Academia Aberta

Folha n.º 1

FORMULÁRIO DE MATEMÁTICA 12.º

PROBABILIDADES E ANÁLISE COMBINATÓRIA

Lei de Laplace: $P(A) = \dfrac{\text{n.º de casos favoráveis}}{\text{n.º de casos possíveis}}$ $0 \leq P(A) \leq 1$ $P(\text{ac. imp.}) = 0$ $P(\text{ac. certo.}) = 1$

	Interessa a ordem?	Há repetição de elementos?
Permutação de n: $P_n = n!$	Sim	Não
Arranjos sem repetição: $^nA_p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$, $n \geq p$	Sim	Não
Combinações de p no meio de n: $^nC_p = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$, $n \geq p$	Não	Não
Arranjos com repetição de p no meio de n: $^nA'_p = n^p$	Sim	Sim

Sucessivamente $\rightarrow$ ARRANJOS

Simultaneamente $\rightarrow$ COMBINAÇÕES

Códigos, Sorteios, Grupos c/ cargos } Interessa a ordem $\rightarrow$ ARRANJOS

Comissões, Grupos, Conjuntos } Não interessa a ordem $\rightarrow$ COMBINAÇÕES

e $\rightarrow \times$

ou $\rightarrow +$

- Leis de De Morgan: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
- Se $A \cap B = \emptyset$ (são acontecimentos incompatíveis) então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Acontecimentos compatíveis: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Probabilidade de acontecimentos contrários: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Probabilidade condicionada: $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $P(B) \neq 0$
- A e B são acontecimentos independentes sse $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ ou $P(A \mid B) = P(A)$.

TRIÂNGULO DE PASCAL

1	linha 0	$^0C_0$
1 1	linha 1	$^1C_0$ $^1C_1$
1 2 1	linha 2	$^2C_0$ $^2C_1$ $^2C_2$
1 3 3 1	linha3	$^3C_0$ $^3C_1$ $^3C_2$ $^3C_3$
1 4 6 4 1	linha 4	$^4C_0$ $^4C_1$ $^4C_2$ $^4C_3$ $^4C_4$
1 5 10 10 5 1	linha 5	$^5C_0$ $^5C_1$ $^5C_2$ $^5C_3$ $^5C_4$ $^5C_5$
1 6 15 20 15 6 1	linha 6	$^6C_0$ $^6C_1$ $^6C_2$ $^6C_3$ $^6C_4$ $^6C_5$ $^6C_6$

PROPRIEDADES DAS COMBINAÇÕES

1. Em cada linha são iguais os números equidistantes dos extremos
   $^nC_p = {^nC_{n-p}}$, $\forall n,\ p \in I\!N_0, n \geq p$
2. A soma de dois números consecutivos de uma linha é igual ao número que na linha seguinte fica entre eles
3. $^nC_p + {^nC_{p+1}} = {^{n+1}C_{p+1}}$, $\forall n,\ p \in I,N n \geq p$

   A soma de todos os elementos de cada linha é uma potência de 2, isto, é igual a $^nC_0 + {^nC_1} + \ldots + {^nC_n} = 2^n$.

NOTA: A linha n do Triângulo de Pascal tem $n+1$ elementos. O segundo e o penúltimo elementos de cada linha dão-nos o seu número.

BINÓMIO DE NEWTON

$$(a+b)^n = {^nC_0}a^nb^0 + {^nC_1}\,a^{n-1}b^1 + \ldots + {^nC_{n-1}}a^1b^{n-1} + {^nC_n}a^0b^n \quad \text{ou} \quad (a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} {^nC_p}a^{n-p}b^p$$

Observando a fórmula podemos concluir que:

