

Proposta de resolução

1.1. O volume do paralelepípedo $[ABCDEFGH]$ é dada pelo produto da área da base vezes a altura, ou seja

$$\overline{AB} \times \overline{BG} \times \overline{BC}.$$

Para obter a área da base, vamos começar por determinar as coordenadas do ponto A . Uma vez que A pertence ao eixo Ox , as suas coordenadas são da forma $A(a, 0, 0)$ para alguma constante $a \in \mathbb{R}$.

Substituindo na equação do plano ABC temos:

$$3 \times a + 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow a = 4.$$

Assim, $A(4, 0, 0)$.

Como $B(0, 3, 0)$ e $C(0, 3, 6)$ então

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2 + (0-0)^2} = 5;$$

$$\overline{BG} = \sqrt{(0-6)^2 + (3-11)^2 + (0-0)^2} = 10$$

e o volume do paralelepípedo é $5 \times 10 \times 6 = 300$ unidades de volume.

1.2. Sabemos que um plano definido por uma equação da forma $ax + by + cz + d = 0$ admite o vetor de coordenadas $\vec{n}(a, b, c)$ como vetor normal.

Por conseguinte, $\vec{n}(3, 4, 0)$ são as coordenadas de um vetor normal ao plano ABC e

$$(x, y, z) = (1, -4, 3) + k(3, 4, 0), \quad k \in \mathbb{R}$$

é uma equação vetorial da reta r .

A solução do sistema seguinte dá-nos as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano ABC .

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3x + 4y - 12 = 0 \\ (x, y, z) = (1, -4, 3) + k(3, 4, 0) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 3(1 + 3k) + 4(4k - 4) - 12 = 0 \\ (x, y, z) = (1 + 3k, -4 + 4k, 3) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 25k = 25 \\ - - - \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} k = 1 \\ (x, y, z) = (4, 0, 3). \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano ABC são $(4, 0, 3)$.

1.3. Começemos por notar que, para a terceira coordenada do vetor \overrightarrow{XY} ser 0, este tem de ser paralelo ao plano xOy .

Assim, podemos escolher dois vértices do conjunto $\{A, B, G, H\}$ ou dois vértices do conjunto $\{C, D, E, F\}$.

Em qualquer um dos casos temos 4A_2 vetores. Por conseguinte, há ${}^4A_2 \times 2$ casos favoráveis.

Como se podem escolher dois vértices entre os oito vértices para formar vetores de ${}^8A_2 = 56$ modos distintos, há 56 casos possíveis.

de acordo com a Lei de Laplace, a probabilidade pedida é

$$\frac{{}^4A_2 \times 2}{56} = \frac{3}{7}.$$

2.1. Consideremos os acontecimentos:

R : “o aluno é rapaz”;

F : “o aluno frequenta o 10.º ano”.

De acordo com o enunciado temos:

$$P(R|F) = \frac{3}{5};$$

$$P(R) = \frac{11}{21};$$

$$P(R \cap F) = \frac{1}{7}.$$

Pretendemos calcular $P(\overline{R} \cap \overline{F})$:

$$\begin{aligned} P(\overline{R} \cap \overline{F}) &= P(\overline{R \cup F}) \\ &= 1 - P(R \cup F) \\ &= 1 - (P(R) + P(F) - P(R \cap F)). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} P(R|F) &= \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow \frac{P(R \cap F)}{P(F)} &= \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{7}}{P(F)} &= \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow P(F) &= \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{5}} \\ \Leftrightarrow P(F) &= \frac{5}{21}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &1 - (P(R) + P(F) - P(R \cap F)) \\ &1 - \left(\frac{11}{21} + \frac{5}{21} - \frac{1}{7} \right) \\ &= \frac{8}{21} \approx 0.38. \end{aligned}$$

A probabilidade pedida é 0.38.

2.2. A turma tem 15 raparigas e $26 - 15 = 11$ rapazes.

Se a comissão inclui rapazes e raparigas e o delegado de turma pertence à comissão, temos as seguintes possibilidades:

- delegado e 2 raparigas: ${}^{15}C_2 = 105$ comissões;
- delegado, outro rapaz e 1 rapariga: ${}^{10}C_1 \times {}^{15}C_1 = 150$.

No total temos $105 + 150 = 255$ comissões nas condições apresentadas.

Podemos concluir que a opção correta é a **(D)**.

3.1. Havendo duas bolas brancas e três bolas pretas, temos $S_X = \{0, 1, 2\}$.

- $P(X = 0)$ corresponde à probabilidade de se tirarem duas bolas pretas: $\frac{{}^3C_2}{{}^5C_2} = \frac{3}{10}$;
- $P(X = 1)$ corresponde à probabilidade de se tirar uma bola branca e uma bola preta: $\frac{{}^2C_1 \times {}^3C_1}{{}^5C_2} = \frac{3}{5}$;
- $P(X = 2)$ corresponde à probabilidade de se tirarem duas bolas brancas: $\frac{{}^2C_2}{{}^5C_2} = \frac{1}{10}$.

