Proposta de resolução

GRUPO I

1. Vamos recorrer ao esquema seguinte e ao Princípio fundamental da contagem para resolver o problema

$$\underline{}\,\underline{}\,\underline{}\,\underline{5} \qquad 9 \quad 9 \quad 9 \quad 1$$

Como cada algarismo pode ser $1, 2, \ldots, 9$ e o último tem que ser o 5 então existem $9 \times 9 \times 9 \times 1 = 729$ números.
A opção correta é a **(A)**.

2. Consideremos os acontecimentos H: "ser homem"e V: "ter os olhos verdes".
De acordo com os dados do enunciado, $P(V|H) = \frac{1}{4}$ e $P(H \cap V) = \frac{1}{10}$.
Assim temos
$P(V|H) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{P(V \cap H)}{P(H)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{10}}{P(H)} = \frac{1}{4}$
$\Leftrightarrow P(H) = \frac{4}{10} \Leftrightarrow \frac{\#H}{20} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \#H = 8.$
Podemos concluir que a opção correta é a **(B)**.

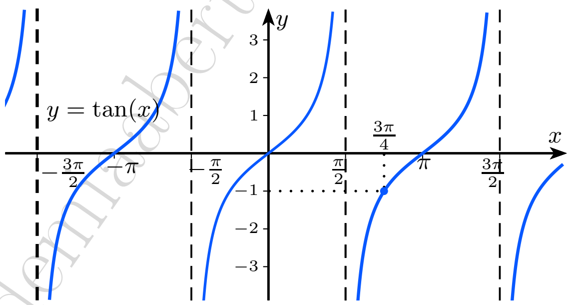
3. Como a concavidade do gráfico de f é voltada para cima em $[0, +\infty[$ então $f''(1) > 0$ e $f''(2) > 0$. Consequentemente, $f''(1) \times f''(2) > 0$.
A opção correta é a **(D)**.

4. Do facto de $y = -x$ ser assíntota oblíqua do gráfico de f podemos deduzir que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ e que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. Assim temos:

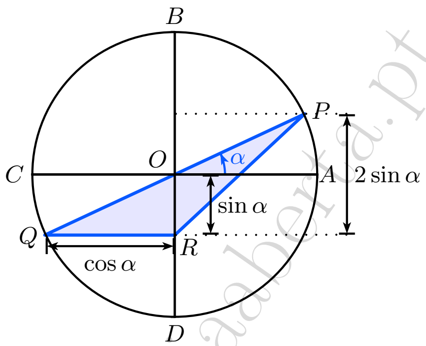
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) \times g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \times \lim_{x \to +\infty} g(x) = -1 \times (-\infty) = -\infty.$$

A opção correta é a **(A)**.

5. Na figura em baixo está representado parte do gráfico da função tangente.



Podemos observar na figura que para $x \in \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$ temos $f(x) \in]-1, +\infty[$
A opção correta é a **(B)**.

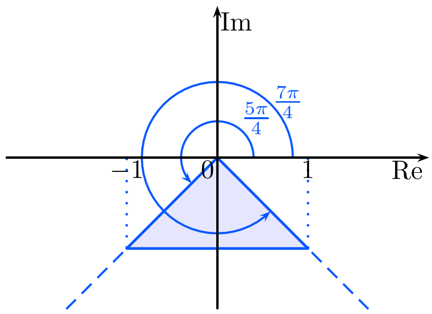


6.

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow tg^2\alpha = \frac{1}{\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} - 1$$
$$\Leftrightarrow \tan^2\alpha = 4 \Leftrightarrow \tan\alpha = \pm 2.$$

Como o declive da reta r é igual a $\tan\alpha$ então, apenas a alternativa **(C)** pode ser válida.

7. A figura em baixo representa a região.



Como a área do triângulo é $\frac{2 \times 1}{2} = 1$, a opção correta é a **(D)**

8. Como para $n \leq 20$ temos $1 \leq u_n \leq 20$ e para $n > 20$ temos $-1 \leq u_n \leq 1$ então $-1 \leq u_n \leq 20$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
A opção correta é a **(C)**.

GRUPO II

1.1 A distância entre as imagens geométricas de z_1 e z_2 ser $\sqrt{5}$ pode ser equacionada por $|z_1 - z_2| = \sqrt{5}$.
Para prosseguir, devemos escrever z_1 e z_2 na forma algébrica.

$$z_1 = \frac{1 - 3i^{19}}{1 + i} = \frac{1 - 3i^{19-16}}{1 + i} = \frac{1 - 3i^3}{1 + i}$$
$$= \frac{1 - 3 \times (-i)}{1 + i} = \frac{1 + 3i}{1 + i} = \frac{(1 + 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)}$$
$$= \frac{1 - i + 3i - 3i^2}{1^2 + 1^2} = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i.$$

$z_2 = -3k \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2} = -3k \times (-i) = 3ki,\ k \in \mathbb{R}^+.$
Deste modo,

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |2 + i - 3ki| = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow |2+(1-3k)i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{2^2+(1-3k)^2} = \sqrt{5}$$
$$\Leftrightarrow 4+1-6k+9k^2 = 5 \Leftrightarrow 9k^2-6k=0$$
$$\Leftrightarrow k(9k-6)=0 \Leftrightarrow k=0 \vee k=\frac{6}{9}$$
$$\Leftrightarrow k=0 \vee k=\frac{2}{3}.$$

Como $k \in \mathbb{R}^+$ então $k=\frac{2}{3}$.

