Complexos - Exames nacionais

Perguntas de Exames Nacionais dos últimos 16 anos com resolução e/ou vídeo.
Versão de 8 de janeiro de 2022.
Verifique se existe versão com data mais recente aqui e aceda a mais fichas aqui.

1. Resolva este item sem recorrer à calculadora.
Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição $(1+2i)z+(1-2i)\overline{z}+10=0$ define, no plano complexo, uma reta.
Considere todos os números complexos cujos afixos pertencem a esta reta.
Determine qual deles tem menor módulo.
Apresente esse número complexo na forma $a+bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Resolução, pg. 28

Exame Nacional de 2021 - 2.ª fase

2. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = 2e^{i\frac{3\pi}{5}}$.
Seja w o número complexo tal que $z \times w = i$.
Qual dos valores seguintes é um argumento do número complexo w?

(A) $\dfrac{19\pi}{10}$ **(B)** $\dfrac{2\pi}{5}$ **(C)** $-\dfrac{2\pi}{5}$ **(D)** $-\dfrac{19\pi}{10}$

Resolução, pg. 29

Exame Nacional de 2021 - 2.ª fase

3. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = -3+2i$, $z_2 = 1+2i$ e $z_3 = 2-i$.
Seja w o número complexo tal que $w = \dfrac{z_1 \times z_2}{z_3}$.
Mostre, sem recorrer à calculadora, que a proposição seguinte é verdadeira.

$$|w| = \sqrt{13} \,\wedge\, \operatorname{Arg}(w) \in \left]-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[.$$

Resolução, pg. 30 Exame Nacional de 2021 - 1.ª fase

4. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{28}}$.
Seja w o número complexo tal que $w = \dfrac{z_1}{z_2}$.
Sabe-se que, no plano complexo, o afixo do número complexo w é um dos vértices de um polígono regular com centro na origem do referencial e com outro vértice sobre o semieixo real positivo.
Qual é o número mínimo de vértices desse polígono?

(A) 7 **(B)** 14 **(C)** 21 **(D)** 28

Resolução, pg. 31 Exame Nacional de 2021 - 1.ª fase

5. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.
Seja k um número real.
Sabe-se que $k+i$ é uma das raízes quadradas do número complexo $3-4i$.
Qual é o valor de k?

(A) 2 **(B)** 1 **(C)** -1 **(D)** -2

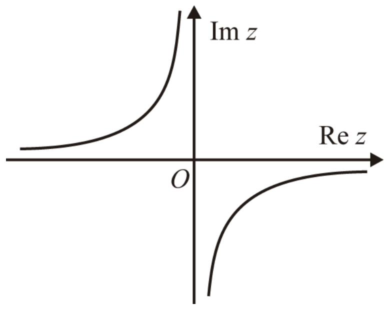
Resolução, pg. 32 Exame Nacional de 2020 - 2.ª fase

6. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.
Resolva este item sem recorrer à calculadora.
Seja $z_1 = \dfrac{2}{1-i} + \dfrac{4}{i^5}$ e seja z_2 um número complexo tal que $|z_2| = \sqrt{5}$.
Sabe-se que, no plano complexo, o afixo de $z_1 \times z_2$ tem coordenadas positivas e iguais.
Determine z_2.
Apresente a resposta na forma $a+bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

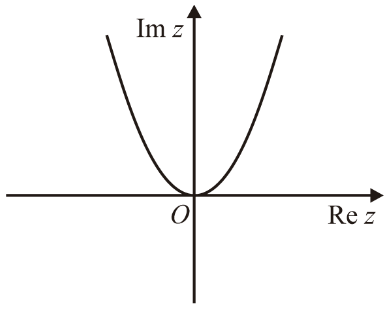
Resolução, pg. 33 Exame Nacional de 2020 - 2.ª fase

7. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.
Considere, em $\mathbb{C}$, a condição $\mathrm{Re}(z) \times \mathrm{Im}(z) = 1$.
Em qual das opções seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?

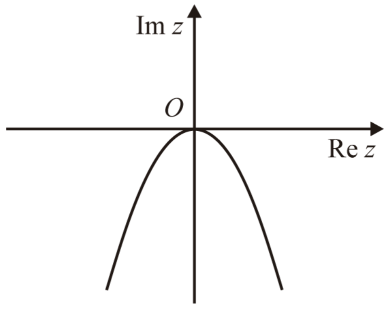
(A)



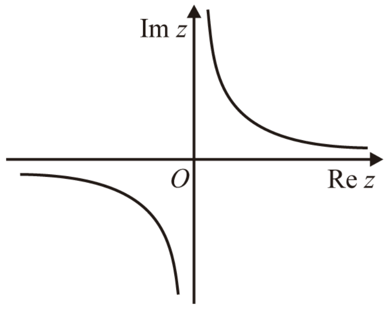
(B)



(C)



(D)



Resolução, pg. 34

Exame Nacional de 2020 - 1.ª fase

8. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.
Resolva este item sem recorrer à calculadora.
Considere, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 = \bar{z}$.
Sabe-se que, no plano complexo, os afixos dos números complexos não nulos que são soluções desta equação são os vértices de um polígono regular.
Determine o perímetro desse polígono.

Resolução, pg. 35

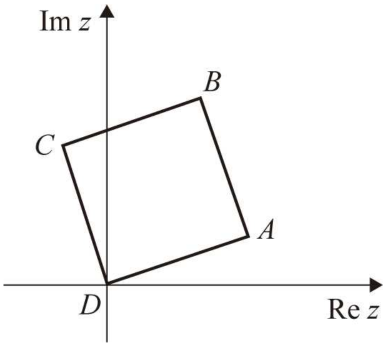
Exame Nacional de 2020 - 1.ª fase

9. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, $z_1 = 2 - 3i$ e $z_2 = 1 - 2i$.
Mostre que o afixo (imagem geométrica) do número complexo $w = \dfrac{3z_1 - i\overline{z_2}}{1 + i^7}$ pertence à circunferência de centro no afixo (imagem geométrica) de z_1 e raio igual a $\sqrt{53}$.

Resolução, pg. 36

Exame Nacional de 2019 - 2.ª fase

10. Na figura, está representado, no plano complexo, o quadrado $[ABCD]$.



Sabe-se que o ponto A é o afixo (imagem geométrica) de um número complexo z e que o ponto D é o afixo (imagem geométrica) do complexo nulo.
Qual é o número complexo cujo afixo (imagem geométrica) é o ponto B?

(A) $z(1+i)$ **(B)** iz **(C)** $i^3 z$ **(D)** $z(2+i)$

Resolução, pg. 37 Exame Nacional de 2019 - 2.ª fase

11. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, $z_1 = 3+4i$ e $z_2 = 4+6i$.
Seja $w = \dfrac{z_1 + i^6 + 2\overline{z_1}}{z_1 - z_2}$.
No plano complexo, a condição $|z| = |w| \wedge \operatorname{Im}(z) \geq 0 \wedge \operatorname{Re}(z) \geq 0$ define uma linha.
Determine o comprimento dessa linha.

Resolução, pg. 38 Exame Nacional de 2019 - 1.ª fase

12. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z = -1+2i$.
Seja θ o menor argumento positivo do número complexo $\overline{z}$ (conjugado de z).
A qual dos intervalos seguintes pertence θ?

