Proposta de resolução

GRUPO I

1. Comecemos por notar que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Como

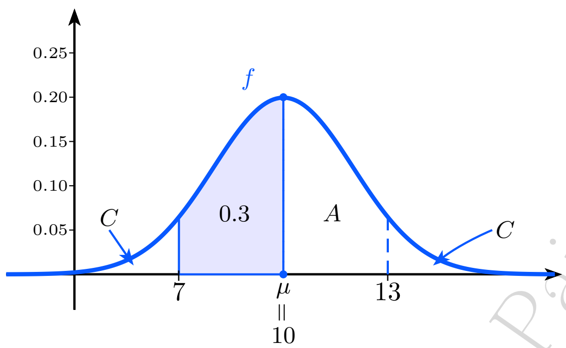
$$P(A|B) = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}P(B)$$
$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{10} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{20}$$

então

$$P(A \cup B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{10} - \frac{1}{20} = \frac{13}{20}.$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(C)**.

2. Sendo X uma variável aleatória com distribuição Normal de valor médio 10, a sua função densidade de probabilidade e as representações gráficas de $P(7 < X < 10)$ e $P(X > 13)$ ilustram-se do modo seguinte:



Como $7 = \mu - 3 = 10 - 3$ e $13 = \mu + 3 = 10 + 3$ podemos deduzir que $A = 0.3$. Consequentemente, como

$$2C + 0.3 \times 2 = 1 \Leftrightarrow C = 0.2$$

então $P(X > 13) = 0.2$.
A opção correta é a **(B)**.

3.

$$\lim_{x \to a} \frac{ae^{x-a} - a}{x^2 - a^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to a} \frac{a\left(e^{x-a} - 1\right)}{(x-a)(x+a)}$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} \times \lim_{x \to a} \frac{a}{x+a} = \star$$

Com base no limite notável $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, fazendo em $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{e^{x-a} - 1}{x - a}$ a mudança de variável $x - a = y \Leftrightarrow x = a + y$ temos $x \to a \Leftrightarrow x - a \to 0 \Leftrightarrow y \to 0$ e vem

$\star = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{e^y - 1}{y} \times \lim\limits_{x \to a} \dfrac{a}{x+a} = 1 \times \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$.

Podemos concluir que a opção correta é a **(B)**.

4. Como $D_f = \mathbb{R}^-$ então a assíntota oblíqua do gráfico de f existe quando $x \to -\infty$ e o declive da assíntota é dado por $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

Como

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x) + e^x - x}{x} = 1$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} - \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x} = 1$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} + \frac{0}{-\infty} - 1 = 1$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2,$$

podemos concluir que a opção correta é a **(D)**.

5. Sabemos das definições de seno e cosseno de um ângulo que $R(\cos\alpha, \sin\alpha)$ e $Q(\cos\alpha, 1)$.
Como $\alpha \in 4.^\circ$ Q então $\cos\alpha > 0$ e $\sin\alpha < 0$ a área do trapézio $[OPQR]$ é dada por:

$$\frac{\overline{QR} + \overline{PO}}{2} \times \overline{PQ} = \frac{1 + (-\sin\alpha) + 1}{2} \times \cos\alpha$$
$$= \cos\alpha - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2}$$

e podemos concluir que a opção correta é a **(D)**.

6. Como $-3\,\text{cis}\,\theta = 3\,\text{cis}\,(\theta + \pi)$ e

$$\theta \in \left]\pi, \frac{3}{2}\pi\right[\Leftrightarrow \theta + \pi \in \left]\pi + \pi, \frac{3}{2}\pi + \pi\right[$$
$$\Leftrightarrow \theta + \pi \in \left]2\pi, \frac{5}{2}\pi\right[.$$

Para sabermos o quadrante a que pertence a imagem geométrica do complexo z podemos considerar o intervalo

$$\left]2\pi - 2\pi, \frac{5}{2}\pi - 2\pi\right[= \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

e concluir que a opção correta é a **(A)**.

7. Uma vez que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° temos

$$B\hat{A}C + A\hat{C}B + A\hat{B}C = 180^\circ \Leftrightarrow 75^\circ \times 2 + A\hat{B}C = 180^\circ$$
$$\Leftrightarrow A\hat{B}C = 30^\circ.$$

Pela definição de produto escalar temos

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = ||\overrightarrow{BA}|| \times ||\overrightarrow{BC}|| \times \cos\left(A\hat{B}C\right)$$
$$= \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

A opção correta é a **(C)**.