- Os coeficientes no desenvolvimento de $(a+b)^n$ são os números da linha n do Triângulo de Pascal;
- O desenvolvimento de $(a+b)^n$ tem $n+1$ termos;
- No desenvolvimento de $(a-b)^n$ os termos são alternadamente + e –;
- O grau dos monómios do desenvolvimento de $(a+b)^n$ é n;
- Termo geral do desenvolvimento $T_{p+1} = {^nC_p}a^{n-p}b^p$;
- A ordem do termo médio:
  - $\dfrac{n}{2} + 1$ se n é par (há um só)
  - $\dfrac{n+1}{2}$ e $\dfrac{n+1}{2} + 1$ se n é ímpar (há dois);
- O termo independente de x corresponde a um termo em x^0;
- O termo constante não tem parte literal e logo corresponde a um termo em x^0;
- O termo em x corresponde a um termo em x^1.

FORMULÁRIO DE MATEMÁTICA 12.º

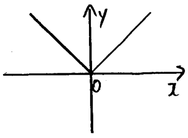
FUNÇÕES

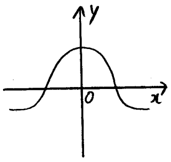
FUNÇÃO PAR

$f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$

O gráfico é simétrico em relação eixo Oy

Exemplos:



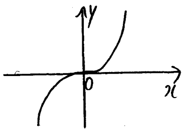


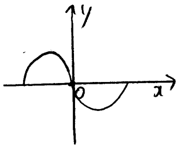
FUNÇÃO ÍMPAR

$f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$

O gráfico é simétrico em relação à origem.

Exemplos:



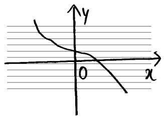


FUNÇÃO INJECTIVA

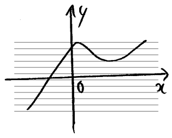
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in D_f$

Qualquer recta horizontal intersecta gráfico em apenas um ponto.

Exemplos:



é injectiva



não é injectiva

- **Definição de limite segundo Heine**
  $\lim_{x \to a} f(x) = b$ sse para toda a sucessão de objectos $x_n \to a \wedge x_n \in D_f$ temos $\lim f(x_n) = b$.
- **Continuidade** (O gráfico não apresenta interrupções)
  f é contínua em $x = a$ sse $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$
  isto é $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

	Parâmetro	Alteração da função em relação à inicial
$f(x)+k$	$k>0$	Desloca-se para cima
	$k<0$	Desloca-se para baixo
$f(x-k)$	$k>0$	Desloca-se para a direita
	$k<0$	Desloca-se para a esquerda
$kf(x)$	$k>1$	Estica segundo o eixo dos yy
	$0<k<1$	Encolhe segundo o eixo dos yy
$f(kx)$	$0<k<1$	Estica segundo o eixo dos xx
	$k>1$	Encolhe segundo o eixo dos xx
$-f(x)$		Simetria em relação ao eixo dos xx
$f(-x)$		Simetria em relação ao eixo dos yy
$\lvert f(x) \rvert$		Mantêm-se os pontos de ordenada positiva ou nula e para os pontos de ordenada negativa têm-se uma simetria em relação ao eixo dos xx
$f(\lvert x \rvert)$		Mantêm-se os pontos de abcissa positiva ou nula e para os pontos de abcissa negativa têm-se uma simetria em relação ao eixo dos yy