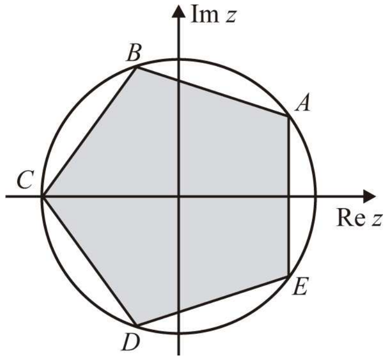
(A) $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ **(B)** $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ **(C)** $\left]\pi, \frac{5\pi}{4}\right[$ **(D)** $\left]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$

Resolução, pg. 39 Exame Nacional de 2019 - 1.ª fase

13. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \dfrac{(2-i)^2 + 1 + i}{1-2i} + 3i^{15}$.
Escreva o complexo $-\frac{1}{2} \times \overline{z}$ na forma trigonométrica.

Resolução, pg. 40 Exame Nacional de 2018 - 2.ª fase

14. Na figura, está representado, no plano complexo, um pentágono regular $[ABCDE]$ inscrito numa circunferência de centro na origem e raio 1.



Sabe-se que o ponto C pertence ao semieixo real negativo.
Seja z o número complexo cujo afixo (imagem geométrica) é o ponto A.
Qual é o valor de z^5?

(A) -1 **(B)** 1 **(C)** i **(D)** $-i$

Resolução, pg. 41

Exame Nacional de 2018 - $1.^a$ fase

15. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w = 1 + \dfrac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}i^5}{1+2i}$.
Sabe-se que w é uma raiz quarta de um certo complexo z.
Determine a raiz quarta de z cujo afixo (imagem geométrica) pertence ao primeiro quadrante.
Apresente o resultado na forma trigonométrica, com argumento pertencente ao intervalo $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Resolução, pg. 42

Exame Nacional de 2018 - $1.^a$ fase

16. Para um certo número real x, pertencente ao intervalo $\left]0, \dfrac{\pi}{12}\right[$, o número complexo $z = (\cos x + i \sin x)^{10}$ verifica a condição $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{1}{3}\operatorname{Re}(z)$.
Qual é o valor de x arredondado às centésimas?

(A) $0{,}02$ **(B)** $0{,}03$ **(C)** $0{,}12$ **(D)** $0{,}13$

Resolução, pg. 43

Exame Nacional de 2018 - $1.^a$ fase

17. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam

$$z_1 = \frac{1-3i^{19}}{1+i} \quad \text{e} \quad z_2 = -3ke^{i\frac{3\pi}{2}}, \text{com } k \in \mathbb{R}^+.$$

Sabe-se que, no plano complexo, a distância entre a imagem geométrica de z_1 e a imagem geométrica de z_2 é igual a $\sqrt{5}$.
Qual é o valor de k?
Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Resolução, pg. 44

Exame Nacional de 2017 - 2.ª fase

18. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição

$$\frac{5\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{7\pi}{4} \wedge \operatorname{Im} z \geq -1.$$

No plano complexo, esta condição define uma região.
Qual é a área dessa região?

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\sqrt{2}$ **(D)** 1

Resolução, pg. 45

Exame Nacional de 2017 - 2.ª fase

19. Seja ρ um número real positivo, e seja i um número real pertencente ao intervalo $]0, \pi[$.
Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \frac{-1+i}{(\rho e^{i\theta})^2}$ e $w = -\sqrt{2}i$.
Sabe-se que $z = w$.
Determine o valor de ρ e o valor de θ.

Resolução, pg. 46

Exame Nacional de 2017 - 1.ª fase

20. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z = 3 + 4i$.
Sabe-se que z é uma das raízes de índice 6 de um certo número complexo w.
Considere, no plano complexo, o polígono cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice 6 desse número complexo w.
Qual é o perímetro do polígono?

(A) 42 **(B)** 36

(C) 30 **(D)** 24

Resolução, pg. 47

Exame Nacional de 2017 - 1.ª fase

21. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam z_1 e z_2 tais que $z_1 = 2+i$ e $z_1 \times \overline{z_2} = 4-3i$.
Considere a condição $|z - z_1| = |z - z_2|$.
Mostre que o número complexo $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ verifica esta condição e interprete geometricamente este facto.
Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Resolução, pg. 48 Exame Nacional de 2016 - 2.ª fase

22. Seja z um número complexo de argumento $\frac{\pi}{5}$.
Qual dos seguintes valores é um argumento do número complexo $-5iz$?

(A) $-\frac{3\pi}{10}$ **(B)** $-\frac{4\pi}{5}$ **(C)** $-\frac{7\pi}{5}$ **(D)** $-\frac{13\pi}{10}$

Resolução, pg. 49 Exame Nacional de 2016 - 2.ª fase

23. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = \frac{8e^{i\theta}}{-1+\sqrt{3}i} \text{ e } z_2 = e^{i(2\theta)}.$$

Determine o valor de θ pertencente ao intervalo, $]0, \pi[$, de modo que $\overline{z_1} \times z_2$ seja um número real.

Resolução, pg. 50 Exame Nacional de 2016 - 1.ª fase

24. Seja θ um número real pertencente ao intervalo, $\left]\pi, \frac{3}{2}\pi\right[$.
Considere o número complexo $z = -3e^{i\theta}$.
A que quadrante pertence a imagem geométrica do complexo z?

(A) Primeiro **(B)** Segundo

(C) Terceiro **(D)** Quarto

Resolução, pg. 51 Exame Nacional de 2016 - 1.ª fase

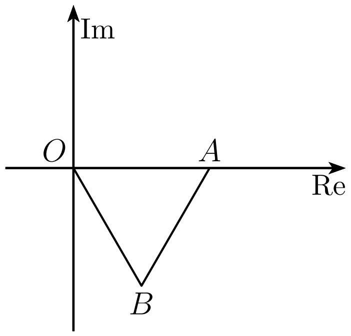
25. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}}$.
Determine os números complexos z que são solução da equação $z^4 = \overline{z_1}$, sem utilizar a calculadora.
Apresente esses números na forma trigonométrica.

Resolução, pg. 52 Exame Nacional de 2015 - 2.ª fase

26. Na figura, está representado, no plano complexo, um triângulo equilátero $[OAB]$.

Sabe-se que:

- o ponto O é a origem do referencial;
- o ponto A pertence ao eixo real e tem abcissa igual a 1;
- o ponto B pertence ao quarto quadrante e é a imagem geométrica de um complexo z.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $z = \sqrt{3}e^{i\frac{11\pi}{6}}$

(B) $z = e^{i\frac{11\pi}{6}}$

(C) $z = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{3}}$

(D) $z = e^{i\frac{5\pi}{3}}$

Resolução, pg. 54

Exame Nacional de 2015 - 2.ª fase

27. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \dfrac{-2+2i^{19}}{\sqrt{2}e^{i\theta}}$.

Determine os valores de θ pertencentes ao intervalo $]0, 2\pi[$, para os quais z é um número imaginário puro.

Na resolução deste item, não utilize a calculadora.

Resolução, pg. 55

Exame Nacional de 2011 - 1.ª fase

28. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição

$$|z+4-4i| = 3 \wedge \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{3}{4}\pi.$$

No plano complexo, esta condição define uma linha.

