Proposta de resolução

1.1. Para determinar a amplitude do ângulo VAC vamos determinar os vetores $\overrightarrow{AV}$ e $\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{AV} = V - A = (3,-1,2) - (2,1,0) = (1,-2,2)$.
$\overrightarrow{AC} = C - A = (0,-1,2) - (2,1,0) = (-2,-2,2)$.

$$\begin{aligned} & \cos\left(\overrightarrow{AV}\hat{\ }\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AV}\cdot\overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AV}|| \times ||\overrightarrow{AC}||} \\ \Leftrightarrow\ & \cos\left(\overrightarrow{AV}\hat{\ }\overrightarrow{AC}\right) = \frac{(1,-2,2)\cdot(-2,-2,2)}{||(1,-2,2)|| \times ||(-2,-2,2)||} \\ \Leftrightarrow\ & \cos\left(\overrightarrow{AV}\hat{\ }\overrightarrow{AC}\right) = \frac{-2+4+4}{\sqrt{1+4+4}\times\sqrt{4+4+4}} \\ \Leftrightarrow\ & \cos\left(\overrightarrow{AV}\hat{\ }\overrightarrow{AC}\right) = \frac{6}{3\sqrt{12}} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{AV}\hat{\ }\overrightarrow{AC} \approx 55^\circ. \end{aligned}$$

1.2. Para determinar uma equação do plano que contém a base da pirâmide, vamos começar por determinar um vetor normal ao plano.
Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AC]$. Então

$$M = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{1-1}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (1,0,1).$$

Como $\overrightarrow{MV}$ é um vetor normal ao plano ABC e

$$\overrightarrow{MV} = V - M = (3,-1,2) - (1,0,1) = (2,-1,1),$$

a sua equação cartesiana é da forma

$$2x - y + z + d = 0,$$

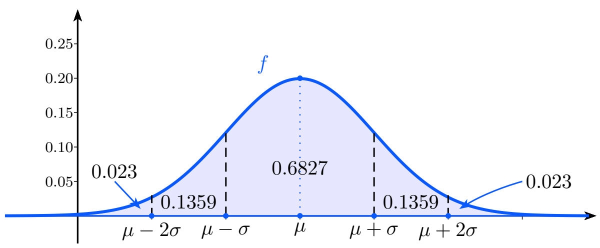
onde $d \in \mathbb{R}$.
Substituindo $A(2,1,0)$ na equação temos

$$2\times 2 - 1 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$$

e podemos concluir que $2x - y + z - 3 = 0$ é uma equação do plano pretendido.

2.1. Sabemos que se $X \sim N(\mu,\sigma)$ então:
$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$
$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$
$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$

Consideremos o gráfico seguinte, que ilustra parte destas propriedades.



Deste modo, como $X \sim N(5, 0.5)$, então
$P(X > \mu + 2\sigma) = P(X > 6) \approx 0.023$.
A opção correta é a **(C)**.

2.2. Vamos fazer uso do facto de $\lim \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$.
$\lim \left(\frac{n-2}{n}\right)^{3n} = \left(\lim \left(1 + \frac{-2}{n}\right)^n\right)^3 = \left(e^{-2}\right)^3 = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$.
A opção correta é a **(C)**.

3.1. Consideremos, relativamente à experiência de escolha aleatória de escolha de uma bola, os acontecimentos:
A: "a bola é amarela";
L: "a bola ter o logotipo desenhado".
Dos dados do enunciado podemos concluir que
$P\left(\overline{A} \cup \overline{L}\right) = \dfrac{15}{16}$. Deste modo,

$$
\begin{aligned}
& P\left(\overline{A} \cup \overline{L}\right) = \frac{15}{16} \\
\Leftrightarrow\ & P\left(\overline{A \cap L}\right) = \frac{15}{16} \\
\Leftrightarrow\ & 1 - P\left(A \cap L\right) = \frac{15}{16} \\
\Leftrightarrow\ & P\left(A \cap L\right) = \frac{1}{16}.
\end{aligned}
$$

Como as bolas são indistinguíveis ao tato e são selecionadas ao acaso, a Lei de Laplace garante que

$$
\begin{aligned}
& P\left(A \cap L\right) = \frac{1}{16} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\#(A \cap L)}{\#E} = \frac{1}{16} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{3}{\#E} = \frac{1}{16} \\
\Leftrightarrow\ & \#E = 48.
\end{aligned}
$$

Podemos concluir que a caixa contém 48 bolas.

