Proposta de resolução

GRUPO I

1. Note-se que $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Como

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0.6 \Leftrightarrow P\left(\overline{A \cup B}\right) = 0.6$$
$$\Leftrightarrow 1 - P\left(A \cup B\right) = 0.6 \Leftrightarrow P\left(A \cup B\right) = 0.4$$
$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4$$
$$\Leftrightarrow 0.2 + 0.3 - P(A \cap B) = 0.4 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0.1$$

então

$$P(A|B) = \frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3}.$$

A opção correta é a **(A)**.

2. Consideremos a variável aleatória X : "número de cestos concretizados em 5 lançamentos".
Como a probabilidade de encestar num lançamento é 0.4 e os lançamentos são independentes então $X \sim B(5, 0.4)$ (X segue uma distribuição Binomial com parâmetros 5, que representa o número de experiências, e 0.4) e temos

$$P(X = x) = {}^5C_x \times 0.4^x \times 0.6^{5-x}$$

para $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
Logo,

$$P(X = 4) = {}^5C_4 \times 0.4^4 \times 0.6^{5-4} = 0.0768$$

e podemos concluir que a opção correta é a **(C)**.

3. Como pelas propriedades dos logaritmos temos

$$\log_a\left(ab^3\right) = 5 \Leftrightarrow \log_a a + \log_a b^3 = 5$$
$$\Leftrightarrow 1 + 3\log_a b = 5 \Leftrightarrow \log_a b = \frac{4}{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_b a} = \frac{4}{3}$$
$$\Leftrightarrow \log_b a = \frac{3}{4}$$

então a opção correta é a **(B)**.

4. Com base no limite notável $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ temos $\lim \dfrac{e^n}{n} = +\infty$.
Logo,

$$\lim\left(u_n\right) = \lim \frac{n}{e^n} = \lim \frac{1}{\frac{e^n}{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

e temos

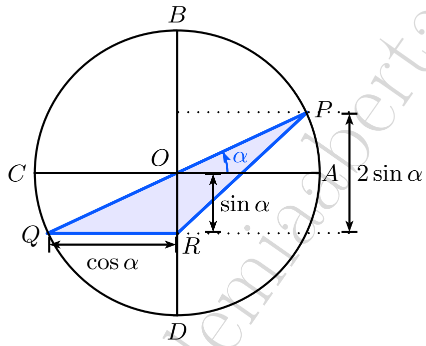
$$\lim f\left(u_n\right) = \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$

A opção correta é a **(A)**.

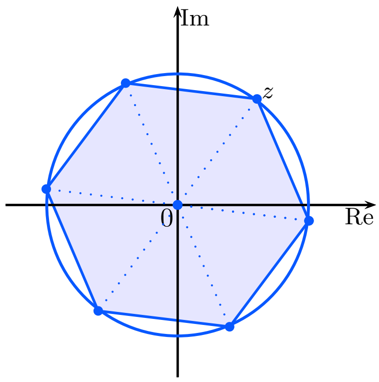
5. Comecemos por notar que $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $Q(\cos(\alpha+\pi), \sin(\alpha+\pi)) = (-\cos\alpha, -\sin\alpha)$ e $R(0, -\sin\alpha)$.
Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ então $\cos\alpha > 0$ e $\sin\alpha > 0$ e temos

$$A_{[PQR]} = \frac{-(-\cos\alpha) \times (\sin\alpha - (-\sin\alpha))}{2}$$
$$= \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2} = \frac{\sin(2\alpha)}{2}$$

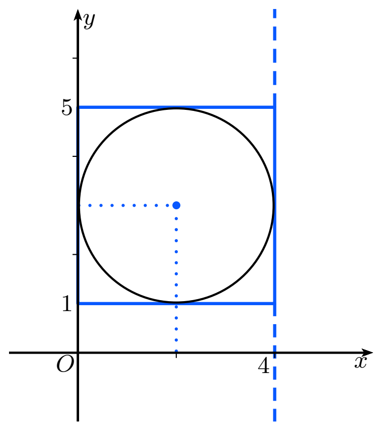
e podemos concluir que a opção correta é a **(D)**.