Qual é o comprimento dessa linha?

(A) π

(B) 2π

(C) 3π

(D) 4π

Resolução, pg. 56

Exame Nacional de 2011 - 1.ª fase

29. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = 1,\ z_2 = 5i \text{ e } z_3 = e^{i\frac{n\pi}{40}},\ n \in \mathbb{N}.$$

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

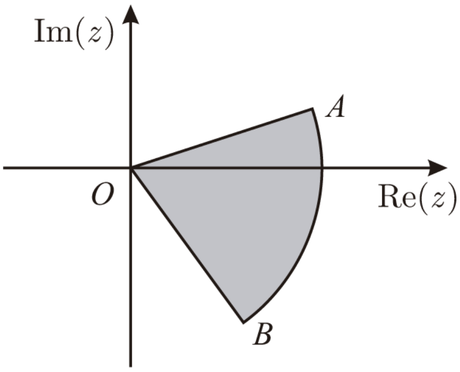
(a) O complexo z_1 é raiz do polinómio $z^3 - z^2 + 16z - 16$.
Determine, em $\mathbb{C}$, as restantes raízes do polinómio.
Apresente as raízes obtidas na forma trigonométrica.

(b) Determine o menor valor de n natural para o qual a imagem geométrica de $z_2 \times z_3$, no plano complexo, está no terceiro quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Resolução, pg. 57

Exame Nacional de 2011 - 1.ª fase

30. Na figura, está representado, no plano complexo, a sombreado, um setor circular.



Sabe-se que:

- o ponto A está situado no 1.° quadrante;
- o ponto B está situado no 4.° quadrante;
- $[AB]$ é um dos lados de um polígono regular cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice 5 do complexo $32e^{i\frac{\pi}{2}}$;
- o arco AB está contido na circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a $\overline{OA}$.

Qual dos números seguintes é o valor da área do sector circular AOB?

(A) $\frac{\pi}{5}$ **(B)** $\frac{4\pi}{5}$ **(C)** $\frac{2\pi}{5}$ **(D)** $\frac{8\pi}{5}$

Resolução, pg. 58

Exame Nacional de 2011 - 1.ª fase

31. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.
Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.
Considere $z_1 = 2 + \sqrt{3}i + i^{4n+2014}$, $n \in \mathbb{N}$.
Sabe-se que z_1 é uma das raízes cúbicas de um certo complexo z.
Determine z.
Apresente o resultado na forma algébrica.

Resolução, pg. 60

Exame Nacional de 2011 - Época especial

32. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

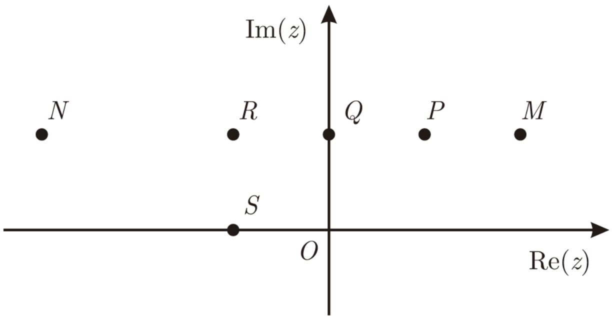
(a) Seja w o número complexo com coeficiente da parte imaginária positivo que é solução da equação $z^2 + z + 1 = 0$.
Determine $\frac{1}{w}$.
Apresente o resultado na forma trigonométrica.

(b) Seja z um número complexo.
Mostre que $(\overline{z} + i) \times (z - i) = |z - i|^2$, para qualquer número complexo z.
($\overline{z}$ designa o conjugado de z)

Resolução, pg. 62

Exame Nacional de 2011 - Época especial

33. Na figura, estão representados, no plano complexo, seis pontos, M, N, P, Q, R e S.



Sabe-se que:

- o ponto M é a imagem geométrica do número complexo $z_1 = 2 + i$;
- o ponto N é a imagem geométrica do número complexo $z_1 \times z_2$.

Qual dos pontos seguintes pode ser a imagem geométrica do número complexo z_2?

(A) ponto P **(B)** ponto Q **(C)** ponto R **(D)** ponto S

Resolução, pg. 63

Exame Nacional de 2011 - Época especial

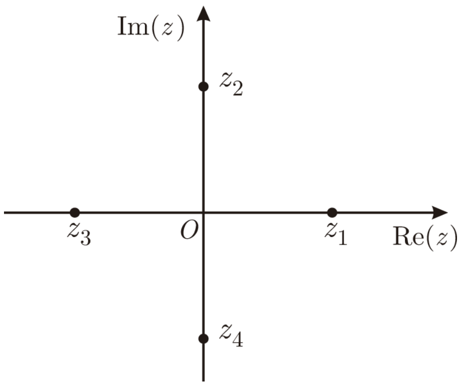
34. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$.
Qual dos números complexos seguintes é uma das raízes de índice seis de z?

(A) $\sqrt{2}e^{i\frac{25\pi}{36}}$ **(B)** $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{36}}$ **(C)** $2\sqrt{2}e^{i\frac{25\pi}{36}}$ **(D)** $2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{36}}$

Resolução, pg. 64

Exame Nacional de 2011 - Época especial

35. Na figura, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de quatro números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4.



Qual é o número complexo que, com $n \in \mathbb{N}$, pode ser igual a $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2}$?

(A) z_1 **(B)** z_2 **(C)** z_3 **(D)** z_4

Resolução, pg. 59

Exame Nacional de 2011 - 1.ª fase

36. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.
Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.
Considere $z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$.
No plano complexo, a região definida pela condição

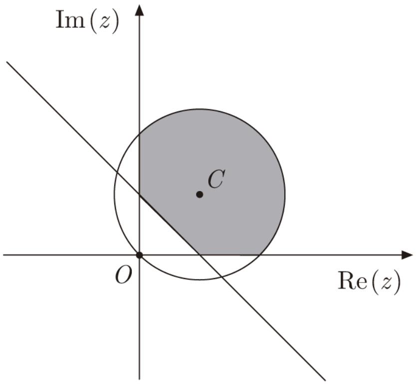
$$|z - z_2| \leq 1 \wedge \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq 2\pi \wedge |z| \geq |z - z_2|$$

está representada geometricamente numa das opções I, II, III e IV, apresentadas na página seguinte. (Considere como $\arg(z)$ a determinação que pertence ao intervalo $]0, 2\pi]$).
Sabe-se que, em cada uma das opções:

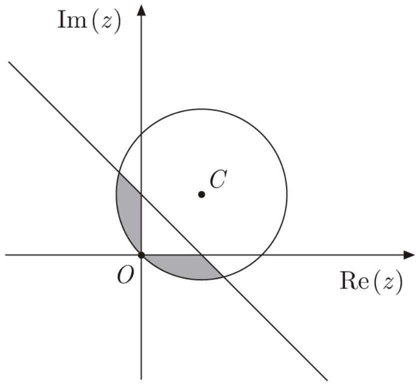
- O é a origem do referencial;
- C é a imagem geométrica de z_2;
- $\overline{OC}$ é o raio da circunferência.

Apenas uma das opções está correta.