- **Teorema de Bolzano** – Toda a função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ não passa de um extremo a outro sem passar por todos os valores intermédios
  $$\left.\begin{array}{l} f \text{ contínua em } [a, b] \\ f(a) < k < f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists x \in \,]a, b[\, : f(x) = k$$
- **Corolário do Teorema de Bolzano (Para Zeros)**
  $$\left.\begin{array}{l} f \text{ contínua em } [a, b] \\ f(a) \times f(b) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists x \in \,]a, b[\, : f(x) = 0 \quad (\text{Existe pelo menos um zero em }]a, b[.)$$
  NOTA: Se pedirem para provar que o zero é único estuda-se a monotonia da função em $]a, b[$.
- $tvm_{[a,b]} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \to$ dá-nos a variação média por unidade do eixo Ox. Geometricamente é o declive da recta secante ao gráfico de f nos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$.
- **Definição de derivada:** $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $\quad f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
- Também se chama a $f'(x_0)$ taxa de variação instantânea em $x = x_0$.
- Velocidade – 1.ª derivada; Aceleração – 2.ª derivada.
- Derivadas laterais $f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $\quad f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- $f'(x_0)$ existe sse $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$
- Significado geométrico de derivada: $m_t = f'(a)$ onde t é a recta tangente e a a abcissa do ponto de tangência.
- **NOTA:** Também se pode calcular m_t através da fórmula $m_t = \tan \alpha$ onde α é a inclinação da recta t ou também pela fórmula $m_t = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ conhecidos dois pontos da recta.
- Tangente ao gráfico de f num ponto $\begin{cases} \text{Ponto de tangência } (a, f(a)) \\ m_t = f'(a) \end{cases}$ $\quad t : y = m_t x + b$ ou $y - f(a) = m_t(x - a)$
- Normal ao gráfico de f num ponto $\begin{cases} \text{Ponto de tangência } (a, f(a)) \\ m_n = -\dfrac{1}{m_t} \end{cases}$ $\quad n : y - f(a) = -\dfrac{1}{m_t}(x - a)$.
- Uma função é derivável num ponto quando admite derivada finita nesse ponto.
- Teorema da derivabilidade e continuidade: Toda a função com derivada finita num ponto (intervalo) é contínua nesse ponto (intervalo).

FORMULÁRIO DE MATEMÁTICA 12.º

REGRAS DE DERIVAÇÃO

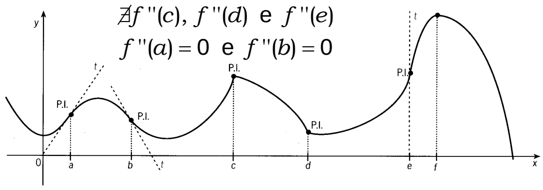
1. $(k)'=0$;
2. $x'=1$
3. $(mx+b)'=m$
4. $(kx^n)'=k\times n\times x^{n-1}$
5. $(f\pm g)'=f'\pm g'$
6. $(f\times g)'=f'\times g+f\times g'$
7. $(k\times f)'=k\times f'$
8. $\left(\dfrac{k}{x}\right)'=-\dfrac{k}{x^2}$
9. $(f^n)'=n\times f^{n-1}\times f'$
10. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$
11. $(f\circ g)'(x)=g'(x)\times f'(g(x))$

- Monotonia: D_f / $f'(x)$ / $f'(x)=0$ / Sinal de $f'(x)$. $f'(x)>0\Rightarrow f$ é $\nearrow$; $f'(x)<0\Rightarrow f$ é $\searrow$;
- Extremos relativos:
  - Máximo – f' passa de + para –.
  - Mínimo – f' passa de – para +.

x		a	
$f'(x)$	+	0	–
f	$\nearrow$		$\searrow$

x		a	
$f'(x)$	–	0	+
f	$\searrow$		$\nearrow$

- Concavidades: D_f / $f''(x)$ / $f''(x)=0$ / Sinal de $f''(x)$. $f''(x)>0\Rightarrow f$ é $\cup$; $f''(x)<0\Rightarrow f$ é $\cap$;
  Pontos de inflexão – pontos onde o gráfico muda o sentido da concavidade.



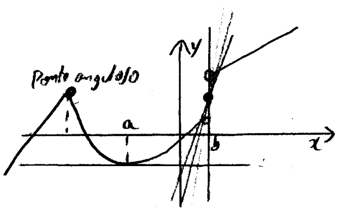
- Assimptotas $\begin{cases}\text{A. verticais}\\ \text{A. não verticais}\begin{cases}\text{A. horizontais} - m=0\\ \text{A. obliquas} - m\neq 0\end{cases}\end{cases}$
  - $x=a$ é A. vertical sse $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty$
  - A recta de equação $y=b$ é assimptota horizontal do gráfico de f se $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$
  - A recta de equação $y=mx+b$ é uma assimptota obliqua do gráfico de f quando $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ se $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(mx+b)\right]=0$ (ou respectivamente $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(mx+b)\right]=0$).

