Proposta de resolução

GRUPO I

1. Comecemos por ilustrar a situação com um esquema.

$$\frac{H_1}{2} \quad \frac{M_1}{4} \quad \frac{M_2}{3} \quad \frac{M_3}{2} \quad \frac{M_4}{1} \quad \frac{H_2}{1}$$

Note que no esquema H_i designa o homem i para $i = 1, 2$ e M_j designa a mulher j para $j = 1, 2, 3$.
Podemos concluir pelo Princípio fundamental da contagem que há $2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 2! \times 4! = 48$ maneiras de fazer o pretendido.
A opção correta é a **(C)**.

2. $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B)$.
Por outro lado,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) = 0,5 &\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 \\ &\Leftrightarrow 0,4 + 0,3 - P(A \cap B) = 0,5 \\ &\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,2. \end{aligned}$$

Deste modo temos $1 - P(A \cap B) = 1 - 0,2 = 0,8$ e podemos concluir que a opção correta é a **(C)**.

3. $\log_3 \left(\frac{3^k}{9}\right) = \log_3 3^k - \log_3 3^2 = k - 2$. A opção correta é a **(B)**.

4. Como $\lim (u_n) = (+\infty)^2 = +\infty$ então

$$\lim f(u_n) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \ln x}{x}$$

$$\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 + 0 = 0.$$

A opção correta é a **(A)**.

5. O quadrilátero $[ABCD]$ é um trapézio.
Pelas definições das razões trigonométricas temos $A(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $B(\cos\alpha, 0)$ e $D(0, \tan\alpha)$.
Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ então $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$ e $\tan\alpha > 0$ e a área do quadrilátero é dada por

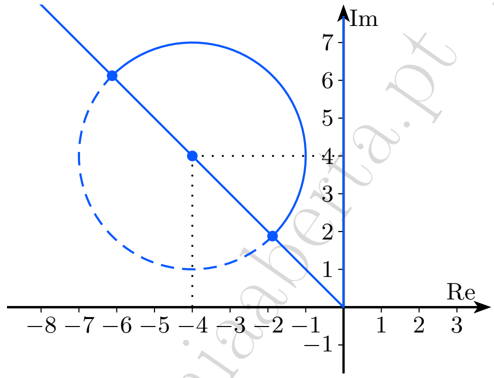
$$\begin{aligned} A_{[ABCD]} &= \frac{\overline{CD} + \overline{BA}}{2} \times \overline{BC} \\ &= \frac{\tan\alpha + \sin\alpha}{2} \times (1 - \cos\alpha) \\ &= \frac{\tan\alpha \times \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{2} \\ &= \frac{\tan\alpha}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2\sin\alpha\cos\alpha \\ &= \frac{\tan\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\alpha). \end{aligned}$$

A opção correta é a **(B)**.

6. Como a condição dada é equivalente a

$$|z + 4 - 4i| = 3 \wedge \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{3}{4}\pi$$

então a condição define a interseção de uma circunferência de centro no ponto $(-4, 4)$ e raio 3 com os afixos dos complexos com argumentos entre $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{4}\pi$, como ilustrado na figura seguinte.



O comprimento da linha é metade do perímetro da circunferência:

$$\frac{2\pi \times 3}{2} = 3\pi.$$

A opção correta é a **(C)**.

7. Como o triângulo é equilátero então $A\hat{B}C = 60°$.
Consequentemente, o declive da reta AB é $\tan 60° = \sqrt{3}$.
Como a ordenada na origem da reta AB é negativa, **(D)** é a opção correta.

8. Trata-se de uma sucessão definida por recorrência.
$u_2 = -3u_1 + 2 = -3a + 2$; $u_3 = -3u_2 + 2 = -3(-3a + 2) + 2 = 9a - 4$.
A opção correta é a **(B)**.

