



$a + bi$

Complexos de exames - Forma algébrica

Perguntas de Exames Nacionais dos últimos 15 anos com resolução e/ou vídeo.

Versão de 8 de janeiro de 2022.

Verifique se existe versão com data mais recente [aqui](#) e aceda a mais fichas [aqui](#).

1. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição $(1 + 2i)z + (1 - 2i)\bar{z} + 10 = 0$ define, no plano complexo, uma reta.

Considere todos os números complexos cujos afijos pertencem a esta reta.

Determine qual deles tem menor módulo.

Apresente esse número complexo na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

[Resolução, pg. 8](#)

Exame Nacional de 2021 - 2.ª fase

2. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = -3 + 2i$, $z_2 = 1 + 2i$ e $z_3 = 2 - i$.

Seja w o número complexo tal que $w = \frac{z_1 \times z_2}{z_3}$.

Mostre, sem recorrer à calculadora, que a proposição seguinte é verdadeira.

$$|w| = \sqrt{13} \wedge \text{Arg}(w) \in \left] -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} \right[.$$

[Resolução, pg. 9](#)

Exame Nacional de 2021 - 1.ª fase

3. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Seja k um número real.

Sabe-se que $k + i$ é uma das raízes quadradas do número complexo $3 - 4i$.

Qual é o valor de k ?

(A) 2

(B) 1

(C) -1

(D) -2

Resolução, pg. 10

Exame Nacional de 2020 - 2.ª fase

4. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja $z_1 = \frac{2}{1-i} + \frac{4}{i^5}$ e seja z_2 um número complexo tal que $|z_2| = \sqrt{5}$.

Sabe-se que, no plano complexo, o afixo de $z_1 \times z_2$ tem coordenadas positivas e iguais.

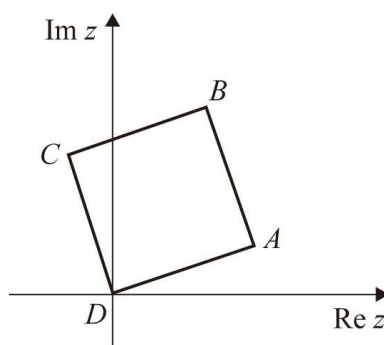
Determine z_2 .

Apresente a resposta na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Resolução, pg. 11

Exame Nacional de 2020 - 2.ª fase

5. Na figura, está representado, no plano complexo, o quadrado $[ABCD]$.



Sabe-se que o ponto A é o afixo (imagem geométrica) de um número complexo z e que o ponto D é o afixo (imagem geométrica) do complexo nulo.

Qual é o número complexo cujo afixo (imagem geométrica) é o ponto B ?

(A) $z(1+i)$

(B) iz

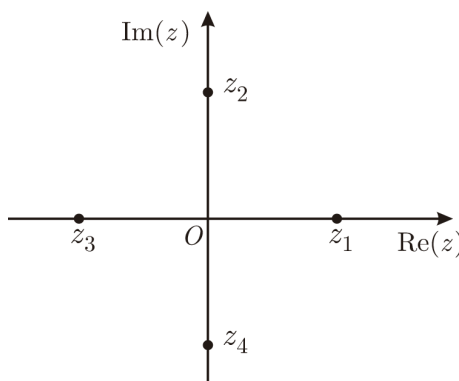
(C) i^3z

(D) $z(2+i)$

Resolução, pg. 12

Exame Nacional de 2019 - 2.ª fase

6. Na figura, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de quatro números complexos z_1 , z_2 , z_3 e z_4 .



Qual é o número complexo que, com $n \in \mathbb{N}$, pode ser igual a $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2}$?

- (A) z_1 (B) z_2 (C) z_3 (D) z_4

[Resolução, pg. 13](#)

Exame Nacional de 2011 - 1.ª fase

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

- (a) Seja w o número complexo com coeficiente da parte imaginária positivo que é solução da equação $z^2 + z + 1 = 0$.

Determine $\frac{1}{w}$.

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

- (b) Seja z um número complexo.

Mostre que $(\bar{z} + i) \times (z - i) = |z - i|^2$, para qualquer número complexo z .

($\bar{z}$ designa o conjugado de z)

[Resolução, pg. 15](#)

Exame Nacional de 2011 - Época especial

8. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

Considere $z_1 = 2 + \sqrt{3}i + i^{4n+2014}$, $n \in \mathbb{N}$.