Assim,

$$\mu_X = \sum_{x \in S_X} x \times P(X = x) = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{10} = 0.8.$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(B)**.

3.2. Sabemos que, num triângulo, ao maior lado opõe-se o ângulo de maior amplitude.

Assim, ao lado de comprimento 6 opõe-se o ângulo de amplitude α .

Pelo Teorema de Carnot,

$$\begin{aligned} 6^2 &= 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \cos \alpha \\ \Leftrightarrow 40 \cos \alpha &= 5 \\ \Leftrightarrow \cos \alpha &= \frac{1}{8} \\ \Leftrightarrow \alpha &\approx 82.819244^\circ. \end{aligned}$$

Logo, $\text{sen } \alpha \approx 0.992$.

Podemos concluir que a opção correta é a **(B)**.

Um outro modo de resolver o exercício, a partir da etapa $\cos \alpha = \frac{1}{8}$ é aplicar a fórmula fundamental da trigonometria:

$$\begin{aligned} \text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \Leftrightarrow \text{sen}^2 \alpha + \frac{1}{64} &= 1 \\ \Leftrightarrow \text{sen}^2 \alpha &= \frac{63}{64} \\ \Leftrightarrow \text{sen } \alpha &= \pm \frac{\sqrt{63}}{8}. \end{aligned}$$

Como $\alpha \in]0, 180^\circ[$, por ser a amplitude do ângulo interno de um triângulo, então $\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{63}}{8} \approx 0.992$.

4. A afirmação “aumentando a intensidade do som em $150 \mu W/m^2$, o seu nível passa a ser 1,4% do quadrado do nível inicial” traduz-se através da equação

$$N(I + 150) = 0.014 \times [N(I)]^2.$$

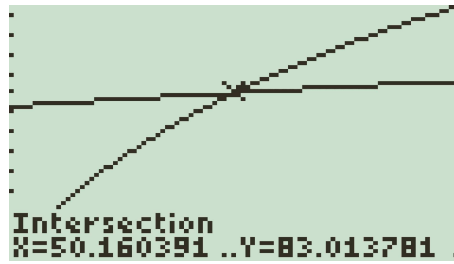
Introduzindo na calculadora gráfica as expressões

$$y = N(x + 150) = 60 + 10 \log_{10}(x + 150)$$

e

$$y = 0.014 \times [N(x)]^2 = 0.014 (60 + 10 \log_{10} x)^2$$

e recorrendo às suas potencialidades, obtemos os gráficos seguintes e o seu ponto de interseção no intervalo $[20, 80]$.



Podemos concluir que $x \approx 50$.

Assim, a intensidade inicial do som do despertador em causa é aproximadamente $50 \mu W/m^2$.

5. Como f é contínua em \mathbb{R} , também é em particular contínua no ponto 1.

Assim tem que verificar $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$. Como

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 \end{aligned}$$

então f é contínua no ponto 0 se e só se

$$\log_3 k = 2 \Leftrightarrow k = 3^2 \Leftrightarrow k = 9.$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(D)**.

6. Uma vez que:

- 2, a e b são três termos consecutivos de uma progressão geométrica, então $\frac{a}{2} = \frac{b}{a}$;
- $a-2$, b e 2 são três termos consecutivos de uma progressão aritmética então $b - (a-2) = 2 - b$.

Vamos determinar os valores de a e b através da resolução do sistema seguinte.

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{a}{2} = \frac{b}{a} \\ b - (a - 2) = 2 - b \end{cases} \stackrel{a \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (2b)^2 = 2b \\ 2b = a \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 4b^2 - 2b = 0 \\ - - - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(2b - 1) = 0 \\ - - - \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} b = 0 \vee b = \frac{1}{2} \\ - - - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $a \neq 0$ e $b \neq 0$ então $a = 1$ e $b = \frac{1}{2}$.

7. Sabemos que sendo A o afixo de z , como C se obtém a partir de A através de uma rotação centrada na origem de amplitude $\frac{\pi}{2}$, então C é o afixo de iz .

Como $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$, o afixo de B é $z + iz = z(1 + i)$.

Podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

8.

$$w = \frac{3z_1 - i\overline{z_2}}{1 + i^7} = \frac{3(2 - 3i) - i(1 + 2i)}{1 - i}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{6 - 9i - i + 2}{1 - i} = \frac{8 - 10i}{1 - i} \\
&= \frac{(8 - 10i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{8 + 8i - 10i + 10}{1^2 + 1^2} \\
&= \frac{18 - 2i}{2} = 9 - i.
\end{aligned}$$

A equação da circunferência de centro no afixo de z_1 e raio $\sqrt{53}$ é $|z - (2 - 3i)| = \sqrt{53}$. Substituindo w nesta equação vem:

$$|9 - i - (2 - 3i)| = \sqrt{53} \Leftrightarrow |7 + 2i| = \sqrt{53} \Leftrightarrow \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53} \Leftrightarrow \sqrt{53} = \sqrt{53}.$$

Podemos assim concluir que o afixo de w pertence à circunferência.

9.1. Vamos começar por determinar os vértices dos polígonos, resolvendo os sistemas seguintes.

$$\begin{cases} y = 300 \\ x + y = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 300 \\ x = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 150 \\ x + y = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 150 \\ y = 250 \end{cases}$$

Podemos concluir que $O(0, 0)$, $A(150, 0)$, $B(150, 250)$, $C(100, 300)$ e $D(0, 300)$.

Um vez que o valor máximo da região ocorre num destes vértices, vamos avaliar a função objetivo, definida por $L = 2x + y$ em cada um destes pontos:

- $L(0, 0) = 2 \times 0 + 0 = 0$;
- $L(150, 0) = 2 \times 150 + 0 = 300$;
- $L(100, 300) = 2 \times 100 + 300 = 500$;
- $L(150, 250) = 2 \times 150 + 250 = 550$;
- $L(0, 300) = 2 \times 0 + 300 = 300$.

Podemos concluir que o valor máximo alcançado na região é 550.

A opção correta é a **(C)**.

9.2. $\sin\left(3 \arccos \frac{1}{2}\right) = \sin\left(3 \times \frac{\pi}{3}\right) = \sin \pi = 0$.

A opção correta é a **(C)**.

10. Podemos obter as coordenadas do ponto A , ponto de interseção da reta AB com Ox , resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -2. \end{cases}$$

Podemos concluir que $A(-2, 0)$.

Podemos obter as coordenadas do ponto B , ponto de interseção da reta AB com Oy , resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4. \end{cases}$$

Podemos concluir que $B(0, 4)$.

As coordenadas do ponto médio são

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(\frac{-2 + 0}{2}, \frac{0 + 4}{2} \right) = (-1, 2).$$

A opção correta é a **(B)**.

11.1 Como

$$\frac{x-1}{2} = \frac{3-y}{4} = z \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-0}{1},$$

podemos concluir que $\vec{r} = (2, -4, 1)$ é um vetor diretor da reta r .

Como

$$\vec{r} \cdot \vec{c} = (2, -4, 1) \cdot (1, 1, 2) = 2 - 4 + 2 = 0$$

então $\vec{c} \perp \vec{r}$.

A opção correta é a **(C)**.

11.2

$$\begin{aligned} \lim \left(\frac{n + \ln a}{n} \right)^{n+2} &= \lim \left(1 + \frac{\ln a}{n} \right)^n \times \lim \left(1 + \frac{\ln a}{n} \right)^2 \\ &= e^{\ln a} \times 1^2 = a. \end{aligned}$$

A opção correta é a **(C)**.

12.1 As assíntotas paralelas aos eixos coordenados são as assíntotas verticais e as assíntotas horizontais.

Assíntotas verticais:

Começemos por notar que $D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Como

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e}{0^-} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e}{0^+} = +\infty$$

então $x = 1$ é uma equação da assíntota vertical do gráfico de h . É a única pois h é contínua em D_h , por ser a divisão de funções contínuas.

Assíntotas horizontais:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x-1} \\ &\stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^x}{x} \times \frac{x}{x-1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} \\ &= +\infty \times 1 = +\infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x-1} \\ &= \frac{e^{-\infty}}{-\infty - 1} = \frac{0}{-\infty} = 0. \end{aligned}$$

Podemos concluir que a reta de equação $y = 0$ é a única assíntota horizontal do gráfico de h .

12.2

$$\begin{aligned}
(x-1) \times h(x) + 2e^{-x} &= 3 \\
\Leftrightarrow (x-1) \times \frac{e^x}{x-1} + 2e^{-x} - 3 &= 0 \\
\Leftrightarrow e^x + 2e^{-x} - 3 &= 0 \wedge x \neq 1 \\
\Leftrightarrow (e^x)^2 - 3e^x + 2 &= 0 \wedge x \neq 1 \\
\Leftrightarrow e^x = 2 \vee e^x = 1 &\Leftrightarrow x = \ln 2 \vee x = 0.
\end{aligned}$$

O conjunto solução é $S = \{0, \ln 2\}$.

13.1 $D_g =]0, \pi[$.