GRUPO II

1. Comecemos por escrever

$$-2 + 2i^{19} = -2 + 2i^{16+3} = -2 + 2i^{16}i^3 = -2 - 2i$$

na forma trigonométrica.
$|-2 - 2i| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
Seja α o argumento principal de $-2 - 2i$. Como $\tan\alpha = \frac{-2}{-2} = 1$ e o afixo de $-2 - 2i$ pertence ao 3.º quadrante então $\alpha = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi$.
Logo, $-2 - 2i = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$.
Temos portanto

$$\frac{-2 + 2i^{19}}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\theta} = \frac{2\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{3}{4}\pi\right)}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\theta} = \operatorname{cis}\left(-\frac{3}{4}\pi - \theta\right).$$

Para este complexo ser um imaginário puro tem que se verificar

$$-\frac{3}{4}\pi - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = -\frac{5}{4}\pi - k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vamos agora atribuir valores inteiros a k em $\theta = -\frac{5}{4}\pi - k\pi$ de modo a encontrar as soluções pertencentes ao intervalo $]0, 2\pi[$:

- para $k = -4$ temos $\theta = -\frac{5}{4}\pi + 4\pi = \frac{11}{4}\pi \notin]0, 2\pi[$;
- para $k = -3$ temos $\theta = -\frac{5}{4}\pi + 3\pi = \frac{7}{4}\pi \in]0, 2\pi[$;

- para $k=-2$ temos $\theta = -\frac{5}{4}\pi + 2\pi = \frac{3}{4}\pi \in]0, 2\pi[$;
- para $k=-1$ temos $\theta = -\frac{5}{4}\pi + \pi = -\frac{pi}{4} \notin]0, 2\pi[$.

Podemos concluir que os valores de θ para os quais se verifica o pretendido são $\frac{3}{4}\pi$ e $\frac{7}{4}\pi$.

2.1. Comecemos por definir os acontecimentos:
H: "ser homem"
C: "residir em Coimbra".
Deste modo temos
$P\left(\overline{C}\right) = 0.6 \Rightarrow P(C) = 0.4$;
$P(H) = P\left(\overline{H}\right) \Rightarrow P(H) = 0.5$;
$P\left(\overline{C}|H\right) = 0.3$.
Pretendemos saber $P\left(\overline{H}|C\right)$.
Como

$$\begin{aligned} &P\left(\overline{C}|H\right) = 0.3 \Leftrightarrow 1 - P\left(C|H\right) = 0.3 \\ \Leftrightarrow &P\left(C|H\right) = 0.7 \Leftrightarrow \frac{P\left(C \cap H\right)}{P(H)} = 0.7 \\ \Leftrightarrow &P\left(C \cap H\right) = 0.7 \times 0.5 \Leftrightarrow P\left(C \cap H\right) = 0.35 \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} &P\left(\overline{H}|C\right) = 1 - P\left(H|C\right) = 1 - \frac{P\left(H \cap C\right)}{P(C)} \\ =&1 - \frac{0.35}{0.4} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

2.2. A Lei de Laplace garante que, quando o espaço de resultados de uma experiência é finito, a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis quando há equiprobabilidade de acontecimentos singulares. Como os três funcionários são escolhidos ao acaso há equiprobabilidade de acontecimentos singulares e podemos utilizar a Lei de Laplace para calcular a probabilidade pedida.
Os casos possíveis são ${}^{80}C_3$ correspondentes ao número de possibilidades de escolha de 3 pessoas em 80.
Relativamente aos casos favoráveis, comecemos por notar que o contrário de haver no máximo dois funcionários em três a residir em Coimbra é haver três a residir em Coimbra. Como $P(C) = 0.4$ e são 80 funcionários então $0.4 \times 80 = 32$ residem em Coimbra. Podemos escolher 3 funcionários dos 32 residentes em Coimbra de ${}^{32}C_3$ modos diferentes. Se tirarmos ao número total de escolhas de três funcionários $\left({}^{80}C_3\right)$ as escolhas de três funcionários de Coimbra, ficamos com os casos favoráveis $\left({}^{80}C_3 - {}^{32}C_3\right)$.
Aplicando a Lei de Laplace obtemos a probabilidade apresentada:

