Proposta de resolução

GRUPO I

1. Sabemos que $\sum_{x\in S_X} P(X=x)=1$. Deste modo temos

$$a+2a+0,4=1 \Leftrightarrow 3a=0,6 \Leftrightarrow a=0,2.$$

Por outro lado, da definição de valor médio de uma variável aleatória discreta vem que

$$\begin{aligned} E(X)=\mu_X &= \sum_{i=1}^{3} x_i \times P(X=x_i) \\ &= 1\times a + 2\times(2a)+3\times 0,4 \\ &= 1\times 0,2+2\times 0,4+3\times 0,4=2,2. \end{aligned}$$

Podemos concluir que o valor médio de X é 2,2 e que a opção correta é a **(B)**.

2. Pela definição de probabilidade condicionada temos

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Consideremos

$$\Omega=\{1,2,\dots,9\}.$$

Então $A=\{1,2,3,4,5\}$ e $B=\{2,4,6,8\}$. Consequentemente $A\cap B=\{2,4\}$ e temos

$$P(A|B)=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Podemos concluir que o valor médio de X é 2,2 e que a opção correta é a **(B)**.

3. A resolução do problema vai utilizar as propriedades dos logaritmos.

$$\begin{aligned} \log_a(a^2 b) &= \log_a(a^2)+\log_a(b) \\ &= 2+\frac{\log_b(b)}{\log_b(a)} = 2+\frac{1}{\frac{1}{3}} = 2+3=5. \end{aligned}$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(D)**.

4. Para f ser contínua no ponto 0 tem que verificar $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$. Como

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(2+e^{x+k}\right)=2+e^k=f(0)$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{2x+\ln(x+1)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{x}+\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}=2+1=3 \end{aligned}$$

então f é contínua no ponto 0 se e só se

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \\ \Leftrightarrow & 2+e^k=3 \Leftrightarrow e^k=1 \Leftrightarrow k=0. \end{aligned}$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

5. Como

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(3\sin^2 x\right)' = 3\times 2\times \sin x\times\cos x \\ &= 6\sin x\times\cos x \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} f''(x) &= (6\sin x\times\cos x)' \\ &= 6\left(\cos x\cos x+\sin x\times(-\sin x)\right) \\ &= 6\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=6\cos(2x). \end{aligned}$$

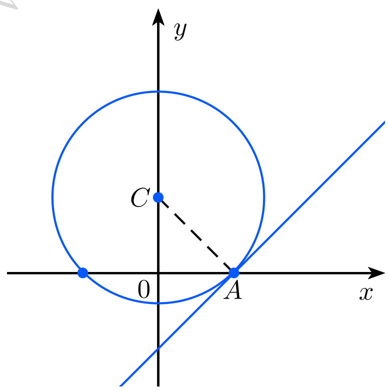
Podemos concluir que a opção correta é a **(C)**.

6. Como o triângulo $[OAB]$ é equilátero então $\overline{OA}=\overline{OB}=1$ e $\measuredangle AOB=\frac{\pi}{3}$. Deste modo

$$z=1\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi=\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right).$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(D)**.

7. A circunferência de equação $x^2+(y-1)^2=2$ tem centro no ponto $(0,1)$ e raio $\sqrt{2}$. A figura seguinte ilustra a circunferência e a reta r, tangente à circunferência no ponto A.



As coordenadas dos pontos de interseção da circunferência com o eixo Ox podem ser através do sistema seguinte

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2=2 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(0-1)^2=2 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \vee x=-1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$$

Podemos concluir que $A(1,0)$.
A reta r é perpendicular à reta CA. Como $M_{CA}=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\frac{0-1}{1-0}=-1$ então o declive da reta r é $m=-\frac{1}{-1}=1$. Deste modo, a equação reduzida da reta r é da forma $y=x+b$ para $b\in\mathbb{R}$. Substituindo as coordenadas de A na equação vem

$$0=1+b\Leftrightarrow b=-1$$

e podemos concluir que a equação reduzida da reta é $y=x-1$.

Podemos concluir que a opção correta é a **(B)**.

8. Como $-1 \leq -\frac{1}{n} < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ podemos concluir que $u_n = -\frac{1}{n}$ é o termo geral de uma sucessão limitada.
Por outro lado, como

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -\frac{1}{n+1} - \left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{-n+n+1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} > 0, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

podemos concluir que $\{u_n\}$ é uma sucessão monótona crescente.

A opção correta é a **(C)**.