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \left(\frac{1}{4} \cos(2x) - \cos x \right)' \\
&= -\frac{1}{4} \times 2 \sin(2x) + \sin x \\
&= -\frac{1}{2} \sin(2x) + \sin x.
\end{aligned}$$

$$g''(x) = -\frac{1}{2} \times 2 \times \cos(2x) + \cos x = -\cos(2x) + \cos x.$$

$$\begin{aligned}
g''(x) = 0 &\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos x \\
&\Leftrightarrow 2x = x + 2k\pi \vee 2x = -x + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow x = 2k\pi \vee x = \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$g''(x) = -\cos(2x) + \cos x$		+	0	-	
g		\cup	P.I.	\cap	

Como $\frac{\pi}{2} \in]0, \frac{2\pi}{3}[$ e $g''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0$ então $g''(x) > 0, \forall x \in]0, \frac{2\pi}{3}[$.

Como $\frac{5\pi}{6} \in]\frac{2\pi}{3}, \pi[$ e $g''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$ então $g''(x) < 0, \forall x \in]\frac{2\pi}{3}, \pi[$.

$$\begin{aligned}
g\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{1}{4} \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Podemos concluir que $\left(\frac{2\pi}{3}, g\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{3}{8}\right)$ são as coordenadas do ponto de inflexão do gráfico de g .

A concavidade do gráfico de g é voltada para cima em $]0, \frac{2\pi}{3}[$ e voltada para baixo em $]\frac{2\pi}{3}, \pi[$.

13.2 Como

$$g(-x) = \frac{1}{4} \cos(-2x) - \cos(-x) = \frac{1}{4} \cos(2x) - \cos x$$

e

$$\begin{aligned}
g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \frac{1}{4} \cos\left(2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
&= \frac{1}{4} \cos(\pi - 2x) - \sin x \\
&= -\frac{1}{4} \cos(2x) - \sin x.
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} f(x) &= g(-x) + g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= \frac{1}{4} \cos(2x) - \cos x - \frac{1}{4} \cos(2x) - \sin x \\ &= -\cos x - \sin x. \end{aligned}$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(B)**.

14 Seja a a abscissa do ponto P .

Como $f'(x) = 2x$ então $f'(a) = 2a$ é o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa a . A sua equação reduzida é da forma $y = 2ax + b$, onde $b \in \mathbb{R}$.

Substituindo as coordenadas do ponto de tangência $(a, f(a)) = (a, a^2)$ nesta equação temos

$$a^2 = 2a \times a + b \Leftrightarrow b = -a^2.$$

Podemos concluir que a equação reduzida da reta r é $y = 2ax - a^2$.

Uma vez que a reta s é perpendicular à reta r então o seu declive é $-\frac{1}{2a}$.

Vamos agora determinar uma equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f com declive $-\frac{1}{2a}$.

A sua equação reduzida é da forma $y = -\frac{1}{2a}x + b'$, $b' \in \mathbb{R}$.

Como

$$f'(x) = -\frac{1}{2a} \Leftrightarrow 2x = -\frac{1}{2a} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4a},$$

a sua abscissa é $-\frac{1}{4a}$.

$(-\frac{1}{4a}, f(-\frac{1}{4a})) = (-\frac{1}{4a}, \frac{1}{16a^2})$ são as coordenadas do respetivo ponto de tangência. Substituindo na equação da reta tangente temos

$$\frac{1}{16a^2} = -\frac{1}{2a} \times \left(-\frac{1}{4a}\right) + b' \Leftrightarrow b' = -\frac{1}{16a^2}.$$

Podemos concluir que a equação reduzida da reta s é $y = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2}$.

A solução do sistema seguinte vai-nos dar as coordenadas do ponto I , de interseção das retas r e s .

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y = 2ax - a^2 \\ y = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - - - \\ 2ax - a^2 = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} - - - \\ -16a^4 + 1 = -8ax - 32a^3x \wedge a \neq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} - - - \\ x = \frac{1-16a^4}{-8a(4a^2+1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - - - \\ x = \frac{(1-4a^2)(1+4a^2)}{-8a(4a^2+1)} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} y = -\frac{1}{2a} \times \frac{1-4a^2}{-8a} - \frac{1}{16a^2} \\ x = \frac{1-4a^2}{-8a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{4} \\ x = \frac{1-4a^2}{-8a} \end{cases} \end{aligned}$$

Concluimos deste modo que a ordenada do ponto I é sempre $-\frac{1}{4}$.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α - amplitude em radianos, do ângulo ao centro ; r - raio)

Área de um polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude em radianos, do ângulo ao centro ; r - raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ r - raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r - raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r - raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
 $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Complexos

$(\rho \text{cis } \theta)^n = \rho^n \text{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \text{cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{cis} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$
e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$

$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se X é $N(\mu, \sigma)$ então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$