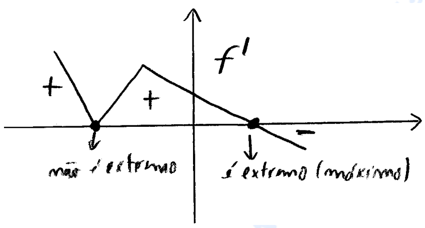
  <u>NOTA:</u> Na recta de equação $y=mx+b$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\begin{cases}0\text{, pode ser A.H.}\\ \text{n.º real}\\ \pm\infty\text{ não há A.O. nem A.H.}\end{cases}\qquad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]=\begin{cases}\text{n.º real}\\ \pm\infty\text{ não há A.O.}\end{cases}$$

  <u>NOTA:</u> Se uma função é contínua em $I\!R$ não admite A. verticais. Se uma função tem domínio $I\!R$ pode ou não admitir A.V. Se uma função tem como domínio um intervalo limitado não admite A. não verticais (A.H. e A.O.) mas poderá admitir A. verticais se o intervalo for aberto e verificar a definição.

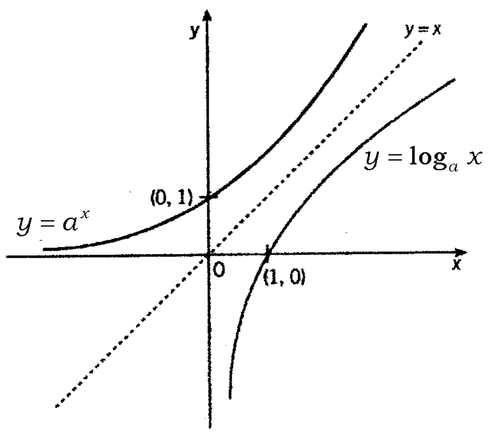
- **Gráficos:**
  - Função: $\nearrow$ $\searrow$ $\rightarrow$ / 1.ª derivada: + – 0 — Nos pontos angulosos não há derivada
  - Função: $\cup$ $\cap$ / 2.ª derivada: + – — Quando há mudança do sentido da concavidade há ponto de inflexão e $f''(x)=0$
  - Se $f'(a)$ é infinita a recta tangente ao gráfico é vertical
  - Se $f'(a)=0$ a recta tangente ao gráfico é horizontal e tem de equação $y=f(a)$.
  - Quando f' se anula e há mudança de sinal então o gráfico tem 1 extremo relativo.





FORMULÁRIO DE MATEMÁTICA 12.º

FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARITMICA



Função exponencial (base $a > 1$)

$f : IR \to IR$

$x \mapsto a^x$

- $D = IR \quad D' = IR^+$
- é sempre positiva;
- não tem zeros;
- é contínua;
- é injectiva
- $y = 0$ é A.H. unilateral quando $x \to -\infty$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0 \quad \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$
- é crescente: $\forall x_1, x_2 \in D_f,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Função logarítmica (base $a > 1$)

$g : IR \to IR$

$x \mapsto \log_a x$

- $D = IR^+ \quad D' = IR$
- tem um zero;
- é contínua;
- é injectiva;
- $x = 0$ é A.V. unilateral
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$;
- é crescente: $\forall x_1, x_2 \in D_g,\ x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$.