GRUPO II

1. Comecemos por notar que como $z^4 = \overline{z_1} \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{\overline{z_1}}$ então pretendemos encontrar as raízes quartas do número complexo $\overline{z_1}$. Para tal, comecemos por escrever z_1 na forma trigonométrica.
Na Figura 16.1 está representado o complexo $-1+i$ no plano de Argand.
Como o afixo de $-1+i$ pertence ao 2.° quadrante temos

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1}\frac{1}{-1} + \pi \\ &= \tan^{-1}(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{4}\pi \end{aligned}$$

Como $|-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$ e $\theta = \frac{3}{4}\pi$ então

$$-1+i = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{3}{4}\pi\right).$$

Deste modo,

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{3}{4}\pi\right)}{\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{12}} = \text{cis}\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{12}\right) = \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

e $\overline{z_1} = \text{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

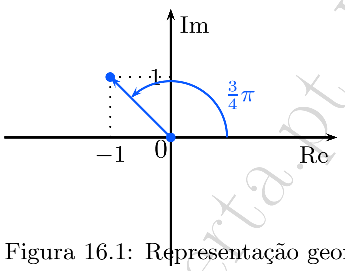


Figura 16.1: Representação geométrica do complexo $-1+i$.

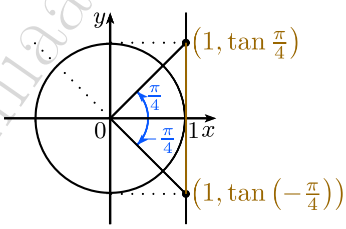


Figura 16.2: Representação de $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ na circunferência trigonométrica

Pela fórmula de Moivre generalizada as raízes quartas de $\overline{z_1}$ são

$$z_k = \sqrt[4]{1}\,\text{cis}\left(\frac{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right), \ k \in \{0,1,2,3\}.$$

Logo, substituindo em z_k o k por $0,1,2,3$ obtemos:

- $z_0 = \text{cis}\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}}{4}\right) = \text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;
- $z_1 = \text{cis}\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4}\right) = \text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$;
- $z_2 = \text{cis}\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}\right) = \text{cis}\left(\frac{5}{6}\pi\right)$;
- $z_3 = \text{cis}\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}\right) = \text{cis}\left(\frac{4}{3}\pi\right)$.

O conjunto solução da equação $z^4 = \overline{z_1}$ é portanto

$$S = \left\{\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right), \text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right), \text{cis}\left(\frac{5}{6}\pi\right), \text{cis}\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right\}.$$

2.1. Como $d(0) = 1 + \frac{1}{2}\sin\left(0+\frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{5}{4}$ então pretende-se saber as soluções da equação $d(t) = \frac{5}{4}$.

$$\begin{aligned} &d(t) = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2}\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{4} \\ &\Leftrightarrow \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} \\ &\Leftrightarrow \pi t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \pi t + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow t = 2k \vee t = \frac{2}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Vamos agora atribuir valores inteiros a k em cada uma das duas famílias de soluções de modo a encontrar as soluções pertencentes ao intervalo $[0,3]$.
No caso de $t = 2k$,

- para $k = -1$ temos $t = -2 \notin [0,3]$;
- para $k = 0$ temos $t = 0 \in [0,3]$;
- para $k = 1$ temos $t = 2 \in [0,3]$;
- para $k = 2$ temos $t = 4 \notin [0,3]$.

Podemos concluir que esta família admite 0 e 2 como soluções no intervalo $[0,3]$.
No caso de $t = \frac{2}{3} + 2k$,

- para $k = -1$ temos $t = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3} \notin [0,3]$;
- para $k = 0$ temos $t = \frac{2}{3} \in [0,3]$;
- para $k = 1$ temos $t = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3} \in [0,3]$;
- para $k = 2$ temos $t = \frac{2}{3} + 4 = \frac{14}{3} \notin [0,3]$.

Podemos concluir que esta família admite $\frac{2}{3}$ e $\frac{8}{3}$ como soluções no intervalo $[0,3]$.

Podemos concluir que os instantes, diferentes do inicial, em que o ponto P passou pelo ponto A durante os primeiros três segundos do movimento foram $\frac{2}{3}$ s, 2 s e $\frac{8}{3}$ s.