2.1 Como $T \in Oz$ então $T(0,0,3)$. A superfície esférica pretendida tem centro no ponto $(0,0,0)$. Assim, a sua equação é $x^2+y^2+z^2=3^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=9$.

2.2 Temos $\overrightarrow{UP}=\overrightarrow{TO}=O-T=(-3,0,0)$ e $\overrightarrow{RS}=-\overrightarrow{TO}=(3,0,0)$. Assim, $\overrightarrow{UP}\cdot\overrightarrow{RS}=(-3,0,0)\cdot(3,0,0)=-9+0+0=-9$.

2.3 Comecemos por notar que Q é o ponto de interseção de PQV com Oy.

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x=0 \wedge z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=0 \wedge z=0 \end{cases}$$

Logo, $Q(0,2,0)$.
Por outro lado, $\overrightarrow{TQ}=Q-T=(0,2,0)-(0,0,3)=(0,2,-3)$. Assim, as equações cartesianas da reta TQ são $x=0 \wedge \frac{y}{2}=\frac{z-3}{-3}$.

2.4 Para o plano ser perpendicular a xOy, tem obrigatoriamente que ser paralelo às arestas principais do prisma. Como cada ponto do prisma tem igual probabilidade de ser escolhido, podemos utilizar a Lei de Laplace para calcular a probabilidade pedida.
Relativamente aos casos favoráveis, conclui-se com base na observação do prisma que há 6 planos possíveis (4 contendo as faces e 2 contendo as diagonais espaciais).
Como cada um desses planos secciona o prisma segundo um retângulo, podemos obter cada plano de ${}^4C_3$ modos distintos. No total temos $6\times{}^4C_3$ casos favoráveis.
Os casos possíveis são ${}^8C_3$, correspondentes a escolher 3 dos 8 vértices do prisma.
A probabilidade pedida é portanto $\frac{6\,{}^4C_3}{{}^8C_3}=\frac{3}{7}$.

3. $P\left(\overline{A}\cup B\right)$ representa a probabilidade de o número da bola retirada ser superior a 6 ou ser par. Como há três números pares menores ou iguais a 6 (2, 4 e 6) então

$$P\left(\overline{A}\cup B\right)=\frac{n-6+3}{n}=\frac{n-3}{n}.$$

4.1 $\sqrt{(f(0))^2+x^2}=2 \Leftrightarrow \sqrt{\left(9-2.5\left(e+e^{-1}\right)\right)^2+x^2}=2$.
Como $\left(9-2.5\left(e+e^{-1}\right)\right)^2+x^2\geq 0,\ \forall x\in[0,7]$ então

$$\sqrt{\left(9-2.5\left(e+e^{-1}\right)\right)^2+x^2}=2$$
$$\Leftrightarrow \left(9-2.5\left(e+e^{-1}\right)\right)^2+x^2=4$$
$$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{4-\left(9-2.5\left(e+e^{-1}\right)\right)^2}$$
$$\Leftrightarrow x\approx\pm1.5.$$

Sendo $P(0,f(0))$ e $S(x,0)$ temos

$$\overline{PS}=\sqrt{(x-0)^2+(f(0)-0)^2}=\sqrt{(f(0))^2+x^2}.$$

Logo, para $x\approx1.5$, a distância entre os pontos P e $S(1.5,0)$ é igual a $2\ m$.

4.2 Vamos determinar o máximo absoluto dde f.
Comecemos por determinar $f'(x)$ no intervalo $[0,7]$:

$$f'(x)=-2.5\left(-0.2e^{1-0.2x}+0.2e^{0.2x-1}\right).$$

Estudemos agora a existência de pontos críticos:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow -0.2e^{1-0.2x}+0.2e^{0.2x-1}=0\Leftrightarrow e^{1-0.2x}=e^{0.2x-1}$$
$$\Leftrightarrow 1-0.2x=0.2x-1\Leftrightarrow 0.4x=2\Leftrightarrow x=5.$$

Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de f' e da monotonia de f em $[0,7]$.

x	0		5		7
$f'(x)$		+	0	−	
f		$\nearrow$	max	$\searrow$	0

Podemos concluir que

$$f(5)=9-2.5\left(-0.2e^{1-0.2\times5}+0.2e^{0.2\times5-1}\right)=9-2.5\times2=4$$

é o máximo absoluto. Deste modo, não é possível o barco passar por baixo da ponte.