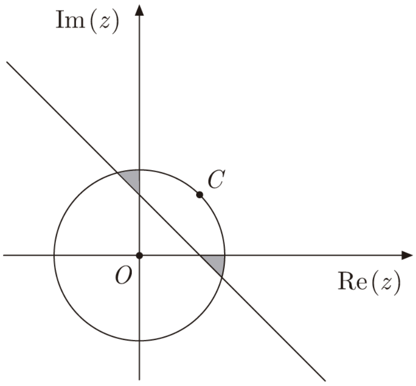
I



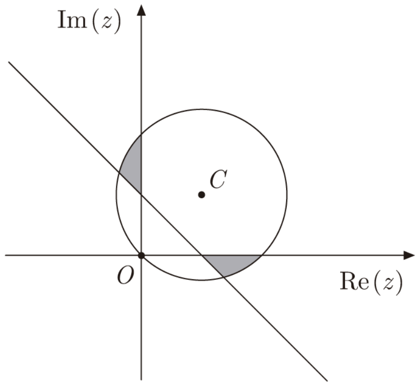
II



III



IV



Elabore uma composição na qual:

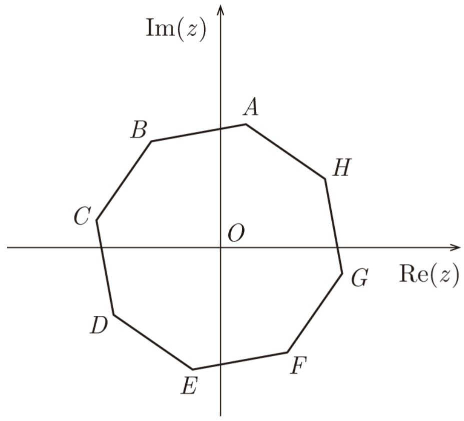
- indique a opção correta;
- apresente as razões que o levam a rejeitar as restantes opções.

Apresente três razões, uma por cada opção rejeitada.

Resolução, pg. 61

Exame Nacional de 2011 - Época especial

37. Considere, em $\mathbb{C}$, um número complexo w.
No plano complexo, a imagem geométrica de w é o vértice A do octógono $[ABCDEFGH]$, representado na figura.
Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice 8 de um certo número complexo.



Qual dos números complexos seguintes tem como imagem geométrica o vértice C do octógono $[ABCDEFGH]$?

(A) $-w$ **(B)** $w+1$ **(C)** $i \times w$ **(D)** $i^8 \times w$

Resolução, pg. 65 Exame Nacional de 2011 - Época especial

38. Sejam k e p dois números reais e sejam $z_1 = (3k+2) + pi$ e $z_2 = (3p-4) + (2-5k)i$ dois números complexos.
Quais são os valores de k e de p para os quais z_1 é igual ao conjugado de z_2?

(A) $k = -1$ e $p = 3$ **(B)** $k = 1$ e $p = 3$
(C) $k = 0$ e $p = -2$ **(D)** $k = 1$ e $p = -3$

Resolução, pg. 66 Exame Nacional de 2011 - Época especial

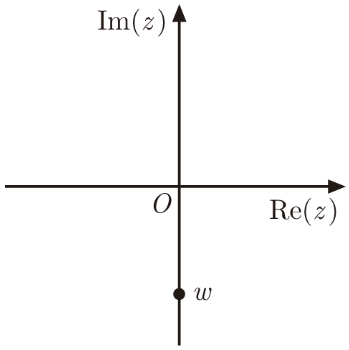
39. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $z_2 = 3$.
Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

(a) Determine o número complexo $w = \dfrac{z_1^4 + 4i}{i}$.
Apresente o resultado na forma trigonométrica.

(b) Escreva uma condição, em $\mathbb{C}$, que defina, no plano complexo, a circunferência que tem centro na imagem geométrica de z_2 e que passa na imagem geométrica de z_1.

Resolução, pg. 67 Exame Nacional de 2010 - 2.ª fase

40. Seja w o número complexo cuja imagem geométrica está representada na figura.



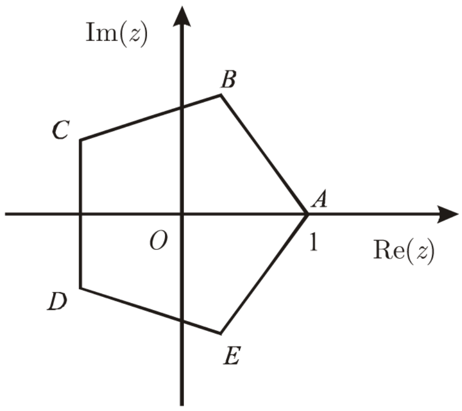
A qual das retas seguintes pertence a imagem geométrica de w^6?

(A) Eixo real
(B) Eixo imaginário
(C) Bissectriz dos quadrantes ímpares
(D) Bissectriz dos quadrantes pares

Resolução, pg. 68

Exame Nacional de 2010 - 2.ª fase

41. A figura representa um pentágono $[ABCDE]$ no plano complexo.
Os vértices do pentágono são as imagens geométricas das raízes de índice n de um número complexo w.
O vértice A tem coordenadas $(1, 0)$.



Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o vértice D do pentágono?

(A) $5e^{i\frac{6\pi}{5}}$ **(B)** $e^{i\frac{6\pi}{5}}$ **(C)** $e^{-i\frac{\pi}{5}}$ **(D)** $e^{i\frac{\pi}{5}}$

Resolução, pg. 69

Exame Nacional de 2010 - 2.ª fase

42. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = e^{i\frac{\pi}{7}}$ e $z_2 = 2 + i$.
Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

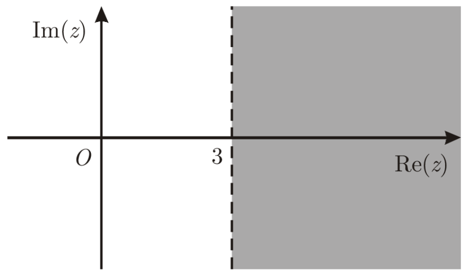
(a) Determine o número complexo $w = \dfrac{3 - i\,(z_1)^7}{\overline{z_2}}$
(i designa a unidade imaginária, e $\overline{z_2}$ designa o conjugado de z_2).
Apresente o resultado na forma trigonométrica.

(b) Mostre que $|z_1 + z_2|^2 = 6 + 4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)$.

Resolução, pg. 70

Exame Nacional de 2010 - 1.ª fase

43. Na figura, está representada, no plano complexo, a sombreado, parte do semiplano definido pela condição $\operatorname{Re}(z) > 3$.



Qual dos números complexos seguintes tem a sua imagem geométrica na região representada a sombreado?

(A) $\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ **(B)** $3\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ **(C)** $\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ **(D)** $3\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$

Resolução, pg. 71

Exame Nacional de 2010 - 1.ª fase

44. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = 3e^{i\left(\frac{\pi}{8} - \theta\right)}$, com $\theta \in \mathbb{R}$.
Para qual dos valores seguintes de θ podemos afirmar que z é um número imaginário puro?