6. Os afixos das raízes índice 6 são os vértices de um hexágono centrado no plano de Argand.
Como $|3+4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ então o hexágono apresenta o aspeto da figura ao lado.
Como um hexágono é constituído por 6 triângulos equiláteros, estamos perante um hexágono com 5 unidades de lado.
Consequentemente o seu perímetro é $5 \times 6 = 30$ e a opção correta é a **(C)**.



7. A figura em baixo ilustra a situação.
Temos portanto uma circunferência de centro $(2, 3)$ e raio 2 definida pela equação $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$.
A opção correta é a **(C)**.



8. Numa progressão geométrica (u_n) de razão r temos é temos $u_n = u_k \times r^{n-k}$.
Logo,

$$u_8 = u_4 \times r^{8-4} \Leftrightarrow r^4 = \frac{8192}{32} \Leftrightarrow r = \pm\sqrt[4]{256} \Leftrightarrow r = \pm 4$$

e podemos concluir que

$$u_n = u_4 \times 4^{n-4} = 32 \times 4^{n-4}$$

e que $u_5 = 32 \times 4^{5-4} = 128$.
A opção correta é a **(B)**.

GRUPO II

1.1 Neste contexto, $P(B|A)$ representa a probabilidade de o produto dos números das fichas retiradas ser ímpar sabendo que a soma dos números das fichas é ímpar.
A Lei de Laplace garante qua a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis quando os resultados das experiencias são finitos e há equiprobabilidade de acontecimentos singulares.
Como qualquer par de fichas tem a mesma probabilidade de ser extraída, podemos utilizar a Lei de Laplace. Como sabemos que a soma dos números das fichas é 10, o conjunto dos casos possíveis é $\Omega = \{(1,9),(2,8),(3,7),(4,6)\}$.
O conjunto dos casos favoráveis a o produto dos números das fichas retiradas ser ímpar é $\{(1,9),(3,7)\}$, uma vez que $1 \times 9 = 9$ e $3 \times 7 = 21$. Note-se que no par (u,v) temos $u \times v$ par quando u ou v são pares.
Por conseguinte, $P(B|A) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

1.2 As fichas com números pares são a 2, 4, 6 e 8.
A figura em baixo ilustra uma possibilidade em que estas 4 fichas ocupam a segunda fila horizontal.

	1	2	3	4
A			7	3
B	4	2	6	8
C	9			5
D		1		

Note-se que sendo as fichas todas distintas, a sua ordem de colocação interessa. Por outro lado, depois de colocar as fichas com número par numa das quatro linhas (A, B, C e D), as cinco fichas ímpares podem ocupar qualquer uma das $16 - 4 = 12$ posições do tabuleiro.
Temos portanto:

$4! \times {}^{12}A_5 \times 4 = 9123840$ modos de colocar as fichas.

- $4 \rightarrow$ Há 4 filas horizontais.
- ${}^{12}A_5 \rightarrow$ Há ${}^{12}A_5$ possibilidades de colocar as 5 fichas ímpares nos 12 lugares disponíveis
- $4! \rightarrow$ Há 4! possibilidades de colocar as 4 fichas pares numa fila

2. Comecemos por escrever $-1+i$ na forma trigonométrica $r\,\text{cis}\,\alpha$ onde:

- $r = |-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$;
- $tg\alpha = \frac{1}{-1} = -1$; Como o afixo de $-1+i$ pertence ao 2.º quadrante então $\alpha = \frac{-\pi}{4} + \pi = \frac{3}{4}\pi$.

Deste modo temos $-1+i = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{3}{4}\pi\right)$.
Vamos agora escrever z na forma trigonométrica:

$$z = \frac{-1+i}{(\rho\,\text{cis}\,\theta)^2} = \frac{\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{3}{4}\pi\right)}{\rho^2\,\text{cis}\,(2\theta)} = \frac{\sqrt{2}}{\rho^2}\,\text{cis}\left(\frac{3}{4}\pi - 2\theta\right).$$

Por outro lado, como $|-\sqrt{2}i| = \sqrt{2}$ e o afixo de $-\sqrt{2}i$ pertence à parte negativa do eixo imaginário temos $-\sqrt{2}i = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$. Vamos finalmente igualar os dois complexos na forma trigonométrica:
$z = w \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\rho^2} = \sqrt{2} \wedge \frac{3}{4}\pi - 2\theta = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\overset{\rho \geq 0}{\Rightarrow} \rho = 1 \wedge \theta = \frac{5}{8}\pi - k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vamos agora atribuir valores inteiros a k na expressão $\theta = \frac{5}{8}\pi - k\pi$ de modo a obter o valor do intervalo $]0,\pi[$:

- $k = -1 \Rightarrow \theta = \frac{5}{8}\pi + \pi = \frac{13}{8}\pi \notin]0,\pi[$;
- $k = 0 \Rightarrow \theta = \frac{5}{8}\pi \in]0,\pi[$;
- $k = 1 \Rightarrow \theta = \frac{5}{8}\pi - \pi = -\frac{3}{8}\pi \notin]0,\pi[$.