5.1

$$\lim_{x\to1^-}g(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{1-x^2}{1-e^{x-1}}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{e^{x-1}-1}$$
$$=\lim_{x\to1^-}\frac{x-1}{e^{x-1}-1}\times\lim_{x\to1^-}(x+1)=\frac{\lim\limits_{y\to0^-}1}{\lim\limits_{y\to0^-}\frac{e^y-1}{y}}\times2$$
$$\overset{(1)}{=}1\times2=2.$$

$$\lim_{x\to1^+}g(x)=\lim_{x\to1^+}\left(3+\frac{\sin(x-1)}{1-x}\right)$$
$$=3-\lim_{x-1\to0^+}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\overset{(2)}{=}3-1=2.$$

(1) Limite notável: $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

(2) Limite notável: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.
Como $\lim\limits_{x\to1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}g(x)=g(1)$ então g é contínua no ponto 1.

5.2 Para $x\in]4,5[$ temos

$$g(x)=3\Leftrightarrow 3+\frac{\sin(x+1)}{1-x}=3\Leftrightarrow\sin(x-1)=0\wedge1-x\neq0$$
$$x-1=0+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\wedge x\neq1\Leftrightarrow x=1+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Vamos agora atribuir valores inteiros a k na expressão $x=1+k\pi$ de modo a obter as soluções no intervalo $]4,5[$:

- $k=0\Rightarrow x=1\notin]4,5[$;
- $k=1\Rightarrow x=1+\pi\in]4,5[$;
- $k=1\Rightarrow x=1+2\pi\notin]4,5[$.

Podemos concluir que o conjunto solução é $S = \{1 + \pi\}$.

5.3. Como a abcissa de A é negativa, vamos recorrer a $g(x)$ para $x < 1$:

$$\begin{aligned} &\frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \wedge 1 - e^{x-1} \neq 0 \\ \Leftrightarrow\ &(x = 1 \vee x = -1) \wedge e^{x-1} \neq 0 \\ \Leftrightarrow\ &(x = 1 \vee x = -1) \wedge x - 1 \neq 0 \\ \Leftrightarrow\ &x = -1. \end{aligned}$$

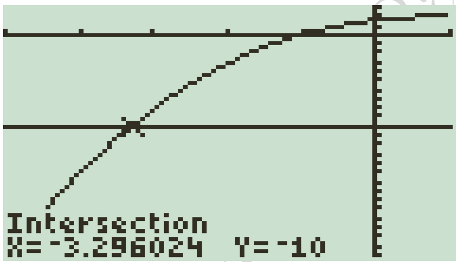
5.3 A abcissa de A é um zero de g. Como é negativa, vamos recorrer a $g(x)$ para $x < 1$:

$$\begin{aligned} &g(x) = 0 \wedge x < 1 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = 0 \wedge x < 1 \\ \Leftrightarrow\ &1 - x^2 = 0 \wedge 1 - e^{x-1} \neq 0 \wedge x < 1 \\ \Leftrightarrow\ &(x = 1 \vee x = -1) \wedge x - 1 \neq 0 \wedge x < 1 \\ \Leftrightarrow\ &x = -1. \end{aligned}$$

Sendo y_P a ordenada de P, a área do triângulo $[OAP]$ ser 5 traduz-se na equação:

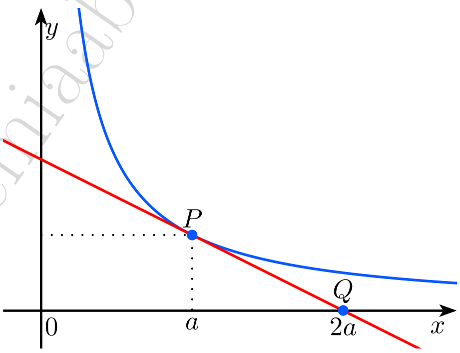
$$\frac{\overline{OA} \times |y_P|}{2} = 5 \Leftrightarrow \frac{1 \times |y_P|}{2} = 5 \Leftrightarrow |y_P| = 10.$$

Para determinar x_P, a abcissa de P, devemos resolver a equação $g(x) = -10$ para $x < 1$.
Recorrendo à calculadora gráfica obtemos parte dos gráficos de $y = -10$ e $y = g(x)$ e uma aproximação do seu ponto de interseção $P(-3.3; -10)$.



Logo, a abcissa de P é aproximadamente -3.3.

6. Comecemos por notar que como $f'(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ então f é decrescente em $\mathbb{R}^+$. A título meramente ilustrativo, consideremos o gráfico da seguinte figura.



A hipótese de $\overline{OP} = \overline{PQ}$ traduz-se no facto de o triângulo $[OPQ]$ ser isósceles. Consequentemente, a abcissa de Q é o dobro da de P. O declive da reta PQ é portanto $m = \frac{0 - f(a)}{2a - a} = -\frac{f(a)}{a}$. Logo, $f'(a) = -\frac{f(a)}{a}$ e

$$f'(a) + \frac{f(a)}{a} = -\frac{f(a)}{a} + \frac{f(a)}{a} = 0.$$