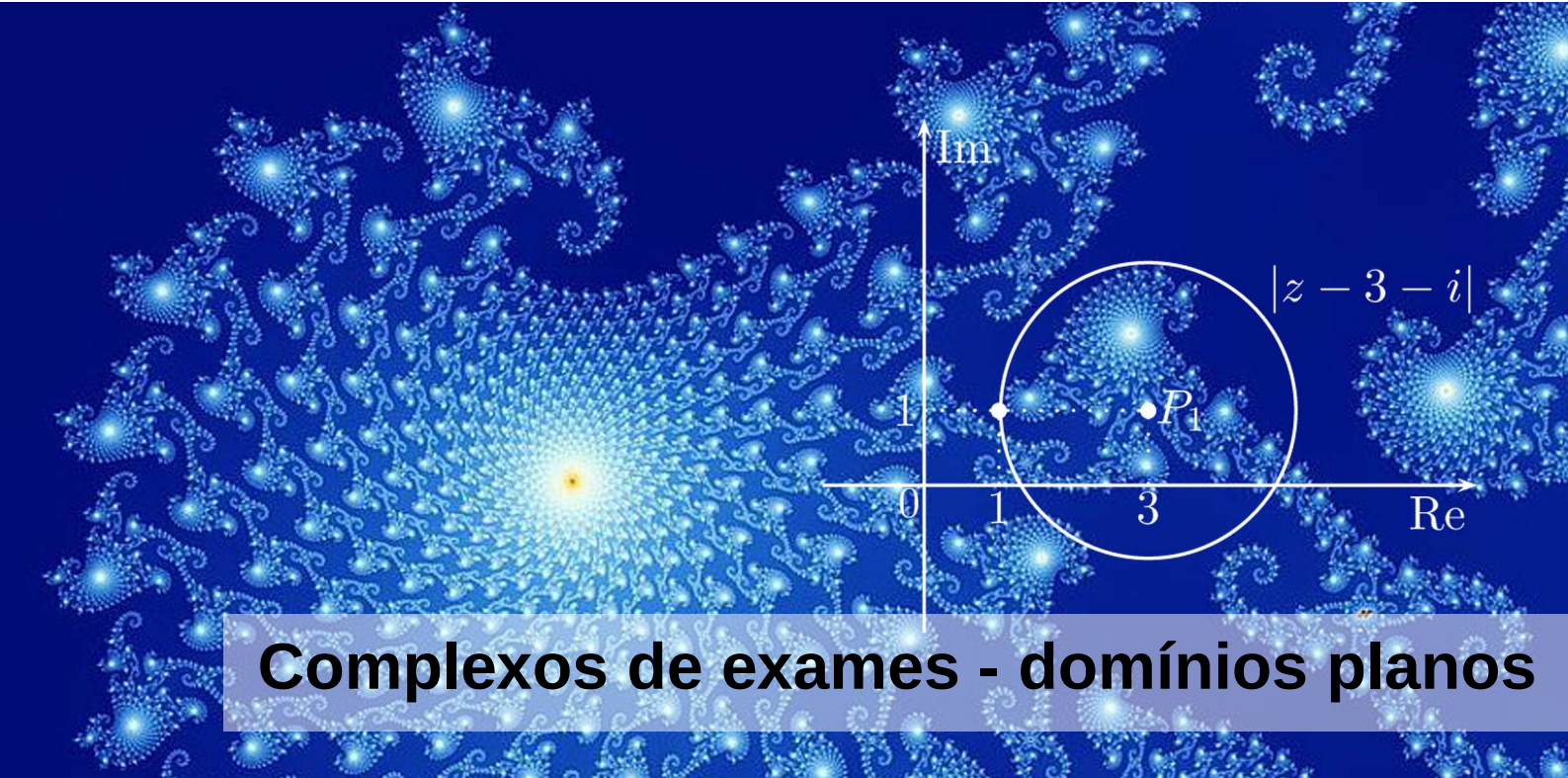




## Complexos de exames - domínios planos

Perguntas de Exames Nacionais dos últimos 16 anos com resolução e/ou vídeo.