Podemos concluir que $\theta = \frac{5}{8}\pi$ e $\rho = 1$.

3.1 Um vetor normal do plano α é $\vec{n} = (3,2,4)$.
Consequentemente, $\vec{n}$ é um vetor diretor de qualquer reta perpendicular ao plano α.
Uma equação vetorial da reta pretendida é portanto

$$(x,y,z) = (2,1,4) + k(3,2,4), k \in \mathbb{R}.$$

3.2 Como $\overrightarrow{OD} = D - O = (4,2,2)$, uma equação vetorial da reta OD é

$$(x,y,z) = (0,0,0) + k(4,2,2), k \in \mathbb{R}.$$

Vamos agora resolver o sistema seguinte para obter o ponto de interseção da reta OD com o plano α:

$$\begin{cases} (x,y,z) = (0,0,0) + k(4,2,2) \\ 3x + 2y + 4z - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x,y,z) = (4k,2k,2k) \\ 3 \times 4k + 2 \times 2k + 4 \times 2k - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x,y,z) = (4k,2k,2k) \\ 24k = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y,z) = (2,1,1) \\ k = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Podemos concluir que o ponto de interseção da reta OD com o plano α é $(2,1,1)$.

3.3 Como $A(a,0,0)$ e $B(0,b,0)$ para $a>0$ e $b>0$ então temos:

- $3a+2\times 0+4\times 0-12=0 \Leftrightarrow a=4$;
- $3\times 0+2b+4\times 0-12=0 \Leftrightarrow b=6$.

Logo $A(4,0,0)$ e $B(0,6,0)$.
Seja $P(0,0,c)$ com $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Como $\overrightarrow{PA}=A-P=(4,0,0)-(0,0,c)=(4,0,-c)$ e $\overrightarrow{PB}=B-P=(0,6,0)-(0,0,c)=(0,6,-c)$ então

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=4\times 0+0\times 6-c\times(-c)=c^2.$$

Como $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ então $c^2>0$.
Como o produto escalar é positivo então o ângulo $A\widehat{P}B$ é agudo.

4.1 Como o domínio de f é $\left]-\frac{\pi}{2},+\infty\right[$ então só temos que estudar a existência de assíntota oblíqua quando $x\to+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\ln x}{x}$
  $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=1-0=1$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-\ln x)=-\infty$.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ não é um número real podemos concluir que o gráfico de f não admite assíntotas oblíquas.

4.2 Comecemos por determinar $f'(x)$ no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$:

$$f'(x)=\left(\frac{2+\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cos x-(2+\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{\cos^2 x+2\sin x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1+2\sin x}{\cos^2 x}.$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 1+2\sin x=0\wedge\cos^2 x\neq 0$$
$$\Leftrightarrow \sin x=-\frac{1}{2}\wedge\cos x\neq 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\vee x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right)\wedge x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

Notemos que a restrição $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ não condiciona as soluções no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ pois

$$\cos x>0\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[\Rightarrow\cos^2 x>0\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[.$$

Para determinar as soluções da equação pertencentes ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ vamos atribuir valores inteiros de k em cada uma das famílias de soluções.
Para $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ temos

- para $k=-1$ temos $x=-\frac{\pi}{6}-2\pi=-\frac{13}{6}\pi<-\frac{\pi}{2}$;
- para $k=0$ temos $x=-\frac{\pi}{6}\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$;
- para $k=1$ temos $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{11}{6}\pi>0$;

Podemos concluir que $-\frac{\pi}{6}$ é a única solução desta família em $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$.
Para $\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ temos

- para $k=-1$ temos $x=\frac{7\pi}{6}-2\pi=-\frac{5\pi}{6}<-\frac{\pi}{2}$;
- para $k=0$ temos $x=\frac{7\pi}{6}>0$;