8. Tendo em consideração que $\lim\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ vem que

$$\lim v_n = \lim\left[\ln\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]\right] = \ln\left[\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]$$
$$= \ln e = 1.$$

www.academiaaberta.pt Rui Paiva www.academiaaberta.pt Rui Paiva

Por outro lado, como

$$\lim \frac{kn+3}{2n} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{kn}{2n} + \lim \frac{3}{2n} = \frac{k}{2} + 0 = \frac{k}{2}$$

então $\frac{k}{2} = 1 \Leftrightarrow k = 2$.
A opção correta é a **(B)**.

GRUPO II

1. Comecemos por escrever o complexo $-1+\sqrt{3}i$ na forma trigonométrica.
$|-1+\sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2$.
Seja $\alpha = \arg\left(-1+\sqrt{3}i\right)$. Como o afixo de $-1+\sqrt{3}i$ pertence ao 2.º quadrante então

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{-1} \Leftarrow \alpha = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi$$

e temos

$$-1+\sqrt{3}i = 2\,\mathrm{cis}\left(\frac{2}{3}\pi\right).$$

Deste modo,

$$z_1 = \frac{8\,\mathrm{cis}\,\theta}{2\,\mathrm{cis}\left(\frac{2}{3}\pi\right)} = 4\,\mathrm{cis}\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right)$$

e temos

$$\overline{z_1} \times z_2 = 4\,\mathrm{cis}\left(-\theta + \frac{2}{3}\pi\right) \times \mathrm{cis}\,(2\theta) = 4\,\mathrm{cis}\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right).$$

Para este complexo ser um número real deve verificar-se

$$\theta + \frac{2}{3}\pi = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = -\frac{2}{3}\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Para $k=1$ temos $\theta = -\frac{2}{3}\pi + \pi = \frac{\pi}{3}$, sendo este o valor pretendido.

2.1. O suporte de X, conjunto formado pelos valores que a variável aleatória real X pode tomar é

$$S_X = \{1, 2, 4, 8\}.$$

Com base nas quantidades de bolas existentes de cada número temos:
$P(X=1) = \frac{{}^4C_2}{{}^9C_2} = \frac{1}{6}$;
$P(X=2) = \frac{{}^4C_1 \times {}^4C_1}{{}^9C_2} = \frac{4}{9}$;
$P(X=4) = \frac{{}^4C_2 + {}^4C_1 \times {}^1C_1}{{}^9C_2} = \frac{5}{18}$;
$P(X=8) = \frac{{}^4C_1 \times {}^1C_1}{{}^9C_2} = \frac{1}{9}$.
A tabela de distribuição de probabilidades de X é:

x_i	1	2	4	8
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$

2.2. Podemos observar no esquema seguinte um dos números possíveis.

4 2 1 1 2 1 2 2 1

Note-se que, para o número obtido ser ímpar, o último algarismo tem obrigatoriamente que ser o 1. Relativamente aos restantes oito algarismos, notemos que podem permutar de posição e que permutações que envolvam o mesmo algarismo originam o mesmo número. Temos pelo menos duas maneiras de resolver o problema.

1.ª maneira:

$$\frac{8!}{4! \times 3!} = 280.$$

Neste processo começamos por permutar os oito primeiros algarismos de 8! maneiras e dividimos por $4! \times 3!$ para anular a permutação dos quatro algarismos 2 (corresponde ao 4!) e dos três algarismos 1 (corresponde ao 3!).

2.ª maneira:

${}^8C_3 \times {}^5C_4 \times {}^1C_1 = 280$ números distintos na prateleira.

Há ${}^1C_1 = 1$ possibilidades de posicionar o algarismo 4 no único lugar que sobra.
Há ${}^5C_4$ possibilidades posicionar os quatro algarismos 2 nos cinco lugares que sobram
Há ${}^8C_3$ possibilidades posicionar os três algarismos 1

3.1. Uma vez que o centro da superfície esférica é o ponto A, que tem cota 1, então o seu raio é 1. Consequentemente, a sua equação é

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1.$$

3.2. Como a pirâmide é quadrangular regular então V tem a mesma abcissa e ordenada que o ponto médio do segmento de reta $[AC]$:

$$M_{[AC]} = \left(\frac{x_A+x_C}{2}, \frac{y_A+y_C}{2}, \frac{z_A+z_C}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{-1-3}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = (-2, 2, 1).$$

Logo, o ponto $V(-2,2,c)$ onde $c \in \mathbb{R}$.
Substituindo este ponto na equação do plano BCV vem

$$3 \times 2 + c - 10 = 0 \Leftrightarrow c = 4.$$

Podemos assim concluir que $V(-2,2,4)$.