Versão de 8 de janeiro de 2022.

Verifique se existe versão com data mais recente [aqui](#) e aceda a mais fichas [aqui](#).

1. Considere em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos,  $z_1 = 2 - 3i$  e  $z_2 = 1 - 2i$ .  
Mostre que o afixo (imagem geométrica) do número complexo  $w = \frac{3z_1 - i\overline{z_2}}{1 + i^7}$  pertence à circunferência de centro no afixo (imagem geométrica) de  $z_1$  e raio igual a  $\sqrt{53}$ .

[Resolução, pg. 10](#)

Exame Nacional de 2019 - 2.ª fase

2. Considere em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos,  $z_1 = 3 + 4i$  e  $z_2 = 4 + 6i$ .  
Seja  $w = \frac{z_1 + i^6 + 2\overline{z_1}}{z_1 - z_2}$ .  
No plano complexo, a condição  $|z| = |w| \wedge \text{Im}(z) \geq 0 \wedge \text{Re}(z) \geq 0$  define uma linha.  
Determine o comprimento dessa linha.

[Resolução, pg. 11](#)

Exame Nacional de 2019 - 1.ª fase

3. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, sejam  $z_1$  e  $z_2$  tais que  $z_1 = 2 + i$  e  $z_1 \times \overline{z_2} = 4 - 3i$ .  
Considere a condição  $|z - z_1| = |z - z_2|$ .  
Mostre que o número complexo  $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$  verifica esta condição e interprete geometricamente este facto.  
Resolva este item sem recorrer à calculadora.

[Resolução, pg. 13](#)

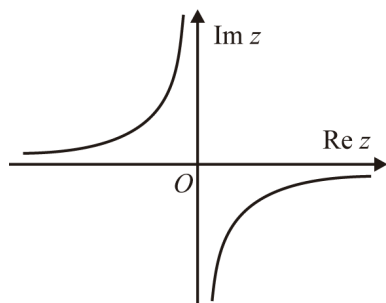
Exame Nacional de 2016 - 2.ª fase

4. Seja  $\mathbb{C}$  o conjunto dos números complexos.

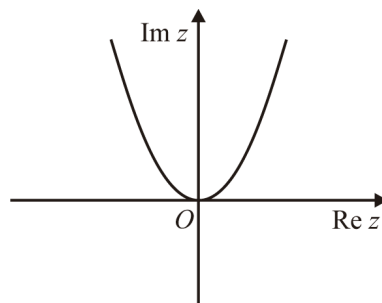
Considere, em  $\mathbb{C}$ , a condição  $\operatorname{Re}(z) \times \operatorname{Im}(z) = 1$ .

Em qual das opções seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?

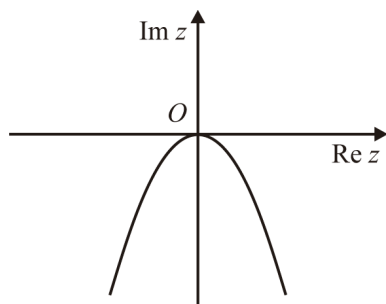
(A)



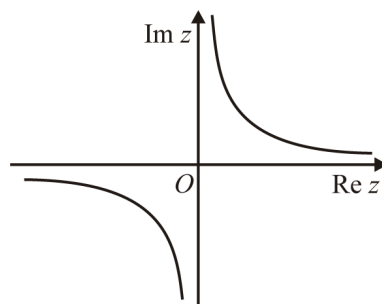
(B)



(C)



(D)



[Resolução, pg. 9](#)

Exame Nacional de 2020 - 1.<sup>a</sup> fase

5. Considere em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, a condição

$$\frac{5\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{7\pi}{4} \wedge \operatorname{Im} z \geq -1.$$

No plano complexo, esta condição define uma região.

Qual é a área dessa região?