2.2. Comecemos por notar que como f é a soma, o produto e a composição de funções contínuas então é contínua em $[0,+\infty[$. Consequentemente f é contínua

em $[3,4]$.
Como

$$\begin{aligned} f(3) &= 1+\frac{1}{2}\sin\left(3\pi+\frac{\pi}{6}\right) = 1+\frac{1}{2}\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\\ &= 1+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 1+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\\ &= 1-\frac{1}{4} = 0.75 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(4) &= 1+\frac{1}{2}\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right) = 1+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &= 1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = 1+\frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 1.25 \end{aligned}$$

então $f(3) < 1.1 < f(4)$ e podemos concluir pelo Teorema de Bolzano que houve, pelo menos, um instante, entre os três segundos e os quatro segundos após o início da contagem do tempo, em que a distância do ponto P ao ponto O foi igual a $1,1$ metros.

3.1. De acordo com a definição de assíntota horizontal, o gráfico de f admite a reta de equação $y=b$ como assíntota horizontal se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.
Comecemos com o estudo da existência de assíntotas horizontais quando $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(1+xe^x\right) \overset{(\infty\times 0)}{=} \star$$

Como obtivemos um símbolo de indeterminação, vamos efetuar a mudança de variável $y=-x \Leftrightarrow x=-y$ e utilizar o limite notável $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p} = +\infty$ $(p\in\mathbb{R})$.

$$\star = 1+\lim_{y\to+\infty}\frac{-y}{e^y} = 1-\frac{1}{\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y}} = 1-\frac{1}{+\infty} = 1.$$

Podemos concluir que $y=1$ é assíntota horizontal do gráfico de f. Prosseguimos com o estudo da existência de assíntotas horizontais quando $x\to+\infty$.

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x-3)-\ln x\right) \overset{(\infty-\infty)}{=}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{x-3}{x}\right) = \ln\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3}{x}\right) = \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

Podemos concluir que $y=0$ é assíntota horizontal do gráfico de f.
Em suma, $y=0$ e $y=1$ são as assíntotas horizontais do gráfico de f.

3.2. Em $]-\infty,3]$ temos

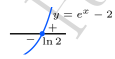
$$f(x)-2x>1 \Leftrightarrow 1+xe^x-2x>1 \Leftrightarrow x\left(e^x-2\right)>0.$$

Para resolver esta inequação vamos determinar os zeros da equação que lhe está associada e estudar o sinal da função definida por $y=x\left(e^x-2\right)$ através de uma tabela de sinal.

$$\begin{aligned} &x\left(e^x-2\right)=0 \Leftrightarrow x=0\vee e^x-2=0 \Leftrightarrow x=0\vee e^x=2\\ &\Leftrightarrow x=0\vee x=\ln 2. \end{aligned}$$

Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal da função definida por
$y=x\left(e^x-2\right)$.

x	$-\infty$	0		$\ln 2$		3
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
e^x-2	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$x\left(e^x-2\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$	



Note-se que o esboço do gráfico da função definida por $y=e^x-2$ obteve-se deslocando o gráfico de $y=e^x$ duas unidades para baixo.

Podemos concluir que o conjunto solução da condição é $S=]-\infty,0[\cup]\ln 2,3]$.

3.3. Comecemos por recordar que, por definição, a reta tangente ao gráfico de uma função num ponto x_0 é a reta que tem como declive $f'\left(x_0\right)$ e contém o ponto $\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$, denominado por ponto de tangência.
Como para $x>3$ temos $f'(x) = (\ln(x-3)-\ln x)' = \dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x}$ então

$$f'(4) = \frac{1}{4-3}-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

e a equação reduzida da reta tangente pretendida é da forma $y=\frac{3}{4}x+b$ onde $b\in\mathbb{R}$. Substituindo o ponto de tangência é $(4,f(4)) = (4,\ln 1-\ln 4) = (4,-\ln 4)$ nesta equação vem

$$-\ln 4 = \frac{3}{4}\times 4+b \Leftrightarrow b = -\ln 4-3$$

e podemos concluir que a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 4 é $y=\dfrac{3}{4}x-\ln 4-3$.

4. Como f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio então f é contínua em todos os pontos do seu domínio. Como o Gráfico A representa uma função descontínua num ponto do seu domínio então não pode ser o gráfico de f.

O Gráfico B não pode ser o gráfico de f porque, como $f''(0)<0$, para qualquer $x\in]-\infty,0]$, o gráfico de f tem em $x\in]-\infty,0]$ a concavidade voltada para baixo. Note-se que o Gráfico B tem neste intervalo a concavidade voltada para cima.

Relativamente ao Gráfico C, como representa uma função decrescente e derivável numa vizinhança de 0 então a sua função derivada é negativa nesta vizinhança. Como por hipótese $f'(0)>0$ então o Gráfico C não pode ser o gráfico de f.