Podemos concluir que esta família de soluções não tem nenhuma solução em $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$.
Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de f' e da monotonia de f em $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		0
$1+2\sin x$		$-$	0	$+$	
$\cos^2 x$		$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	min	$\nearrow$	0

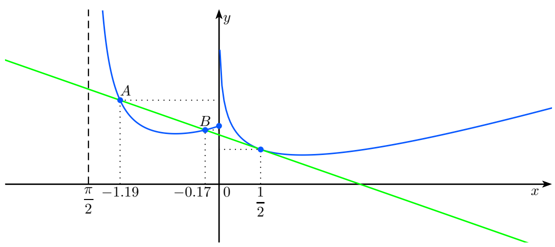
Podemos concluir que f é decrescente em $\left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right]$ e crescente em $\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$.
f tem um mínimo relativo em $x=-\frac{\pi}{6}$.

4.3 Como para $x>0$ temos $f'(x)=1-\frac{1}{x}$, a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$ tem declive igual a $f'(2)=1-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-1$.
Consequentemente a reta tangente é da forma $y=-x+b$ para $b\in\mathbb{R}$.
Uma vez que o ponto de tangência é $(2,f(2))=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\ln 2\right)$, substituindo na equação anterior vem

$$\frac{1}{2}+\ln 2=-\frac{1}{2}+b\Leftrightarrow b=1+\ln 2.$$

Podemos concluir que a equação reduzida da reta tangente é $y=-x+1+\ln 2$.

Na figura seguinte estão representados parte do gráfico de f, a reta de equação $y=-x+1+\ln 2$ e os pontos A e B.



Podemos concluir que as abcissas de A e B são respetivamente $x_A\approx -1.19$ e
$x_B\approx -0.17$.

5.1 A incógnita do problema é o n, $p=24$ e $x=0.003$.

$$24=\frac{600\times 0.003}{1-e^{-n\times 0.003}}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}1-e^{-0.003n}=\frac{1.8}{24}$$
$$\Leftrightarrow e^{-0.003n}=0.925\Leftrightarrow -0.003n=\ln 0.925$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\ln 0.925}{-0.003} \Leftrightarrow n \approx 26.$$

(1) Como $n > 0$ então $1 - e^{-n\times 0.003} \neq 0$.
Podemos concluir que o José vai pagar o empréstimo em 26 meses.

5.2

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \frac{600x}{1-e^{-nx}} \overset{(\frac{0}{0})}{=} -600 \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^{-nx}-1} \\ = &-600 \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{e^{-nx}-1}{-nx} \times (-n)} \\ \overset{(2)}{=} &-600 \times \frac{1}{-n} = \frac{600}{n}. \end{aligned}$$

(2) Limite notável: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Uma vez que o valor do empréstimo é 600 euros e n o número de meses em que o empréstimo será pago, podemos concluir que quando a taxa de juro mensal tende para 0 o valor da prestação mensal é igual a $\frac{600}{n}$. Corresponde pagar os 600 euros em n parcelas iguais a $\frac{600}{n}$.

6. Como $g(x) = x + 1 \Leftrightarrow g(x) - x - 1 = 0$ vamos considerar a função h definida por $h(x) = g(x) - x - 1$.
Neste caso, como $g(x) - x - 1 = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0$, basta-nos provar que a equação $h(x) = 0$ tem pelo menos uma solução em $]a, g(a)[$ Notemos agora que

- $h(a) = g(a) - a - 1 > 0$ pois $g(a) > a + 1 \Leftrightarrow g(a) - a - 1 > 0$;
- $h(g(a)) = g(g(a)) - g(a) - 1 = a - g(a) - 1 < 0$ pois $g(a) > a+1 \Leftrightarrow -g(a) < -a-1 \Leftrightarrow (a-1) - g(a) < (a-1) - a - 1 \Leftrightarrow a - g(a) - 1 < -2 < 0$.

Como h é a diferença de funções contínuas em $\mathbb{R}$ então é contínua em $\mathbb{R}$. Consequentemente h é contínua em $[a, g(a)]$. Como $h(a) \times h(g(a)) < 0$ o Corolário do Teorema de Bolzano garante que a equação $h(x) = 0$ tem pelo menos uma solução em $]a, g(a)[$.