(A)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(B)  $\frac{1}{2}$

(C)  $\sqrt{2}$

(D) 1

[Resolução, pg. 12](#)

Exame Nacional de 2017 - 2.<sup>a</sup> fase

6. Considere em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, a condição

$$|z + 4 - 4i| = 3 \wedge \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{3}{4}\pi.$$

No plano complexo, esta condição define uma linha.

Qual é o comprimento dessa linha?

(A)  $\pi$

(B)  $2\pi$

(C)  $3\pi$

(D)  $4\pi$

Resolução, pg. 14

Exame Nacional de 2011 - 1.ª fase

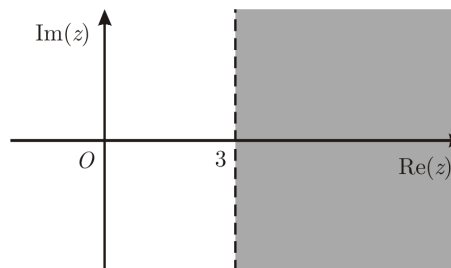
7. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere  $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$  e  $z_2 = 3$ .  
Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

- (a) Determine o número complexo  $w = \frac{z_1^4 + 4i}{i}$ .  
Apresente o resultado na forma trigonométrica.
- (b) Escreva uma condição, em  $\mathbb{C}$ , que defina, no plano complexo, a circunferência que tem centro na imagem geométrica de  $z_2$  e que passa na imagem geométrica de  $z_1$ .

Resolução, pg. 16

Exame Nacional de 2010 - 2.ª fase

8. Na figura, está representada, no plano complexo, a sombreada, parte do semiplano definido pela condição  $\operatorname{Re}(z) > 3$ .



Qual dos números complexos seguintes tem a sua imagem geométrica na região representada a sombreada?

(A)  $\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

(B)  $3\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

(C)  $\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$

(D)  $3\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$

Resolução, pg. 17

Exame Nacional de 2010 - 1.ª fase

9. Seja  $\mathbb{C}$  o conjunto dos números complexos.  
Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.  
Considere  $z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ .  
No plano complexo, a região definida pela condição

$$|z - z_2| \leq 1 \wedge \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq 2\pi \wedge |z| \geq |z - z_2|$$

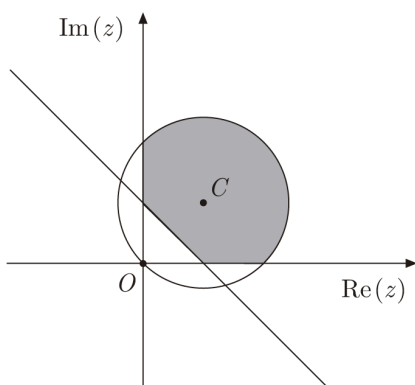
está representada geometricamente numa das opções I, II, III e IV, apresentadas na página seguinte. (Considere como  $\arg(z)$  a determinação que pertence ao intervalo  $]0, 2\pi]$ ).

Sabe-se que, em cada uma das opções:

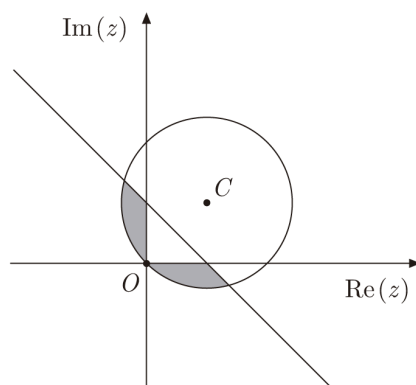
- $O$  é a origem do referencial;
- $C$  é a imagem geométrica de  $z_2$ ;
- $\overline{OC}$  é o raio da circunferência.

Apenas uma das opções está correta.