(A) $-\dfrac{\pi}{2}$ **(B)** $\dfrac{\pi}{2}$ **(C)** $\dfrac{\pi}{8}$ **(D)** $\dfrac{5\pi}{8}$

Resolução, pg. 72

Exame Nacional de 2010 - 1.ª fase

45. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número complexo

$$z = \frac{(-1 - i)^8}{\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2} \times e^{i\frac{5\pi}{2}}.$$

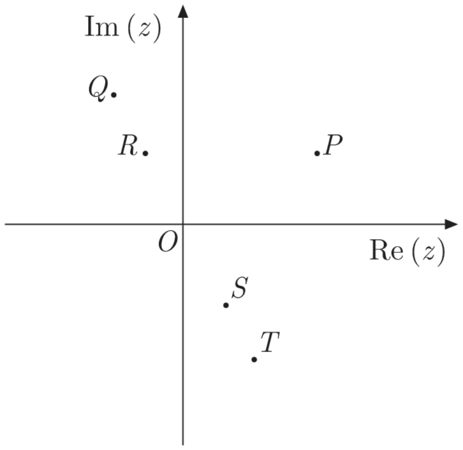
Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

(a) Verifique que $z = 16e^{i\frac{\pi}{4}}$.

(b) Determine a área do polígono cujos vértices, no plano complexo, são as imagens geométricas das raízes quartas de z.

Resolução, pg. 73 Exame Nacional de 2010 - Época especial

46. Na figura, estão representados, no plano complexo, os pontos P, Q, R, S e T.
O ponto P é a imagem geométrica de um número complexo z



Qual dos pontos seguintes, representados na figura, é a imagem geométrica do número complexo $-i \times z$?

(A) Q **(B)** R **(C)** S **(D)** T

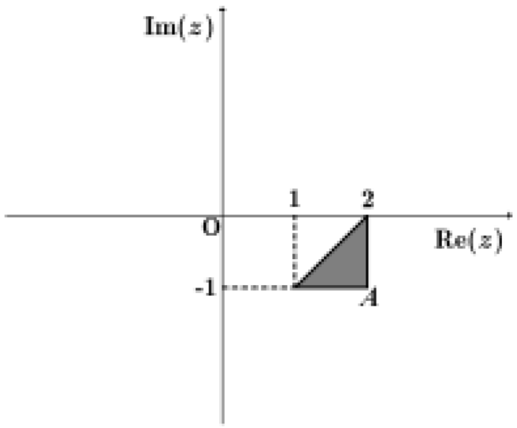
Resolução, pg. 74 Exame Nacional de 2010 - Época especial

47. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o conjunto
$A = \{z \in \mathbb{C} : i \times (z + \overline{z}) = 0\}$ (i designa a unidade imaginária, e $\overline{z}$ designa o conjugado de z).
Qual das retas seguintes pode ser a representação geométrica, no plano complexo, do conjunto A?

(A) o eixo real
(B) o eixo imaginário
(C) a bissetriz dos quadrantes pares
(D) a bissetriz dos quadrantes ímpares

Resolução, pg. 75 Exame Nacional de 2010 - Época especial

48. Na figura, está representada uma região do plano complexo. O ponto A tem coordenadas $(2,-1)$.



Qual das condições seguintes define em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a região sombreada, incluindo a fronteira?

(A) $|z-1| \geq |z-(2-i)| \wedge \text{Re}(z) \leq 2 \wedge \text{Im}(z) \geq -1$
(B) $|z-1| \leq |z-(2-i)| \wedge \text{Re}(z) \leq 2 \wedge \text{Im}(z) \geq -1$
(C) $|z+1| \geq |z-(2+i)| \wedge \text{Re}(z) \leq 2 \wedge \text{Im}(z) \geq -1$
(D) $|z-1| \geq |z-(2-i)| \wedge \text{Im}(z) \leq 2 \wedge \text{Re}(z) \geq -1$

Resolução, pg. 78 Exame Nacional de 2009 - 2.ª fase

49. No conjunto dos números complexos, seja $z = \dfrac{\left(e^{i\frac{\pi}{7}}\right)^7 + (2+i)^3}{4e^{i\frac{3\pi}{2}}}$.

Determine z na forma algébrica, **sem recorrer à calculadora**.

Resolução, pg. 76 Exame Nacional de 2009 - 2.ª fase

50. Considere, em $\mathbb{C}$, um número complexo w, cuja imagem geométrica no plano complexo é um ponto A, situado no $1.°$ quadrante. Sejam os pontos B e C, respetivamente, as imagens geométricas de $\overline{w}$ (conjugado de w) e de $(-w)$.
Sabe-se que $\overline{BC} = 8$ e que $|w| = 5$.
Determine a área do triângulo $[ABC]$.

Resolução, pg. 77 Exame Nacional de 2009 - 2.ª fase

51. Seja k um número real, e $z_1 = (k - i)(3 - 2i)$ um número complexo.
Qual é o valor de k, para que z_1 seja um número imaginário puro?

(A) $-\frac{3}{2}$ **(B)** $-\frac{2}{3}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{3}{2}$

Resolução, pg. 79 Exame Nacional de 2009 - 2.ª fase

52. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \frac{i}{1-i} - i^{18}$ e $z_2 = e^{i\frac{5}{6}\pi}$.

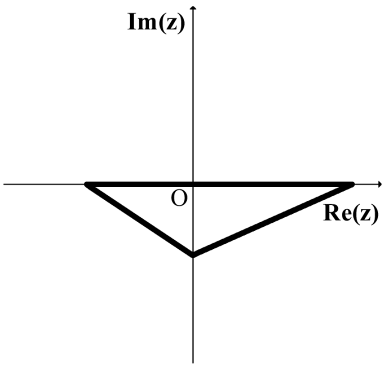
(a) Determine z_1 na forma trigonométrica, sem recorrer à calculadora.

(b) Determine o menor valor de $n \in \mathbb{N}$, tal que $(-iz_2)^n = -1$.

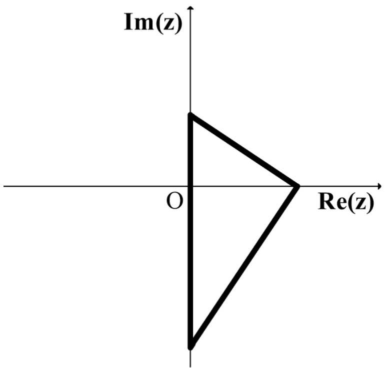
Resolução, pg. 80 Exame Nacional de 2009 - 1.ª fase

53. Seja b um número real positivo, e $z_1 = bi$ um número complexo.
Em qual dos triângulos seguintes os vértices podem ser as imagens geométricas dos números complexos z_1, $(z_1)^2$ e $(z_1)^3$?