Sabe-se que z_1 é uma das raízes cúbicas de um certo complexo z .

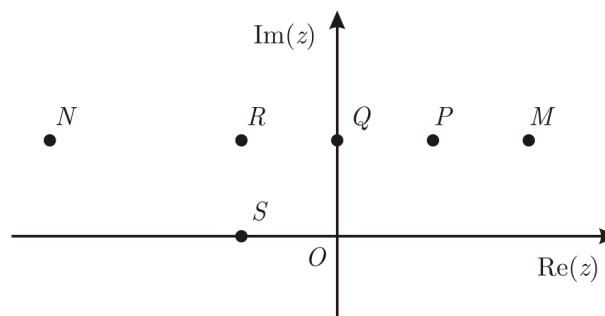
Determine z .

Apresente o resultado na forma algébrica.

[Resolução, pg. 14](#)

Exame Nacional de 2011 - Época especial

9. Na figura, estão representados, no plano complexo, seis pontos, M , N , P , Q , R e S .



Sabe-se que:

- o ponto M é a imagem geométrica do número complexo $z_1 = 2 + i$;
- o ponto N é a imagem geométrica do número complexo $z_1 \times z_2$.

Qual dos pontos seguintes pode ser a imagem geométrica do número complexo z_2 ?

- (A) ponto P (B) ponto Q (C) ponto R (D) ponto S

[Resolução, pg. 16](#)

Exame Nacional de 2011 - Época especial

10. Sejam k e p dois números reais e sejam $z_1 = (3k + 2) + pi$ e $z_2 = (3p - 4) + (2 - 5k)i$ dois números complexos.

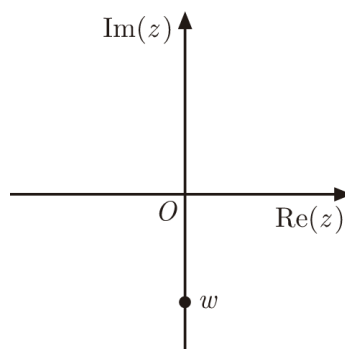
Quais são os valores de k e de p para os quais z_1 é igual ao conjugado de z_2 ?

- (A) $k = -1$ e $p = 3$ (B) $k = 1$ e $p = 3$
 (C) $k = 0$ e $p = -2$ (D) $k = 1$ e $p = -3$

[Resolução, pg. 17](#)

Exame Nacional de 2011 - Época especial

11. Seja w o número complexo cuja imagem geométrica está representada na figura.



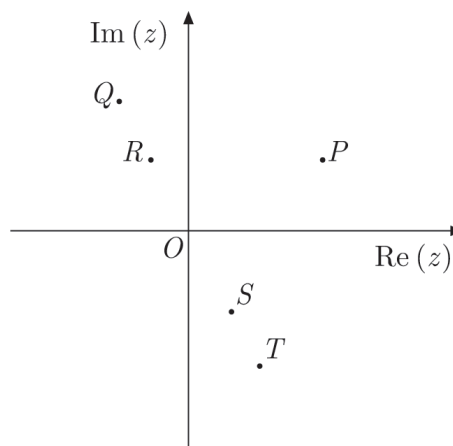
A qual das retas seguintes pertence a imagem geométrica de w^6 ?

- (A) Eixo real
- (B) Eixo imaginário
- (C) Bissetriz dos quadrantes ímpares
- (D) Bissetriz dos quadrantes pares

[Resolução, pg. 18](#)

Exame Nacional de 2010 - 2.ª fase

12. Na figura, estão representados, no plano complexo, os pontos P , Q , R , S e T .
O ponto P é a imagem geométrica de um número complexo z



Qual dos pontos seguintes, representados na figura, é a imagem geométrica do número complexo $-i \times z$?

- (A) Q
- (B) R
- (C) S
- (D) T

[Resolução, pg. 19](#)

Exame Nacional de 2010 - Época especial

13. Considere, em $\mathbb{C}$, um número complexo w , cuja imagem geométrica no plano complexo é um ponto A , situado no 1.º quadrante. Sejam os pontos B e C , respetivamente, as imagens geométricas de $\overline{w}$ (conjugado de w) e de $(-w)$.
Sabe-se que $\overline{BC} = 8$ e que $|w| = 5$.
Determine a área do triângulo $[ABC]$.