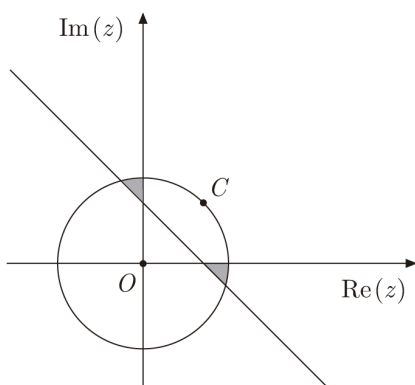
I



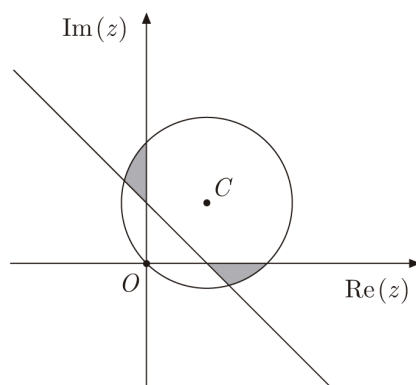
II



III



IV



Elabore uma composição na qual:

- indique a opção correta;
- apresente as razões que o levam a rejeitar as restantes opções.

Apresente três razões, uma por cada opção rejeitada.

[Resolução, pg. 15](#)

Exame Nacional de 2011 - Época especial

10. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere o conjunto  $A = \{z \in \mathbb{C} : i \times (z + \bar{z}) = 0\}$  ( $i$  designa a unidade imaginária, e  $\bar{z}$  designa o conjugado de  $z$ ).

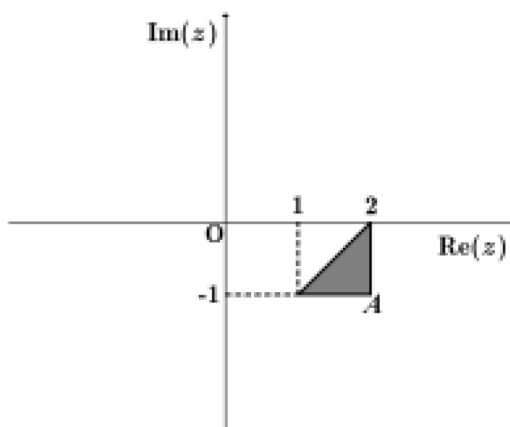
Qual das retas seguintes pode ser a representação geométrica, no plano complexo, do conjunto  $A$ ?

- (A) o eixo real
- (B) o eixo imaginário
- (C) a bissetriz dos quadrantes pares
- (D) a bissetriz dos quadrantes ímpares

[Resolução, pg. 18](#)

Exame Nacional de 2010 - Época especial

11. Na figura, está representada uma região do plano complexo. O ponto  $A$  tem coordenadas  $(2, -1)$ .



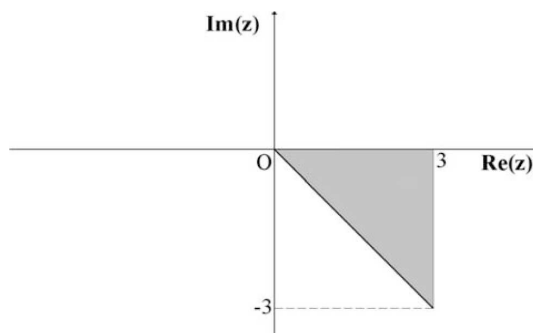
Qual das condições seguintes define em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, a região sombreada, incluindo a fronteira?

- (A)  $|z - 1| \geq |z - (2 - i)| \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 2 \wedge \operatorname{Im}(z) \geq -1$
- (B)  $|z - 1| \leq |z - (2 - i)| \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 2 \wedge \operatorname{Im}(z) \geq -1$
- (C)  $|z + 1| \geq |z - (2 + i)| \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 2 \wedge \operatorname{Im}(z) \geq -1$
- (D)  $|z - 1| \geq |z - (2 - i)| \wedge \operatorname{Im}(z) \leq 2 \wedge \operatorname{Re}(z) \geq -1$

[Resolução, pg. 19](#)

Exame Nacional de 2009 - 2.<sup>a</sup> fase

12. Considere a figura, representada no plano complexo.



Qual é a condição, em  $\mathbb{C}$ , que define a região sombreada da figura, incluindo a fronteira?