$$\frac{{}^{80}C_3 - {}^{32}C_3}{{}^{80}C_3}.$$

3.1. Como $d(0) = 10 + 5e^0 = 15$ e a distância de P à base do recipiente é 16 então o raio da esfera é igual a $16 - 15 = 1$ e o seu volume é

$$\frac{4}{3}\pi \times 1^3 = \frac{4}{3}\pi\ cm^3 \approx 4.19\ cm^3.$$

3.2. Para obter o pretendido vamos estudar a monotonia de d.

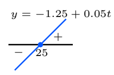
$$\begin{aligned} &d'(t) = 0 - e^{-0.05t} + (5-t) \times (-0.05)e^{-0.05t} \\ =&e^{-0.05t}\left(-1 - 0.25 + 0.05t\right) \Leftrightarrow e^{-0.05t}\left(-1.25 + 0.05t\right). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} &d'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-0.05t} = 0 \vee -1.25 + 0.05t = 0 \\ \Leftrightarrow &t \in \varnothing \vee t = 25 \Leftrightarrow t = 25 \end{aligned}$$

então 25 é o único ponto crítico.
Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de d' e da monotonia de d.

x	0		25	$+\infty$
$e^{-0.05t}$		$+$	$+$	$+$
$-1.25+0.05t$		$-$	0	$+$
$d'(t)$		$-$	0	$+$
d	0	$\searrow$	min	$\nearrow$ 0



Podemos concluir que a distância é mínima quando $t = 25$. Corresponde portanto a 25 segundos após se ter iniciado o movimento.

4.1. Como para $x < \dfrac{1}{2}$ a função f está definida pelo quociente de funções contínuas então é contínua em $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$.
Para $x > \dfrac{1}{2}$ a função está definida pelo produto de funções contínuas. Consequentemente f é contínua em $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.
Resta-nos estudar a continuidade no ponto de abcissa $\dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) &= \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x-\frac{1}{2}\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{2}}\left(e^{x-\frac{1}{2}} - 1\right)}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim_{x-\frac{1}{2}\to 0^-} \frac{e^{x-\frac{1}{2}} - 1}{x - \frac{1}{2}} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}. \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \left((x+1)\ln x\right) = \left(\frac{1}{2} + 1\right)\ln\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\ln\frac{1}{2}.$$

Deste modo, como $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)$ então f não é contínua no ponto $\dfrac{1}{2}$.
Como os limites laterais no ponto $\frac{1}{2}$ são finitos então a reta de equação $x = \frac{1}{2}$ não é assíntota vertical do gráfico de f.
Podemos também concluir que, como f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$, o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

4.2. Para estudar o sentido das concavidades de f devemos começar por calcular $f''(x)$ en $x \in \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$:

$$f'(x) = \ln x + (x+1) \times \frac{1}{x} = \ln x + \frac{x+1}{x}.$$

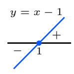
$$f''(x) = \left(\ln x + \frac{x+1}{x}\right)' = \frac{1}{x} + \frac{x-(x+1)}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}.$$

O passo seguinte é determinar os zeros de f''.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

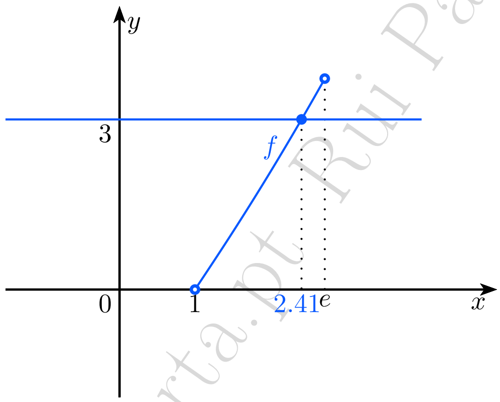
Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de f'' e da concavidade de f.

x	$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$
f''	$-$	$-$	0	$+$
f		$\cap$		$\cup$



Podemos concluir que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$ e voltada para cima em $[1, +\infty[$. O ponto $(1, f(1)) = (1, 0)$ é o único ponto de inflexão do gráfico de f.