Definição de logaritmo: $\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y,\ \forall x > 0,\ a \in IR^+ \setminus \{1\}$

LIMITES DE REFERÊNCIA (os que estão a vermelho não podem ser usados diretamente)

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \lim\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k,\ k \in IR \qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^p} = 0,\ p \in IR^+$

$\lim\left(1+\frac{k}{u_n}\right)^{u_n} = e^k,\quad u_n \to \pm\infty,\ k \in IR \qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x} = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^p}{\ln x} = +\infty,\ p \in IR^+$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^p} = +\infty,\ a > 1,\ p \in IR$ e logo $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)} = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^p}{a^x} = 0,\ a > 1,\ p \in IR$ e logo $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^p}{e^x} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1 \qquad \lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1} = 1$

NOTA: Quando, nos limites anteriores se substitui x por $f(x)$ mantém-se as igualdades.

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(e^x)' = e^x \quad (e^u)' = u' \times e^u, \qquad (a^x)' = a^x \times \ln a \qquad (a^u)' = u' \times a^u \times \ln a \qquad u$ – função de x

$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u} \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$

REGRAS OPERATÓRIAS DOS LOGARITMOS

$\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(xy) \qquad \log_a(x) - \log_a(y) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right) \qquad p\log_a(x) = \log_a(x^p)$;

$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ e consequentemente $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ (fórmula da mudança de base)

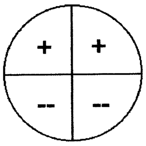
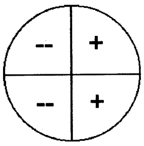
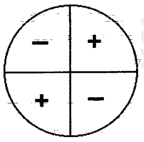
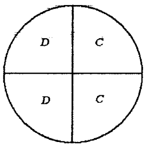
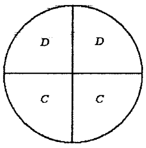
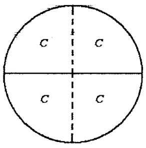
$a^{\log_a(x)} = x \quad \log_a a^x = x \quad \log_a \frac{1}{x} = -\log_a x \quad \log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1.$

Propriedades das potências:

1. $a^n \times a^m = a^{n+m}$
2. $a^n \times b^n = (ab)^n$
3. $(a^n)^m = a^{n\times m}$
4. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
5. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
6. $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n};\ a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$
7. $a^{-n} = \frac{1}{a^n};\ a^{-1} = \frac{1}{a}$

FORMULÁRIO DE MATEMÁTICA 12.º

TRIGONOMETRIA

	SENO	CO-SENO	TANGENTE
SINAL			
MONOTONIA E VALORES			
Período P. mínimo	2π / 360º $\text{sen}(x+2k\pi)=\text{sen}\,x$	2π / 360º $\cos(x+2k\pi)=\cos x$	π / 180º $\text{tg}(x+k\pi)=\text{tg}\,x$
D	IR	IR	$IR\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$
D'	$[-1,1]$	$[-1,1]$	IR

$\text{sen}\,\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; $\cos\alpha=sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

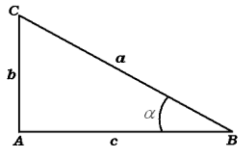
$-\text{sen}(\alpha)=\text{sen}(-\alpha)$; $-\cos(\alpha)=\cos(\pi-\alpha)$;

Resultados de referência

α	$30^\circ=\frac{\pi}{6}$	$45^\circ=\frac{\pi}{4}$	$60^\circ=\frac{\pi}{3}$
$\text{sen}\,\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\text{tg}\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fórmulas trigonométricas

$$\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$\text{sen}^2 x=1-\cos^2 x$$
$$\cos^2 x=1-\text{sen}^2 x$$
$$\text{tg}\,\alpha=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$$
$$1+\frac{1}{\text{tg}^2\alpha}=\frac{1}{\text{sen}^2\alpha}$$
$$\text{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$



$\text{sen}\,\alpha=\frac{b}{a}$; $\cos\alpha=\frac{c}{a}$; $\text{tg}\,\alpha=\frac{b}{c}$

SOHCAHTOA

Comprimento de um arco de circunferência: αr

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α em radianos)