- (A)  $\operatorname{Re}(z) \leq 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$   
 (C)  $\operatorname{Im}(z) \leq 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq (0)$

- (B)  $\operatorname{Re}(z) \leq 3 \wedge 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}$   
 (D)  $\operatorname{Re}(z) \geq 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$

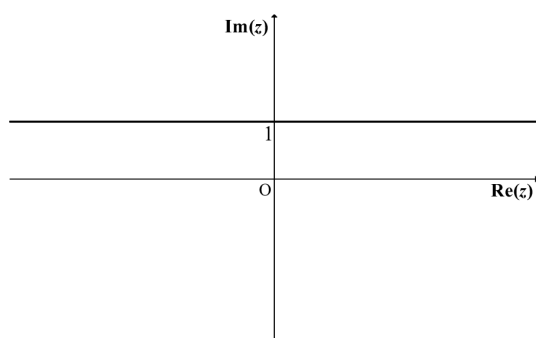
[Resolução, pg. 20](#)

Exame Nacional de 2008 - 2.<sup>a</sup> fase

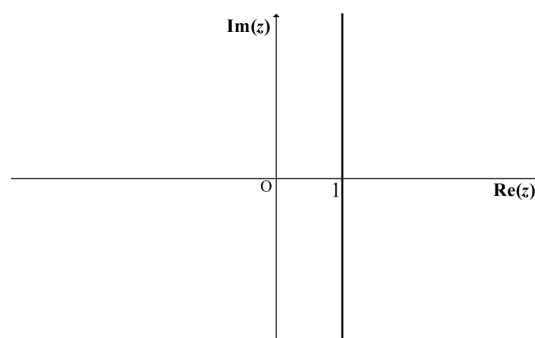
13. Considere, em  $\mathbb{C}$ , a condição  $z + \bar{z} = 2$ .

Em qual das figuras seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definidos por esta condição?

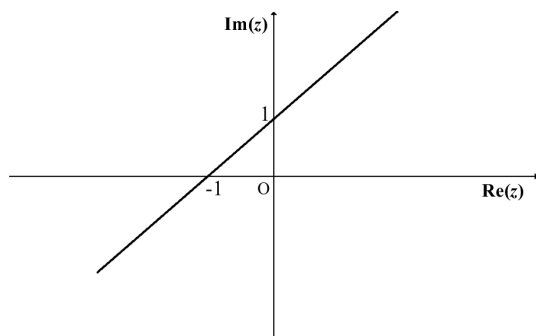
(A)



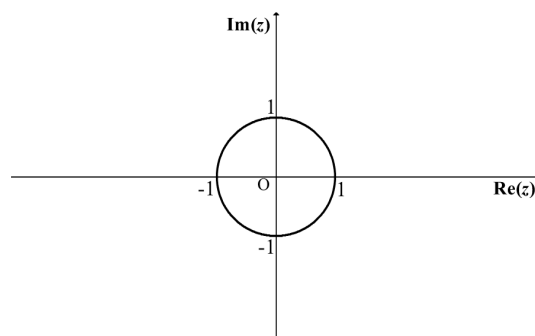
(B)



(C)



(D)



[Resolução, pg. 21](#)

Exame Nacional de 2008 - 1.<sup>a</sup> fase

14. Qual das seguintes condições, na variável complexa  $z$ , define, no plano complexo, uma circunferência?

(A)  $|z + 4| = 5$

(B)  $|z| = |z + 2i|$

(C)  $0 \leq \arg(z) \leq \pi$

(D)  $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 2$

[Resolução, pg. 22](#)

Exame nacional de 2008 - Época especial

15. Seja  $\mathbb{C}$  o conjunto dos números complexos;  $i$  designa a unidade imaginária. Considere que, para qualquer número complexo  $z$  não nulo,  $\arg(z)$  designa o argumento de  $z$  que pertence ao intervalo  $[0, 2\pi[$ . Represente a região do plano complexo definida pela condição, em  $\mathbb{C}$ ,