3.2. Vamos determinar a probabilidade pedida recorrendo à Lei de Laplace.
Para determinar os casos favoráveis vamos recorrer ao esquema seguinte e ao Princípio fundamental da contagem.

$$\underbrace{\underline{L}\ \underline{L}\ \underline{L}}_{3!}\ \underbrace{\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}}_{7!}$$

Relativamente aos casos favoráveis temos:

$3! \times 7! \times 8$

Há 8 modos de colocar as bolas com logotipo juntas
Há 7! permutações das bolas sem logotipo
Há 3! permutações das bolas com logotipo

Uma vez que os casos possíveis são 10!, correspondentes às permutações das 10 bolas, a probabilidade pedida é

$$\frac{3! \times 7! \times 8}{10!} = \frac{1}{15}.$$

A opção correta é a **(B)**.

4. Comecemos por notar que, para os números serem:

- ímpares, o último algarismo deve ser 5 ou 7;
- superiores a seis milhões, o primeiro algarismo deve ser 6 ou 7.

A divisão das diferentes situações em três casos e a respetiva esquematização clarificam a resolução do problema.
Caso 1: o primeiro algarismo é 6 e o último 5:
O esquema seguinte exemplifica a situação.

$$\underline{\ 6\ }\quad \underline{\ 5\ }\quad \underline{\ 6\ }\quad \underline{\ 7\ }\quad \underline{\ 6\ }\quad \underline{\ 6\ }\quad \underline{\ 5\ }$$

Como nos algarismos que não estão nos extremos há três algarismos iguais a 6 então há $\frac{5!}{3!}$ números nestas condições.

Caso 2: o primeiro algarismo é 6 e o último 7:
O esquema seguinte exemplifica a situação.

$$\underline{\ 6\ }\quad \underline{\ 5\ }\quad \underline{\ 6\ }\quad \underline{\ 5\ }\quad \underline{\ 6\ }\quad \underline{\ 6\ }\quad \underline{\ 7\ }$$

Como nos algarismos que não estão nos extremos há três algarismos iguais a 6 e dois iguais a 5 então há $\frac{5!}{2!3!}$ números nestas condições.

Caso 3: o primeiro algarismo é 7 e o último 5:
O esquema seguinte exemplifica a situação.

$$\underline{\ 7\ }\quad \underline{\ 5\ }\quad \underline{\ 6\ }\quad \underline{\ 6\ }\quad \underline{\ 6\ }\quad \underline{\ 6\ }\quad \underline{\ 5\ }$$

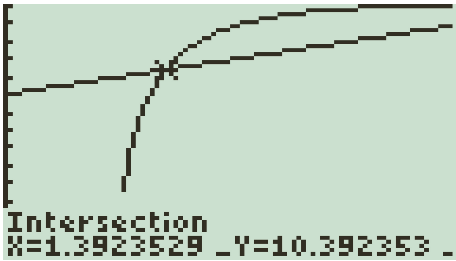
Como nos algarismos que não estão nos extremos há quatro algarismos iguais a 6 então, apenas a troca da posição do 5 origina números diferentes. Há 5 números nestas condições.
No total temos $\frac{5!}{3!} + \frac{5!}{2!3!} + 5 = 35$ números.

5. O problema pode ser equacionado com $d = x + 9$.
Como $r_1 = 7$ e $r_2 = 8$ temos

$$\begin{aligned} & d = x + 9 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{\left[(7+8)^2 - x^2\right]\left[x^2 - (7-8)^2\right]}}{x} = x + 9 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{(225 - x^2)(x^2 - 1)}}{x} = x + 9 \end{aligned}$$

e $\left]r_2 - r_1, \sqrt{r_2^2 - r_1^2}\right[= \left]1, \sqrt{15}\right[$.

Introduzindo na calculadora gráfica as expressões $y = \frac{\sqrt{(225-x^2)(x^2-1)}}{x}$ e $y = x + 9$ e recorrendo às suas potencialidades, obtemos os gráficos seguintes e o seu ponto de interseção no intervalo $\left]1, \sqrt{15}\right[$.



Podemos concluir que $x \approx 1.4$.

6. $\overline{z} = -1 - 2i$.
Sendo $\theta \in [0, 2\pi[$, como o afixo de $\overline{z}$ pertence ao 3.° quadrante,

$$\text{tg}\theta = \frac{-2}{-1} \Leftrightarrow \theta = \text{tg}^{-1}(2) + \pi \Leftrightarrow \theta \approx 4.25 \in \left]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[.$$

A opção correta é a **(D)**.