- **Equações trigonométricas**

$$\text{sen}\,x=\text{sen}\,\alpha\Leftrightarrow x=\alpha+2k\pi\ \vee\ x=\pi-\alpha+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\cos x=\cos\alpha\Leftrightarrow x=\alpha+2k\pi\ \vee\ x=-\alpha+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\text{tg}\,x=\text{tg}\,\alpha\Leftrightarrow x=\alpha+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

- **Fórmulas da soma e diferença de ângulos**

$$\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b \qquad \text{sen}(a\pm b)=\text{sen}\,a\cos b\pm\cos a\,\text{sen}\,b \qquad \text{tg}(a\pm b)=\frac{\text{tg}(a)\pm\text{tg}(b)}{1\mp\text{tg}(a)\times\text{tg}(b)}$$

$$\cos(2a)=\cos^2 a-\text{sen}^2 a \qquad \text{sen}(2a)=2\,\text{sen}\,a\cos a \qquad \text{tg}(2a)=\frac{2\,\text{tg}\,a}{1-\text{tg}^2 a}$$

- **Limites de referência**

$$\lim_{x\to0}\frac{\text{sen}\,x}{x}=1 \qquad \lim_{f(x)\to0}\frac{\text{sen}\,f(x)}{f(x)}=1 \qquad \lim_{x\to0}\frac{x}{\text{sen}\,x}=1 \qquad \lim_{f(x)\to0}\frac{f(x)}{\text{sen}\,f(x)}=1 \qquad \lim_{x\to0}\frac{\text{tg}\,x}{x}=1$$

- **Derivadas das funções trigonométricas**

$$(\text{sen}\,x)'=\cos x \qquad (\cos x)'=-\text{sen}\,x \qquad (\text{tg}\,x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(\text{sen}\,u)'=u'\cos u \qquad (\cos u)'=-u'\text{sen}\,u \qquad (\text{tg}\,u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$$

$f:x\longrightarrow y=\text{sen}\,x$

- Gráfico – sinusóide
- Função ímpar: $\text{sen}(-x)=-\text{sen}\,x$

(gráfico simétrico em relação à origem)

$f:x\longrightarrow y=\cos x$

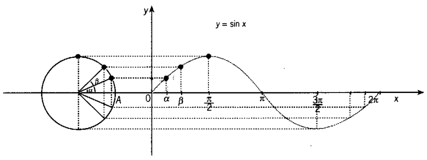
- Gráfico – co-sinusóide
- Função par: $\cos(-x)=\cos x$

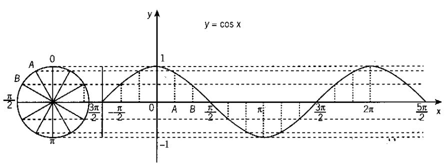
(gráfico simétrico em relação a Oy)

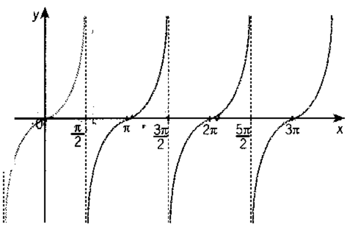
$f:x\longrightarrow y=\text{tg}\,x$

- Gráfico – tangentóide
- Função ímpar $\text{tg}(-x)=-\text{tg}\,x$

(gráfico simétrico em relação à ori gem)







FORMULÁRIO DE MATEMÁTICA 12.º

COMPLEXOS

FORMA ALGÉBRICA

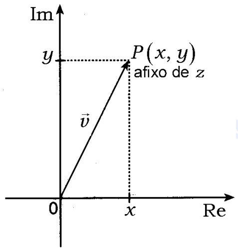
$z = x + yi \rightarrow$ Ponto (x, y),

vector (x, y)

$z = x + yi \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = x \\ \mathrm{Im}(z) = y \end{cases}$

z é real $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$;

z é imaginário puro $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = 0 \\ \mathrm{Im}(z) \neq 0 \end{cases}$



Igualdade de complexos

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \\ \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2) \end{cases}$