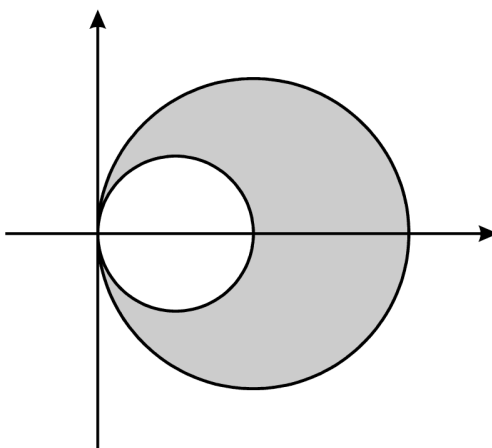
$$\frac{1}{2} \leq |z| \leq 1 \wedge \frac{3\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{5\pi}{4}$$

e determine a sua **área**.

[Resolução, pg. 24](#)

Exame nacional de 2006 - 1.ª fase

16. Na figura estão representadas, no plano complexo, duas circunferências, ambas com centro no eixo real, tendo uma delas raio 1 e a outra raio 2.



A origem do referencial é o único ponto comum às duas circunferências. Qual das condições seguintes define a região sombreada, incluindo a fronteira?

(A)  $|z - 1| \geq 1 \wedge |z - 2| \leq 2$

(B)  $|z - 1| \geq 2 \wedge |z - 2| \leq 1$

(C)  $|z - 1| \leq 1 \wedge |z - 2| \geq 2$

(D)  $|z - 1| \leq 1 \wedge |z - 2| \geq 1$

[Resolução, pg. 23](#)

Exame nacional de 2006 - 2.ª fase

17. Seja  $\mathbb{C}$  o conjunto dos números complexos;  $i$  designa a unidade imaginária.  
Seja  $B$  a região do plano complexo definida pela condição.

$$|z| \leq 2 \wedge \operatorname{Re}(z) \geq 0 \wedge |z - 1| \leq |z - i|.$$

Represente graficamente  $B$  e determine a sua área.

[Resolução, pg. 25](#)

Exame nacional de 2006 - 1.<sup>a</sup> fase

# Resoluções

## Resolução da pergunta 4

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Seja  $z = x + yi$ .

$$\operatorname{Re}(z) \times \operatorname{Im}(z) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(x + yi) \times \operatorname{Im}(x + yi) = 1 \Leftrightarrow xy = 1 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} y = \frac{1}{x}.$$

Trata-se portanto da equação que uma hipérbole conhecida.

A opção correta é a **(D)**.

## Resolução da pergunta 1

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

$$\begin{aligned}w &= \frac{3z_1 - i\overline{z_2}}{1 + i^7} = \frac{3(2 - 3i) - i(1 + 2i)}{1 - i} \\&= \frac{6 - 9i - i + 2}{1 - i} = \frac{8 - 10i}{1 - i} \\&= \frac{(8 - 10i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{8 + 8i - 10i + 10}{1^2 + 1^2} \\&= \frac{18 - 2i}{2} = 9 - i.\end{aligned}$$

A equação da circunferência de centro no afixo de  $z_1$  e raio  $\sqrt{53}$  é  $|z - (2 - 3i)| = \sqrt{53}$ . Substituindo  $w$  nesta equação vem:

$$|9 - i - (2 - 3i)| = \sqrt{53} \Leftrightarrow |7 + 2i| = \sqrt{53} \Leftrightarrow \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53} \Leftrightarrow \sqrt{53} = \sqrt{53}.$$

Podemos assim concluir que o afixo de  $w$  pertence à circunferência.