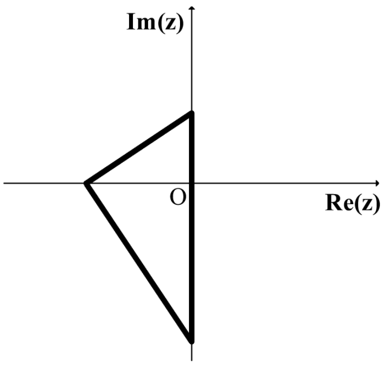
(A)



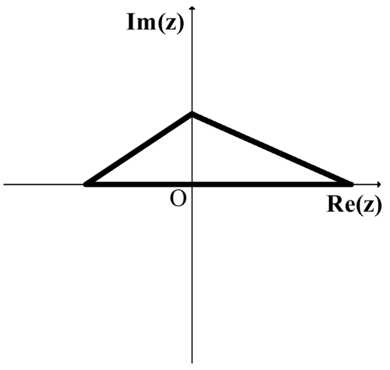
(B)



(C)



(D)



Resolução, pg. 81 Exame Nacional de 2009 - 1.ª fase

54. Seja z um número complexo, em que um dos argumentos é $\frac{\pi}{3}$.

Qual dos valores seguintes é um argumento de $\frac{2i}{\overline{z}}$, sendo $\overline{z}$ o conjugado de z?

(A) $\frac{\pi}{6}$ **(B)** $\frac{2}{3}\pi$ **(C)** $\frac{5}{6}\pi$ **(D)** $\frac{7}{6}\pi$

Resolução, pg. 82

Exame Nacional de 2009 - 1.ª fase

55. Determine o valor de θ, pertencente ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, de modo que a imagem geométrica do número complexo $\left(2e^{i\theta}\right)^2 \times \left(1 + \sqrt{3}i\right)$ pertença à bissetriz do 3.° quadrante.

Resolução, pg. 83

Exame Nacional de 2009 - Época especial

56. Considere, em C, o número complexo $z_1 = 3 - 2i$.

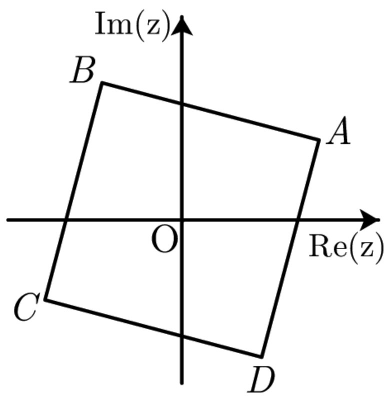
Determine, sem recorrer à calculadora, o número complexo $z = \dfrac{z_1 + z_1^2 + 2i^{43}}{8e^{i\frac{3\pi}{2}}}$.

Apresente o resultado na forma algébrica.

Resolução, pg. 84

Exame Nacional de 2009 - 1.ª fase

57. Considere, em $\mathbb{C}$, o número complexo $w = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.
No plano complexo, a imagem geométrica de w é um dos vértices do quadrado $[ABCD]$, com centro na origem O, representado na figura.



Qual dos números complexos seguintes tem como imagem geométrica o vértice D do quadrado?

(A) $2e^{i\frac{3\pi}{2}}$ **(B)** $2e^{i\frac{7\pi}{4}}$ **(C)** $2e^{i\frac{11\pi}{6}}$ **(D)** $2e^{i\frac{5\pi}{3}}$

Resolução, pg. 85

Exame Nacional de 2008 - 2.ª fase

58. Seja θ um número real pertencente ao intervalo $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
Considere o número complexo $z = i.e^{i\theta}$.
Qual dos números complexos seguintes é o conjugado de z?

(A) $e^{i\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ **(B)** $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ **(C)** $e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$ **(D)** $e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)}$

Resolução, pg. 86 Exame Nacional de 2008 - 2.ª fase

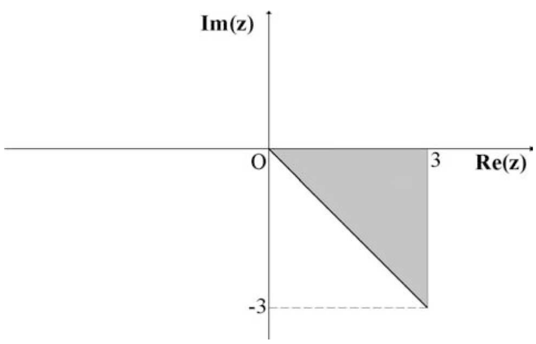
59. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 - i$ (i designa a unidade imaginária).
Sem recorrer à calculadora, determine o valor de $\dfrac{2z_1 - i^{18} - 3}{1 - 2i}$.
Apresente o resultado na forma algébrica.

Resolução, pg. 87 Exame Nacional de 2008 - 2.ª fase

60. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 - i$ (i designa a unidade imaginária).
Considere z_1 uma das raízes quartas de um certo número complexo z.
Determine uma outra raiz quarta de z, cuja imagem geométrica é um ponto pertencente ao 3.° quadrante.
Apresente o resultado na forma trigonométrica.

Resolução, pg. 88 Exame Nacional de 2008 - 2.ª fase

61. Considere a figura, representada no plano complexo.



Qual é a condição, em $\mathbb{C}$, que define a região sombreada da figura, incluindo a fronteira?

(A) $\text{Re}(z) \leq 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$ **(B)** $\text{Re}(z) \leq 3 \wedge 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}$
(C) $\text{Im}(z) \leq 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq (0)$ **(D)** $\text{Re}(z) \geq 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$

Resolução, pg. 89 Exame Nacional de 2008 - 2.ª fase

62. Seja z um número complexo de argumento $\frac{\pi}{6}$.
Qual dos seguintes valores é um argumento de $(-z)$?

(A) $-\frac{\pi}{6}$ **(B)** $\frac{5}{6}\pi$ **(C)** π **(D)** $\frac{7}{6}\pi$

Resolução, pg. 90 Exame Nacional de 2008 - 2.ª fase

63. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ e $z_2 = 8e^{i\times 0}$ (i designa a unidade imaginária).

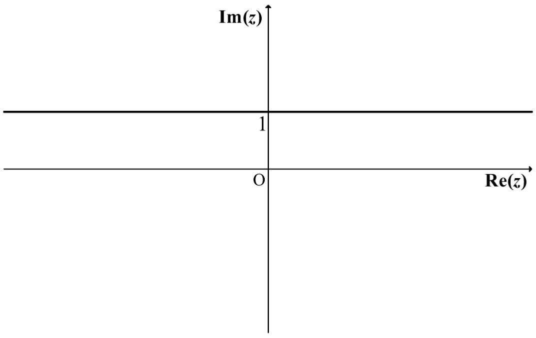
(a) Mostre, sem recorrer à calculadora, que $-z_1$ é uma raiz cúbica de z_2.

(b) No plano complexo, sejam A e B as imagens geométricas de z_1 e de z_2 respetivamente.
Determine o comprimento do segmento $[AB]$.

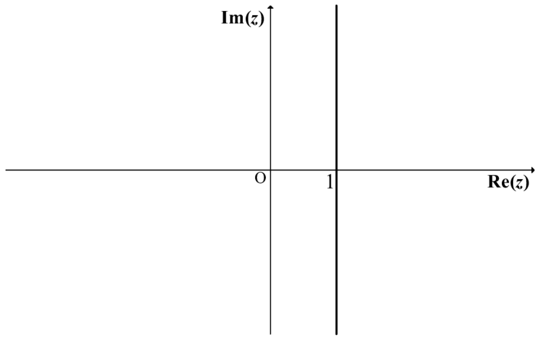
Resolução, pg. 91 Exame Nacional de 2008 - 1.ª fase

64. Considere, em $\mathbb{C}$, a condição $z + \overline{z} = 2$.
Em qual das figuras seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definidos por esta condição?