7. Como $r > 1$ e $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, a sucessão (a_n) é monótona crescente.
Sejam a_p e a_{p+1} dois termos consecutivos da sucessão.

$$\begin{aligned} &\begin{cases} a_p + a_{p+1} = 12 \\ a_{p+1} - a_p = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_p + r \times a_p = 12 \\ r \times a_p - a_p = 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a_p = \frac{12}{1+r} \\ a_p(r-1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ \frac{12r-12-3-3r}{1+r} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} --- \\ 9r - 15 = 0 \wedge r \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_p = \frac{9}{2} \\ r = \frac{5}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Podemos concluir que a razão é igual a $\frac{5}{3}$.

8.

$$\begin{aligned} &\ln\left(a^2 - b^2\right) - 2\ln(a+b) = \ln(a-b) + \ln(a+b) - 2\ln(a+b) \\ = &\ln(a-b) - \ln(a+b) = \ln(a-b) - \ln(2(a-b)) \\ = &\ln(a-b) - [\ln 2 + \ln(a-b)] = -\ln 2 \approx -0.7. \end{aligned}$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(C)**.

9.1. Note-se que $\vec{n}_\alpha(1,1,1)$ e $\vec{n}_\beta(2,2,2)$ são vetores normais aos planos α e β, respetivamente. Como $\vec{n}_\beta = 2\vec{n}_\alpha$, os planos α e β são paralelos. Por outro lado,

$$x + y + z = 1 \Leftrightarrow 2x + 2y + 2z = 2 \not\Leftrightarrow 2x + 2y + 2z = 1$$

permite-nos concluir que os planos α e β são estritamente paralelos. Consequentemente, a interseção dos três planos é o conjunto vazio.
Um outro modo de concluir o pretendido é através da resolução do sistema seguinte:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 2 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \\ --- \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 1 = 2 \\ --- \\ --- \end{cases} \end{aligned}$$

Como o sistema é impossível, a interseção dos três planos é o conjunto vazio.
Podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

9.2. Como a área do círculo é 9π,

$$\pi \times \overline{OF_2}^2 = 9\pi \Leftrightarrow \overline{OF_2} = \pm 3.$$

Consequentemente, o diâmetro do círculo é igual a 6.
Como a distância focal, $2c$, e o eixo menor da elipse, $2b$, são iguais ao diâmetro do círculo então

$$2c = 2b = 6 \Leftrightarrow c = b = 3.$$

Uma vez que $b^2 + c^2 = a^2$ então

$$3^2 + 3^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 = 18.$$

Assim, a equação reduzida da elipse é

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

A opção correta é a **(A)**.

10.

$$\begin{aligned} w &= \frac{z_1 + i^6 + 2\overline{z_1}}{z_1 - z_2} \\ &= \frac{3 + 4i - 1 + 6 - 8i}{-1 - 2i} \\ &= \frac{8 - 4i}{-1 - 2i} \\ &= \frac{(8 - 4i)(-1 + 2i)}{(-1 - 2i)(-1 + 2i)} \\ &= \frac{20i}{5} = 4i. \end{aligned}$$

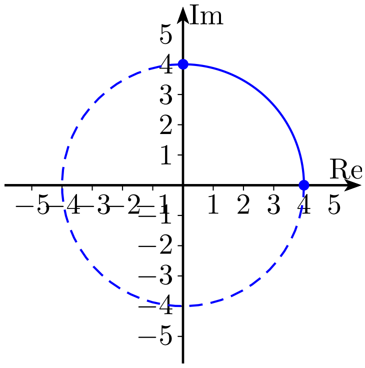
Assim,

- $|z| = |w| \Leftrightarrow |z| = 4$ representa, no plano de Argand, a circunferência centrada na origem com raio 4;
- $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ representa os complexos cujo afixo se encontra no eixo real ou acima deste;
- $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ representa os complexos cujo afixo se encontra no eixo imaginário ou à direita deste.

Na figura seguinte está representada no plano de Argand a região definida pela condição

$$|z| = |w| \wedge \mathrm{Im}(z) \geq 0 \wedge \mathrm{Re}(z) \geq 0.$$

Trata-se de um arco de circunferência.



Como o perímetro da circunferência completa é
$2\pi \times 4 = 8\pi$, o perímetro do arco de circunferência é $\frac{8\pi}{4} = 2\pi$ unidades de comprimento.

11. $2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$.
Como $-\frac{2\pi}{3} \in [-\pi, 0]$ e $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ então a opção correta é a **(B)**.