5. Vamos resolver esta pergunta desenvolvendo a igualdade inicial até obter uma identidade verdadeira.

$$\begin{aligned} &P\left(A\cup\overline{B}\right)-1+P(B) = P(A)\times P(B|A)\\ &\Leftrightarrow P(A)+P\left(\overline{B}\right)-P\left(A\cap\overline{B}\right)-1+P(B) = P(A)\times\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\\ &\Leftrightarrow P(A)+1-P(B)-(P(A)-P(A\cap B))-1+P(B) = P(B\cap A)\\ &\Leftrightarrow 0=0. \end{aligned}$$

Podemos concluir que a igualdade está provada.

6..1 O ponto V tem como coordenadas $(1,1,c)$ onde $c\in\mathbb{R}$ uma vez que, como a pirâmide é regular, a projeção de V no plano xOy é $(1,1,0)$. Por outro lado, como V pertence ao plano PQV terá que verificar a sua equação geral:

$$6 \times 1 + c - 12 = 0 \Leftrightarrow c = 6.$$

Podemos portanto concluir que $V(1,1,6)$.

6.2. Como o plano é perpendicular à reta OR então admite como vetor normal

$$\vec{n} = \overrightarrow{OR} = R - O = (2,2,2) - (0,0,0) = (2,2,2).$$

Assim, a sua equação geral é da forma $2x+2y+2z+d = 0$ onde $d \in \mathbb{R}$. Substituindo as coordenadas de $P(2,0,0)$ nesta equação vem

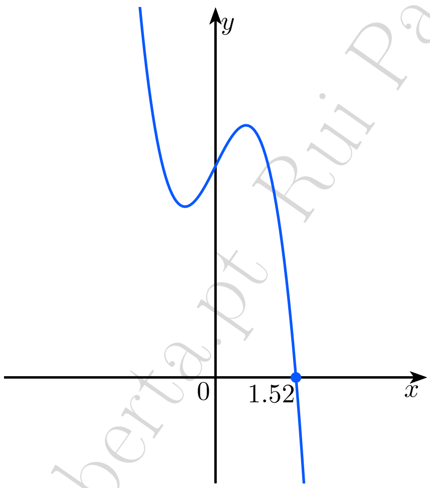
$$2 \times 2 + 2 \times 0 + 2 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -4$$

e podemos concluir que a equação geral do plano pedido é $2x + 2y + 2z - 4 = 0$.

6.3. Como o plano QRS é perpendicular a Oy tem de equação $y = 2$. Consequentemente $A(a,2,c)$ para $a, c \in \mathbb{R}$. A hipótese de a cota de A ser igual ao cubo da abcissa traduz-se na igualdade $c = a^3$. Nesta fase já sabemos que $A(a,2,a^3)$ para $a \in \mathbb{R}$.
Como $\overrightarrow{OA} = A - O = (a,2,a^3)$ e $\overrightarrow{TQ} = Q - T = (2,2,0) - (0,0,2) = (2,2,-2)$ então os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{TQ}$ são perpendiculares se e só se

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{TQ} = 0 \Leftrightarrow (a,2,a^3) \cdot (2,2,-2) = 0 \Leftrightarrow 2a + 4 - 2a^3 = 0.$$

A figura seguinte apresenta parte do gráfico de $y = 2a + 4 - 2a^3$ obtido numa calculadora gráfica conjuntamente com o seu zero no intervalo $[-4,4]$.



Podemos concluir que a abcissa de A arredondada às centésimas é 1.52.

6.4. Uma vez que a coloração das 9 faces é feita ao acaso qualquer face tem igual probabilidade de ficar com cada uma das 7 cores e podemos usar a Lei de Laplace para calcular a probabilidade pretendida. Os casos possíveis são ${}^7A'_9$ correspondentes ao número de maneiras de pintar as 9 faces de qualquer uma das 7 cores disponíveis.
Os casos favoráveis são ${}^4C_2 \times {}^5C_2 \times 5!$. ${}^4C_2$ corresponde ao número de escolhas de duas faces triangulares, para colorir de branco, entre as quatro disponíveis. Para cada uma destas escolhas podemos escolher duas faces quadrangulares entre as cinco disponíveis de ${}^4C_2$ modos. Para cada uma destas escolhas podemos colorir as restantes cinco faces com as cinco cores sobrantes de 5! maneiras.
Pela Lei de Laplace, a probabilidade é portanto

$$P = \frac{{}^4C_2 \times {}^5C_2 \times 5!}{{}^7A'_9} \approx 0.0002.$$