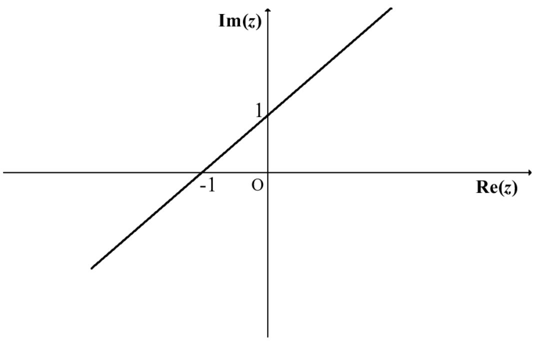
(A)



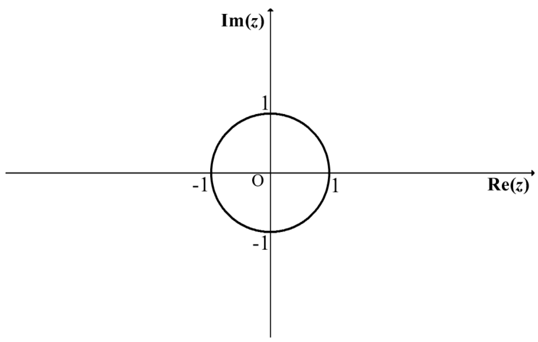
(B)



(C)



(D)



Resolução, pg. 92 Exame Nacional de 2008 - 1.ª fase

65. Seja $z = 3i$ um número complexo.
Qual dos seguintes valores é um argumento de z?

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{2}\pi$ **(C)** π **(D)** $\frac{3}{2}\pi$

Resolução, pg. 93 Exame Nacional de 2008 - 1.ª fase

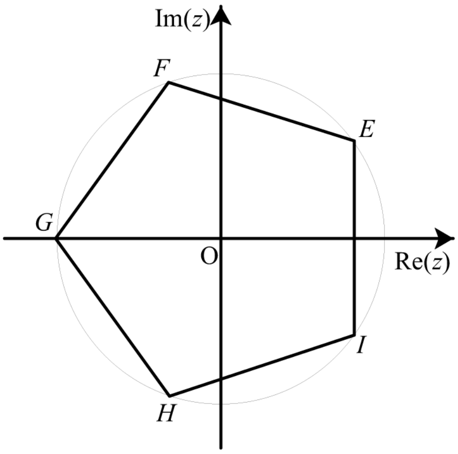
66. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam os números $z_1 = (1-i)\cdot\left(1+e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$ e $z_2 = 8e^{-i\frac{\pi}{4}}$ (i designa a unidade imaginária).

(a) Determine, sem recorrer à calculadora, o número complexo $w = \frac{z_1}{z_2}$.
Apresente o resultado na forma trigonométrica.

(b) Considere o número complexo $z = \overline{z_2}$.
No plano complexo, sejam A e B as imagens geométricas de z e de z_2, respetivamente.
Determine a área do triângulo $[AOB]$, em que O é a origem do referencial.

Resolução, pg. 94 Exame nacional de 2008 - Época especial

67. Na figura está representado, no plano complexo, o polígono $[EFGHI]$, inscrito numa circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a 2. Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice 5 de um certo número complexo; um dos vértices pertence ao eixo real.



Qual é o vértice do polígono $[EFGHI]$ que é a imagem geométrica de $2e^{-i\frac{3\pi}{5}}$?

(A) E **(B)** F **(C)** H **(D)** I

Resolução, pg. 95 Exame nacional de 2008 - Época especial

68. Qual das seguintes condições, na variável complexa z, define, no plano complexo, uma circunferência?

(A) $|z+4|=5$ **(B)** $|z|=|z+2i|$
(C) $0 \leq \arg(z) \leq \pi$ **(D)** $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=2$

Resolução, pg. 96 Exame nacional de 2008 - Época especial

69. Em C conjunto dos números complexos, sejam:

$$z_1 = 3 + yi \quad \text{e} \quad z_2 = 4iz_1$$

(i é a unidade imaginária e y designa um número real).

(a) Considere que, para qualquer número complexo z não nulo, $\arg(z)$ designa o argumento de z que pertence ao intervalo $[0, 2\pi[$.
Admitindo que $\arg(z_1) = \alpha$ e que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, determine o valor de $\arg(-z_2)$ em função de α.

(b) Sabendo que $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$, determine z_2.
Apresente o resultado na forma algébrica.

Resolução, pg. 97 Exame nacional de 2007 - 2.ª fase

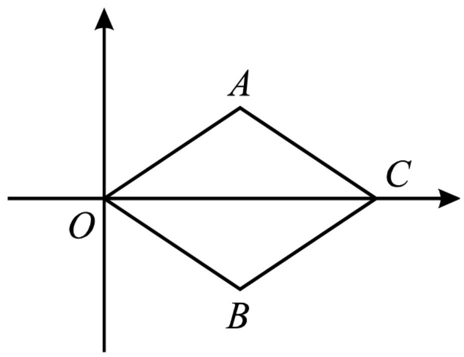
70. Em $\mathbb{C}$ conjunto dos números complexos, seja i a unidade imaginária.
Seja n um número natural tal que $i^n = -i$.
Indique qual dos seguintes é o valor de i^{n+1}.

(A) 1 **(B)** i
(C) -1 **(D)** $-i$

Resolução, pg. 98 Exame nacional de 2007 - 2.ª fase

71. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = e^{i\alpha}$ ($\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$).

(a) Na figura está representado, no plano complexo, o paralelogramo $[AOBC]$.



A e B são as imagens geométricas de z e $\overline{z}$, respetivamente.
C é a imagem geométrica de um número complexo, w.
Justifique que $w = 2\cos\alpha$.

(b) Determine o valor de $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ para o qual $\dfrac{z^3}{i}$ é um número real.

Resolução, pg. 99

Exame nacional de 2006 - 2.ª fase

72. Qual das opções seguintes apresenta duas raízes quadradas de um mesmo número complexo?

(A) 1 e i **(B)** -1 e i
(C) $1-i$ e $1+i$ **(D)** $1-i$ e $-1+i$

Resolução, pg. 100

Exame nacional de 2006 - 2.ª fase

73. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

(a) Considere $z_1 = (2-i)\left(2+e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$ e $z_2 = \frac{1}{5}e^{-i\frac{\pi}{7}}$.
Sem recorrer à calculadora, escreva o número complexo $\dfrac{z_1}{z_2}$ na forma trigonométrica.

(b) Seja z um número complexo cuja imagem geométrica, no no plano complexo, é um ponto A situado no primeiro quadrante.
Seja B a imagem geométrica de $\overline{z}$, conjugado de z. Seja O a origem do referencial.
Sabe-se que o triângulo $[AOB]$ é equilátero e tem perímetro 6.
Represente o triângulo $[AOB]$ e determine z na forma algébrica.

Resolução, pg. 101

Exame nacional de 2006 - 2.ª fase

74. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.
onsidere que, para qualquer número complexo z não nulo, $\arg(z)$ designa o argumento de z que pertence ao intervalo $[0, 2\pi[$.
Represente a região do plano complexo definida pela condição, em $\mathbb{C}$,

$$\frac{1}{2} \leq |z| \leq 1 \ \wedge\ \frac{3\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{5\pi}{4}$$

e determine a sua **área**.