3.3. Como o plano α é perpendicular à reta AC e

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-3,3,1) - (-1,1,1) = (-2,2,0)$$

então é da forma $-2x + 2y + 0z + d = 0$ onde d é uma constante real.

www.academiaaberta.pt Rui Paiva

Substituindo as coordenadas de $P(1,-2,-1)$ nesta equação vem

$$-2\times 1+2\times(-2)+d=0 \Leftrightarrow d=6$$

e podemos concluir que uma equação do plano α é $-2x+2y+6=0$.
Para encontrar uma equação da reta que resulta da interseção dos planos α e BCV vamos resolver o sistema

$$\begin{cases} -2x+2y+6=0 \\ 3y+z-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=2x-6 \\ 3y=-z+10 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x-3 \\ y=\frac{-z+10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x-3=y=\frac{z-10}{-3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-10}{-3}.$$

Obtivemos uma equação cartesiana da reta pretendida e podemos concluir que a reta contém o ponto $(3,0,10)$ e tem a direção do vetor $(1,1,-3)$.
Uma equação vetorial desta reta é

$$(x,y,z)=(3,0,10)+k(1,1,-3),\ k\in\mathbb{R}.$$

4.1. Para determinar o pretendido vamos estudar a monotonia de h em $[0,1]$, começando por calcular $h'(t)$.

$$h'(t) = -\frac{1}{\cancel{2\pi}}\times \cancel{2\pi}\sin(2\pi t)+\sin(2\pi t)+t\times 2\pi\cos(2\pi t)$$
$$= 2\pi t\cos(2\pi t).$$

Determinemos agora os zeros de h' em $[0,1]$:

$$h'(t)=0 \Leftrightarrow 2\pi t\cos(2\pi t) \Leftrightarrow 2\pi t=0 \vee \cos(2\pi t)=0$$
$$\Leftrightarrow t=0 \vee 2\pi t=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow t=0 \vee t=\frac{1}{4}+\frac{k}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Para a família $t=\frac{1}{4}+\frac{k}{2}, k\in\mathbb{Z}$ temos

- se $k=-1$ então $t=-\frac{1}{4}\notin[0,1]$;
- se $k=0$ então $t=\frac{1}{4}\in[0,1]$;
- se $k=1$ então $t=\frac{3}{4}\in[0,1]$;
- se $k=2$ então $t=\frac{5}{4}\notin[0,1]$.

Do exposto, podemos concluir que $h'(t)=0\wedge t\in[0,1]\Leftrightarrow t=0\vee t=\frac{1}{4}\vee t=\frac{3}{4}$.
A tabela seguinte apresenta o estudo do sinal de h' e a monotonia de h.

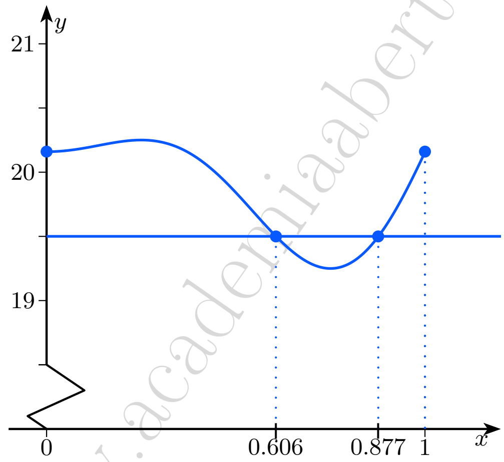
θ	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		1
$h'(t)=2\pi t\cos(2\pi t)$	0	+	0	−	0	−	0
h		↗		↘		↗	

O sinal de $h'(t)=2\pi t\cos(2\pi t)$ em $t\in[0,1]$ justifica-se pelos factos:

- $t\geq 0$
- $t\in\left]0,\frac{1}{4}\right[\Rightarrow 2\pi t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow\cos(2\pi t)>0$;
- $t\in\left]\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right[\Rightarrow 2\pi t\in\left]\frac{\pi}{2},3\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow\cos(2\pi t)<0$.

Como $h(0)=h(1)=20+\frac{1}{2\pi}$, $h\left(\frac{1}{4}\right)=20+\frac{1}{4}=\frac{81}{4}$ e $h\left(\frac{3}{4}\right)=20-\frac{3}{4}=\frac{77}{4}$ então $h\left(\frac{3}{4}\right)<h(0)$ e $h\left(\frac{1}{4}\right)>h(1)$.
Deste modo temos $m=\frac{81}{4}$, $M=\frac{77}{4}$ e $A=M-m=1$.

4.2. A figura seguinte apresenta parte do gráfico de $y=h(t)$ em $t\in[0,1]$ conjuntamente com a reta de equação $y=19,5$ obtido numa calculadora gráfica.