12.1. Consideramos a seguinte tabela de dupla entrada com todas as somas possíveis.

1.º\2.º	−1	1	1	1	1	1
−1	−2	0	0	0	0	0
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2

Comecemos por notar que $S_X = \{0, -2, 2\}$.
Como $P(X=0) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$, $P(X=-2) = \frac{1}{36}$ e $P(X=2) = \frac{25}{36}$, então $k = 0$ e podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

12.2. O período de um oscilador harmónico definido por $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, onde $A > 0$, $\omega > 0$ e $\phi \in [0, 2\pi[$, é dado por $P = \frac{2\pi}{\omega}$. Como $\frac{2\pi}{\pi} = 2$, o período é 2.
Podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

13.1. Se $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1(x - \ln x) - x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(1 - \ln x)^2} \\ &= \frac{x - \ln x - x + 1}{(1 - \ln x)^2} \\ &= \frac{1 - \ln x}{(1 - \ln x)^2}. \end{aligned}$$

Assim, $f'(1) = \frac{1 - \ln 1}{(1 - \ln 1)^2} = 1$ e a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1 é da forma $y = x + b$, $b \in \mathbb{R}$.
Como $f(1) = \frac{1}{1 - \ln 1} = 1$ então $T(1,1)$ é um ponto da reta tangente em estudo.
Substituindo as coordenadas de T na equação $y = x + b$ temos

$$1 = 1 + b \Leftrightarrow b = 0.$$

Podemos concluir que $y = x$ é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

13.2. Para f ser contínua, tem que se verificar:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0).$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{x} \\
&\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{1+\cos x} \\
&= 1 \times \frac{0}{1+1} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x-\ln x} \\
&= \frac{0}{0-\ln 0^+} = \frac{0}{0-(-\infty)} = 0.
\end{aligned}$$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$ então f é contínua no ponto 0.

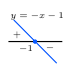
14.1. $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Para estudar a monotonia e a existência de extremos da função g vamos começar por determinar a derivada e os seus zeros. $g'(x) = \frac{-e^{-x}\times x - e^{-x}\times 1}{x^2} = \frac{e^{-x}(-x-1)}{x^2}$.

$$\begin{aligned}
& g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(-x-1) = 0 \wedge x^2 \neq 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(e^{-x} = 0 \vee -x-1 = 0\right) \wedge x \neq 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = -1.
\end{aligned}$$

Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de g' e da monotonia de g.

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
e^{-x}	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$-x-1$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
x^2	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	ND	$-$
g	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$



Podemos concluir que g é crescente em $]-\infty,-1]$ e decrescente em $[-1,0[$ e em $]0,+\infty[$.
$g(-1) = \frac{e}{-1} = -e$ é máximo relativo.

14.2. O declive da assíntota oblíqua é dado por

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x}.$$

Como $h(x) = g(x) + 2x - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{e^{-x}}{x} + 2x - \frac{1}{\sqrt{x}}$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x^2} + 2 - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{0}{+\infty} + 2 - \frac{1}{+\infty} = 2.$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(B)**.

15. Seja α a inclinação da reta OB. Como o seu declive é $\frac{4}{3}$ então $\tan\alpha = \frac{4}{3}$.
A inclinação da reta r é $\frac{\alpha}{2}$ e o seu declive $\tan\frac{\alpha}{2}$.
Como $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ então
$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.
Assim, $\tan\alpha = \tan\left(2 \times \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$.
Se $1 - \tan^2\frac{\alpha}{2} \neq 0$ temos

$$\begin{aligned}
\tan\alpha = \frac{4}{3} &\Leftrightarrow \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{4}{3} \\
&\Leftrightarrow 6\tan\frac{\alpha}{2} = 4 - 4\tan^2\frac{\alpha}{2} \\
&\Leftrightarrow 4\tan^2\frac{\alpha}{2} + 6\tan\frac{\alpha}{2} - 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \vee \tan\frac{\alpha}{2} = -2.
\end{aligned}$$

Como a reta r tem declive positivo e passa na origem, podemos concluir que a sua equação reduzida é $y = \frac{1}{2}x$.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (*alpha* – amplitude em radianos, do ângulo ao centro ; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (*alpha* – amplitude em radianos, do ângulo ao centro ; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Áreadabase} \times \textit{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Áreadabase} \times \textit{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\frac{sinA}{a} = \frac{sinB}{b} = \frac{sinC}{c}$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$ então:
$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$
$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$
$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$
$(uv)' = u'v + uv'$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$(u^n)' = nu^{n-1}u'$ $(n \in \mathbb{R})$
$(\sin u)' = u' \cos u$
$(\cos u)' = -u' \sin u$
$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(e^u)' = u' e^u$
$(a^u)' = u' a^u \ln a$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ $(p \in \mathbb{R})$