## Resolução da pergunta 2

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

$$\begin{aligned}w &= \frac{z_1 + i^6 + 2\overline{z_1}}{z_1 - z_2} \\&= \frac{3 + 4i - 1 + 6 - 8i}{-1 - 2i} \\&= \frac{8 - 4i}{-1 - 2i} \\&= \frac{(8 - 4i)(-1 + 2i)}{(-1 - 2i)(-1 + 2i)} \\&= \frac{20i}{5} = 4i.\end{aligned}$$

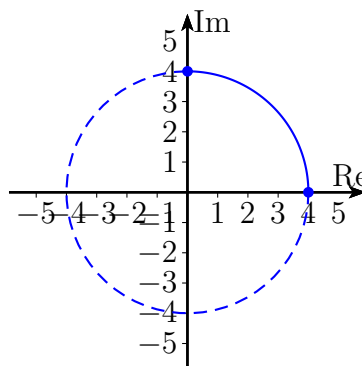
Assim,

- $|z| = |w| \Leftrightarrow |z| = 4$  representa, no plano de Argand, a circunferência centrada na origem com raio 4;
- $\text{Im}(z) \geq 0$  representa os complexos cujo afixo se encontra no eixo real ou acima deste;
- $\text{Re}(z) \geq 0$  representa os complexos cujo afixo se encontra no eixo imaginário ou à direita deste.

Na figura seguinte está representada no plano de Argand a região definida pela condição

$$|z| = |w| \wedge \text{Im}(z) \geq 0 \wedge \text{Re}(z) \geq 0.$$

Trata-se de um arco de circunferência.



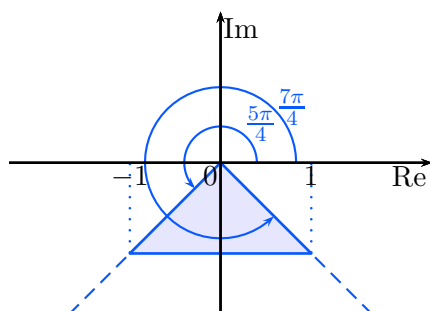
Como o perímetro da circunferência completa é

$2\pi \times 4 = 8\pi$ , o perímetro do arco de circunferência é  $\frac{8\pi}{4} = 2\pi$  unidades de comprimento.

### Resolução da pergunta 5

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2](#)

A figura em baixo representa a região.



Como a área do triângulo é  $\frac{2 \times 1}{2} = 1$ , a opção correta é a **(D)**.

### Resolução da pergunta 3

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1](#)

Começemos por determinar  $z_2$ . Como  $z_2 = 2 + i$  então

$$\begin{aligned} z_1 \times \overline{z_2} &= 4 - 3i \Leftrightarrow (2 + i) \times \overline{z_2} = 4 - 3i \Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{4 - 3i}{2 + i} \\ \Leftrightarrow \overline{z_2} &= \frac{(4 - 3i)(2 - i)}{4 + 1} \Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{8 - 4i - 6i + 3i^2}{5} \Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{5 - 10i}{5} \\ \Leftrightarrow \overline{z_2} &= 1 - 2i \Leftrightarrow z_2 = 1 + 2i. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) &= 1 + i. \end{aligned}$$

Substituindo  $1 + i$  na condição  $|z - z_1| = |z - z_2|$  vem

$$|1 + i - (2 + i)| = |1 + i - (1 + 2i)| \Leftrightarrow |-1| = |-i| \Leftrightarrow 1 = 1.$$

Geometricamente, significa que o afixo de  $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$  pertence à mediatriz do segmento de reta de extremos nos afixos de  $z_1$  e  $z_2$ .

## Resolução da pergunta 6

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

## Resolução da pergunta 9

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

## Resolução da pergunta 7

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3](#)

Vídeos da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**):

(a) 

(b) 

## Resolução da pergunta 8

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

## Resolução da pergunta 10

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

## Resolução da pergunta 11

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

## Resolução da pergunta 12

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

## Resolução da pergunta 13

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

## Resolução da pergunta 14

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 7](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

## Resolução da pergunta 16

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 7](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

## Resolução da pergunta 15

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 7](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

## Resolução da pergunta 17

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 8](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 