Graficamente, podemos interpretar a condição $h(t)<19,5$ como sendo os valores de $t\in[0,1]$ para os quais o gráfico de h de encontra abaixo da reta de equação $y=19,5$.
Podemos concluir tal situação ocorre para $t\in\left]0,606;0,877\right[$.
Consequentemente $a\approx 0,606$, $b\approx 0,877$ e $b-a\approx 0.27$.
Podemos concluir que durante o período de medição, o ponto P do tabuleiro distou do ponto fixo do vale menos de $19,5\ m$ durante aproximadamente 0.27 minutos.

5.1. Podemos concluir através da definição de derivada de uma função num ponto que

$$p=f'(-1)=e^{-1}\left((-1)^2-1+1\right)=\frac{1}{e}.$$

Consequentemente $q=-\dfrac{1}{\frac{1}{e}}=-e$.

Geometricamente, como p é o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1 e a reta normal neste ponto tem declive $-\frac{1}{p}$, podemos concluir que o declive da reta normal ao gráfico de f no ponto de abcissa -1 é $-e$.

5.2. Para estudar o sentido das concavidades de f devemos começar por calcular $f''(x)$:

$$f''(x)=e^x\left(x^2+x+1\right)+e^x(2x+1)=e^x\left(x^2+3x+2\right).$$

O passo seguinte é determinar os zeros de f''.

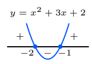
$$f''(x)=0\Leftrightarrow e^x\left(x^2+3x+2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow e^x=0\vee x^2+3x+2=0$$

www.academiaaberta.pt Rui Paiva www.academiaaberta.pt Rui Paiva

$$\Leftrightarrow x \in \varnothing \vee x = -2 \vee x = -1$$
$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1.$$

Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de f'' e da concavidade de f.

x	$-\infty$	-2		-1	$+\infty$
e^x	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2+3x+2	$+$	0	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$		$\cap$		$\cup$



Podemos concluir que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -2]$ e em $[-1, +\infty[$ e voltada para baixo em $[-2, -1]$. Os pontos de abcissas -2 e -1 são pontos de inflexão do gráfico de f.

6.1. Como f é a composição das funções definidas por $y = \ln x$ e $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ que são contínuas nos seus domínios então f é contínua em $D_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.
Deste modo, os únicos pontos que podem originar assíntotas verticais são os pontos de abcissas -1 e 1.
Vamos por isso calcular os limites seguintes.

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{-2}{0-}\right)$$
$$= \ln(+\infty) = +\infty.$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{0^+}{1}\right) = \ln\left(0^+\right)$$
$$= -\infty.$$

Podemos concluir que as retas de equações $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas verticais do gráfico de f.
São as únicas pois f é contínua em D_f.

6.2. Os pontos de abcissas a e $-a$ têm de coordenadas

$$(a, f(a)) = \left(a, \ln\frac{a-1}{a+1}\right)$$

e

$$(-a, f(-a)) = \left(-a, \ln\frac{-a-1}{-a+1}\right).$$

O declive da reta secante nos pontos de abcissas a e $-a$ é

$$m = \frac{\ln\frac{-a-1}{-a+1} - \ln\frac{a-1}{a+1}}{-a-a} = \frac{\ln\frac{-a-1}{-a+1} - \ln\frac{a-1}{a+1}}{-2a}$$
$$= \frac{\ln\frac{a+1}{a-1} + \ln\frac{a+1}{a-1}}{-2a} = \frac{2\ln\frac{a+1}{a-1}}{-2a} = \frac{\ln\frac{a+1}{a-1}}{-a}$$

Podemos concluir que a reta pretendida é da forma

$$y = \frac{\ln\frac{a+1}{a-1}}{-a}x + b$$

onde b é uma constante real.
Substituindo na equação da reta o ponto

$$(a, f(a)) = \left(a, \ln\frac{a-1}{a+1}\right)$$

vem:

$$\ln\frac{a-1}{a+1} = \frac{\ln\frac{a+1}{a-1}}{-\cancel{a}} \times \cancel{a} + b \Leftrightarrow b = \ln\frac{a-1}{a+1} + \ln\frac{a+1}{a-1}$$

$$\Leftrightarrow b = \ln\frac{a-1}{a+1} - \ln\frac{a-1}{a+1} \Leftrightarrow b = 0.$$

Podemos concluir que a equação reduzida da reta secante é

$$y = \frac{\ln\frac{a+1}{a-1}}{-a}x.$$

Como

$$0 = \frac{\ln\frac{a+1}{a-1}}{-a} \times 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

então a reta contém a origem do referencial.

www.academiaaberta.pt Rui Paiva