4.3. Como para $x > \frac{1}{2}$ a função f está definida pelo produto de funções contínuas então f é contínua em $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Assim, f é em particular contínua em $[1, e]$. Como $f(1) = 0 < 3$ e $f(e) = (e+1)\ln e = e + 1 > 3$ então $f(1) < 3 < f(e)$ e podemos concluir pelo Teorema de Bolzano que f tem pelo menos uma solução no intervalo $]1, e[$.
No gráfico seguinte, obtido através de uma calculadora gráfica, estão representados os gráficos de $y = f(x)$ e $y = 3$.



Podemos concluir que a solução pedida aproximada às centésimas é 2.41.

5.1. Um vetor normal ao plano α é $\vec{n} = (1, -2, 1)$.
Como planos paralelos têm vetores normais perpendiculares, o plano pretendido também tem $\vec{n}$ como vetor normal. Consequentemente é da forma

$$x - 2y + z + d = 0$$

onde d é uma constante real.
Substituindo nesta equação as coordenadas do ponto $A(0, 0, 2)$ vem

$$0 - 2 \times 0 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$$

e podemos concluir que uma equação do plano paralelo ao plano α que contém o ponto A é $x - 2y + z - 2 = 0$.

5.2. O centro da circunferência pretendida é o ponto médio de $[AB]$:

$$M_{[AB]} = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right) = \left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (2, 0, 1).$$

O seu raio é metade da distância entre A e B:

$$r = \frac{1}{2}\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(0-4)^2 + (0-0)^2 + (2-0)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{20}.$$

A equação da superfície esférica pretendida é

$$(x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{20}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5.$$

5.3. Nas condições apresentadas podemos considera que $P(4, b, 0)$ onde $b > 0$.
Por outro lado, como $\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 0, -2)$ e $\overrightarrow{AP} = P - A = (4, b, -2)$

$$\cos\left(B\hat{A}P\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{16 + 0 + 4}{\sqrt{20} \times \sqrt{20 + b^2}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\sqrt{20} \times \sqrt{20 + b^2}\right) = 20 \Leftrightarrow 20\left(20 + b^2\right) = 40^2$$
$$\Leftrightarrow b^2 = 60 \Leftrightarrow b = \pm 2\sqrt{15}.$$

Como a ordenada de P é positiva então $b = 2\sqrt{15}$.

6. Como o declive da reta r é $m_r = f'(a)$, o declive da reta s é $m_s = g'\left(a + \frac{\pi}{6}\right)$ e as retas são perpendiculares então

$$m_r = -\frac{1}{m_s} \Leftrightarrow f'(a) = -\frac{1}{g'\left(a + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

Sendo $f'(x) = 3\sin(3x)$ e $g'(x) = 3\cos(3x)$ então

$$f'(a) = -\frac{1}{g'\left(a + \frac{\pi}{6}\right)} \Leftrightarrow 3\sin(3a) = -\frac{1}{3\cos\left(3\left(a + \frac{\pi}{6}\right)\right)}$$
$$\Leftrightarrow 3\sin(3a) = -\frac{1}{3\cos\left(3a + \frac{\pi}{2}\right)}$$
$$\Leftrightarrow 3\sin(3a) = -\frac{1}{-3\sin(3a)} \Leftrightarrow 9\sin^2(3a) = 1$$
$$\Leftrightarrow \sin(3a) = \pm\frac{1}{3}.$$

Como $a \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow 3a \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ então $\sin(3a) = -\frac{1}{3}$.