text{Áreadabase} \times \text{Altura}$

**Volume de uma esfera:**  $\frac{4}{3}\pi r^3$  ( $r$  - raio)

### Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão ( $u_n$ ):

**Progressão aritmética:**  $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:**  $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

### Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

### Complexos

$(\rho \text{cis} \theta)^n = \rho^n \text{cis}(n\theta)$  ou  $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \text{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{cis} \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$  ou  $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}}$  ( $k \in \{0, \dots, n-1\}$ )

e  $n \in \mathbb{N}$ )

### Probabilidades

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$

$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se  $X$  é  $N(\mu, \sigma)$  então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$$

### Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

### Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$