Complexos conjugados

$z = x + yi \quad \bar{z} = x - yi$

$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$ é um número real

$z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$; $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

$|z_1 \times z_2| = |z_1||z_2|$; $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

Operações

Adição: $z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i)$
$= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$

Subtracção: $z_1 - z_2 = (x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i)$
$= (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$

Multiplicação: $z_1 \times z_2 = (x_1 + y_1 i) \times (x_2 + y_2 i)$ (distributividade)

Divisão: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}$

Potenciação: $i^0 = 1 \quad i^1 = i \quad i^2 = -1 \quad i^3 = -i$

As potências de base i repetem-se de 4 em 4.

Se $n = 4q + r,\ n, q, r \in \mathbb{N}_0$ então $i^n = i^r$

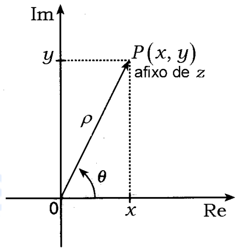
FORMA TRIGONOMÉTRICA

$z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$
$= \rho\,\mathrm{cis}\,\theta = \rho e^{i\theta}$

$\rho \rightarrow$ módulo de z

$\theta \rightarrow$ argumento de z

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\theta = \dfrac{y}{x}$



Nota: Para achar θ devemos considerar o quadrante a que pertence o afixo de z.

$-\pi < \theta \leq \pi \rightarrow$ condição do argumento principal;

$0 \leq \theta < 2\pi \rightarrow$ condição do argumento positivo mínimo;

Igualdade de complexos

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1 e^{i\theta_1} = \rho_2 e^{i\theta_2} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Conjugado: $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$

Simétrico: $-z = \rho e^{i(\theta + \pi)}$

Operações:

Multiplicação: $z_1 \times z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

Divisão: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

Potenciação : $z^n = \rho^n e^{in\theta}$

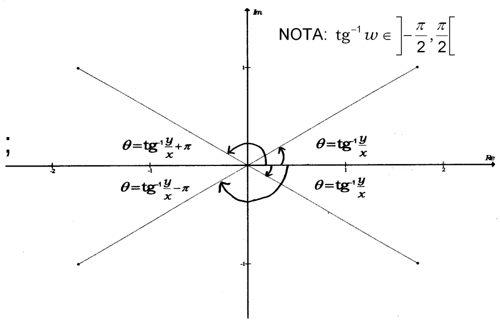
Radiciação : $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1, \ldots, n - 1$

– Os afixos das $\sqrt[n]{z}$ situam-se numa circunferência de $C(0, 0)$ e $r = \sqrt[n]{\rho}$ e dividem-na em n partes iguais.

– Os afixos das $\sqrt[n]{z}$ são os vértices de um polígono regular com n lados.

– Os argumentos das $\sqrt[n]{z}$ estão em progressão aritmética de razão $\dfrac{2\pi}{n}$.

DOMÍNIOS PLANOS



- $|z| = k \rightarrow$ circunferência de centro na origem e raio k ;
- $|z - z_1| = k \rightarrow$ circunferência de centro no afixo de z_1 e raio k ;
- $\mathrm{Im}(z) = k \rightarrow$ recta horizontal do tipo $y = k$;
- $\mathrm{Re}(z) = k \rightarrow$ recta vertical do tipo $x = k$;
- $\arg(z - z_1) = \theta \rightarrow$ semi-recta com origem no afixo de z_1 e que faz com o eixo real positivo um ângulo de amplitude θ ;
- $|z - z_1| = |z - z_2| \rightarrow$ mediatriz do segmento de recta cujos extremos são os afixos de z_1 e z_2 ;
- $\mathrm{Im}(z) \underset{<}{\overset{>}{-}} k, \quad \mathrm{Re}(z) \underset{<}{\overset{>}{-}} k,$ e $|z - z_1| \underset{<}{\overset{>}{-}} |z - z_2| \rightarrow$ representam semi-planos.