[Resolução, pg. 20](#)

Exame Nacional de 2009 - 2.ª fase

14. Seja k um número real, e $z_1 = (k - i)(3 - 2i)$ um número complexo.
Qual é o valor de k , para que z_1 seja um número imaginário puro?

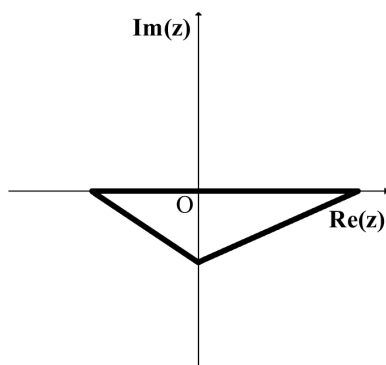
- (A) $-\frac{3}{2}$
- (B) $-\frac{2}{3}$
- (C) $\frac{2}{3}$
- (D) $\frac{3}{2}$

[Resolução, pg. 21](#)

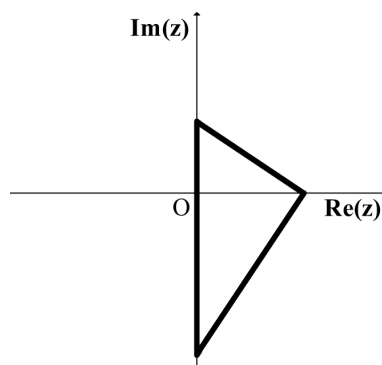
Exame Nacional de 2009 - 2.ª fase

15. Seja b um número real positivo, e $z_1 = bi$ um número complexo. Em qual dos triângulos seguintes os vértices podem ser as imagens geométricas dos números complexos z_1 , $(z_1)^2$ e $(z_1)^3$?

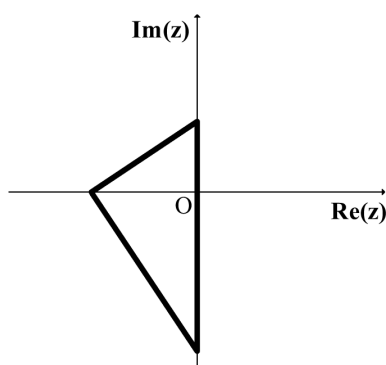
(A)



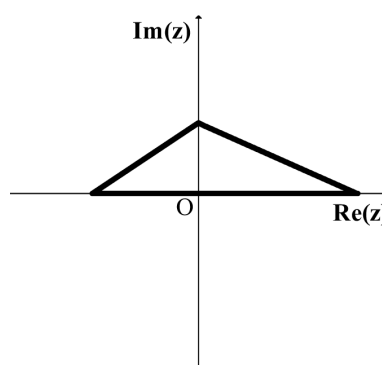
(B)



(C)



(D)



[Resolução, pg. 22](#)

Exame Nacional de 2009 - 1.^a fase

16. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 - i$ (i designa a unidade imaginária).

Sem recorrer à calculadora, determine o valor de $\frac{2z_1 - i^{18} - 3}{1 - 2i}$.
Apresente o resultado na forma algébrica.

[Resolução, pg. 23](#)

Exame Nacional de 2008 - 2.^a fase

17. Qual das opções seguintes apresenta duas raízes quadradas de um mesmo número complexo?

(A) 1 e i

(B) -1 e i

(C) $1 - i$ e $1 + i$

(D) $1 - i$ e $-1 + i$

[Resolução, pg. 25](#)

Exame nacional de 2006 - 2.^a fase

18. Em $\mathbb{C}$ conjunto dos números complexos, seja i a unidade imaginária.
Seja n um número natural tal que $i^n = -i$.
Indique qual dos seguintes é o valor de i^{n+1} .

(A) 1

(B) i

(C) -1

(D) $-i$

[Resolução, pg. 24](#)

Exame nacional de 2007 - 2.ª fase

Resoluções

Resolução da pergunta 1

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1](#)

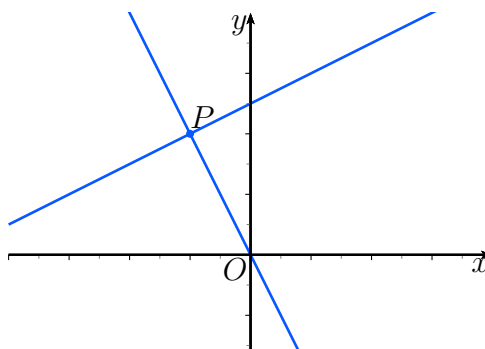
Seja $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(1+2i)z + (1-2i)\bar{z} + 10 &= 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} (1+2i)z + \overline{(1+2i)z} = -10 \\ \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 2\operatorname{Re}((1+2i)(x+yi)) &= -10 \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(x-2y+(2x+y)i) = -10 \\ \Leftrightarrow 2x-4y &= -10 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

(1) $\overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$.

(2) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$.

O ponto da reta com menor módulo é o ponto da reta mais próximo da origem. Corresponde ao ponto de interseção da reta perpendicular à reta de equação $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ que passa na origem. A figura seguinte ilustra a situação.



A reta perpendicular à reta de equação $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ que passa no origem é definida pela equação $y = -2x$.

Vamos determinar o seu ponto de interseção resolvendo o sistema seguinte.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ - - - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{2}x = \frac{5}{2} \\ - - - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Podemos concluir que $-1 + 2i$ é o número complexo pretendido.

Resolução da pergunta 2

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1](#)

Comecemos por determinar w na forma algébrica.

$$\begin{aligned}w &= \frac{z_1 \times z_2}{z_3} = \frac{(-3 + 2i)(1 + 2i)}{2 - i} = \frac{-7 - 4i}{2 - i} \\&= \frac{(-7 - 4i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{-10 - 15i}{5} = -2 - 3i.\end{aligned}$$

Deste modo, $|w| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$.

Como o afixo de w pertence ao terceiro quadrante então $\text{Arg}(w) \in \left] -\pi, -\frac{\pi}{2} \right[$.

Uma vez que $-3 < -2$, o afixo de w localiza-se abaixo da bissetriz dos quadrantes ímpares.

Temos portanto $\text{Arg}(w) \in \left] -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} \right[$.

Resolução da pergunta 3

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1](#)

Vídeo da resolução: 

Resolução:

Sendo $k + i$ uma raiz quadrada do complexo $3 - 4i$ temos

$$(k + i)^2 = 3 - 4i \Leftrightarrow k^2 + 2ki - 1 = 3 - 4i \Leftrightarrow k^2 - 1 = 3 \wedge 2k = -4 \Leftrightarrow k = -2.$$

A opção correta é a **(D)**.

Resolução da pergunta 4

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Começamos por determinar z_1 na forma algébrica.

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{2}{1-i} + \frac{4}{i^5} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} + \frac{4}{i} \\ &= \frac{2+2i}{2} + \frac{4i}{-1} = 1+i-4i = 1-3i. \end{aligned}$$

Seja $z_2 = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$z_1 \times z_2 = (1-3i)(x+yi) = x + yi - 3xi + 3y = x + 3y + (y-3x)i.$$

Como o afixo de $z_1 \times z_2$ tem coordenadas iguais então

$$x + 3y = y - 3x \Leftrightarrow 2x + y = 0 \Leftrightarrow y = -2x.$$

Assim, $z_1 \times z_2 = -5x - 5xi$ e $z_2 = x - 2xi$.

Por outro lado, como $|z_2| = \sqrt{5}$ então

$$\sqrt{x^2 + (-2x)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 5x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

As coordenadas do afixo de $z_1 \times z_2$ são positivas unicamente para $x = -1$.

Temos $z_1 \times z_2 = 5 + 5i$.

Consequentemente $z_2 = -1 + 2i$.

Resolução da pergunta 5

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Sabemos que sendo A o afixo de z , como C se obtém a partir de A através de uma rotação centrada na origem de amplitude $\frac{\pi}{2}$, então C é o afixo de iz .

Como $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$, o afixo de B é $z + iz = z(1 + i)$.

Podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

Resolução da pergunta 6

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 8

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 7

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3](#)

Vídeos da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**):

(a) 

(b) 

Resolução da pergunta 9

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 10

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 11

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 12

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 13

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 14

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 15

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 16

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 18

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 7](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 17

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 