Resolução, pg. 104

Exame nacional de 2006 - 1.ª fase

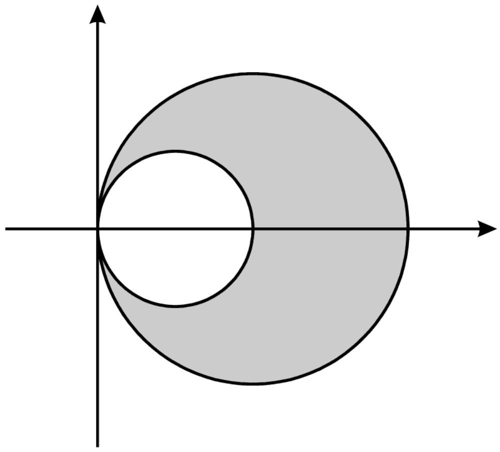
75. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

Sem recorrer à calculadora, determine $\dfrac{4+2i\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^6}{3+i}$ apresentando o resultado final na forma trigonométrica.

Resolução, pg. 103

Exame nacional de 2006 - 1.ª fase

76. Na figura estão representadas, no plano complexo, duas circunferências, ambas com centro no eixo real, tendo uma delas raio 1 e a outra raio 2.



A origem do referencial é o único ponto comum às duas circunferências.
Qual das condições seguintes define a região sombreada, incluindo a fronteira?

(A) $|z-1| \geq 1 \ \wedge \ |z-2| \leq 2$

(B) $|z-1| \geq 2 \ \wedge \ |z-2| \leq 1$

(C) $|z-1| \leq 1 \ \wedge \ |z-2| \geq 2$

(D) $|z-1| \leq 1 \ \wedge \ |z-2| \geq 1$

Resolução, pg. 102

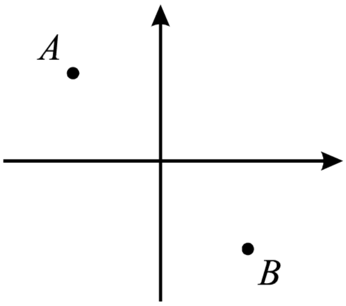
Exame nacional de 2006 - 2.ª fase

77. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.
Considere a equação $iz^3 - \sqrt{3} - i = 0$.
Uma das soluções desta equação tem a sua imagem geométrica no terceiro quadrante do plano complexo.
Sem recorrer à calculadora, determine essa solução, escrevendo-a na forma trigonométrica.

Resolução, pg. 106

Exame nacional de 2006 - 1.ª fase

78. Os pontos A e B, representados na figura, são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes quadradas de um certo número complexo z.



Qual dos números complexos seguintes pode ser z?

(A) 1 **(B)** i **(C)** -1 **(D)** $-i$

Resolução, pg. 105 Exame nacional de 2006 - 1.ª fase

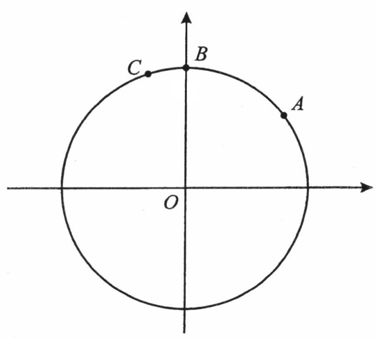
79. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.
Seja B a região do plano complexo definida pela condição.

$$|z| \leq 2 \ \wedge \ \operatorname{Re}(z) \geq 0 \ \wedge \ |z-1| \leq |z-i|.$$

Represente graficamente B e determine a sua área.

Resolução, pg. 107 Exame nacional de 2006 - 1.ª fase

80. Na figura está representada, no plano complexo, uma circunferência centrada na origem do referencial.



Os pontos A, B e C pertencem a essa circunferência.
O ponto A é a imagem geométrica de $4+3i$.
o ponto B pertence ao eixo imaginário.
O arco BC tem 18 graus de amplitude.Em cada uma das quatro alternativas que se seguem, está escrito um número complexo na forma trigonométrica (os argumentos estão expressos

em radianos).Qual deles tem por imagem geométrica o ponto C?

(A) $7e^{i\frac{2\pi}{3}}$

(B) $7e^{i\frac{3\pi}{5}}$

(C) $5e^{i\frac{2\pi}{3}}$

(D) $5e^{i\frac{3\pi}{5}}$

Resolução, pg. 108

Exame nacional de 2006 - Época especial

Resoluções

Resolução da pergunta 1

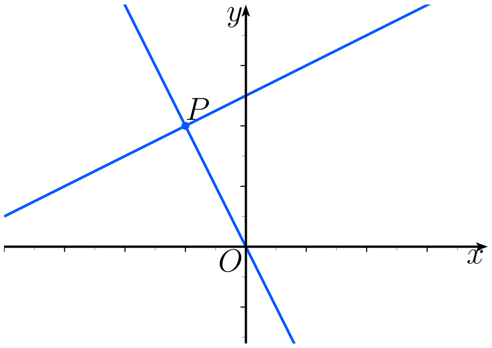
Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1

Seja $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
&(1+2i)z + (1-2i)\overline{z} + 10 = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} (1+2i)z + \overline{(1+2i)z} = -10 \\
\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\ & 2\,\mathrm{Re}\left((1+2i)\,(x+yi)\right) = -10 \Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}\left(x - 2y + (2x+y)\,i\right) = -10 \\
\Leftrightarrow\ & 2x - 4y = -10 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.
\end{aligned}
$$

(1) $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.
(2) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$.

O ponto da reta com menor módulo é o ponto da reta mais próximo da origem. Corresponde ao ponto de interseção da reta perpendicular à reta de equação $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ que passa na origem. A figura seguinte ilustra a situação.



A reta perpendicular à reta de equação $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ que passa no origem é definida pela equação $y = -2x$.
Vamos determinar o seu ponto de interseção resolvendo o sistema seguinte.

$$
\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ --- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{2}x = \frac{5}{2} \\ --- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2. \end{cases}
$$

Podemos concluir que $-1 + 2i$ é o número complexo pretendido.

Resolução da pergunta 2

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1

Seja $w = re^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z \times w = i \Leftrightarrow 2re^{i\left(\theta + \frac{3\pi}{5}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2r = 1 \\ \theta + \frac{3\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ \theta = -\frac{\pi}{10} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Para $k = 1$ temos $\theta = \frac{19\pi}{10}$.
Podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

Resolução da pergunta 3

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

Comecemos por determinar w na forma algébrica.

$$w = \frac{z_1 \times z_2}{z_3} = \frac{(-3+2i)(1+2i)}{2-i} = \frac{-7-4i}{2-i}$$
$$= \frac{(-7-4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-10-15i}{5} = -2-3i.$$

Deste modo, $|w| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.
Como o afixo de w pertence ao terceiro quadrante então $\operatorname{Arg}(w) \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$.
Uma vez que $-3 < -2$, o afixo de w localiza-se abaixo da bissetriz dos quadrantes ímpares.
Temos portanto $\operatorname{Arg}(w) \in \left]-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[$.

Resolução da pergunta 4

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

Comecemos por determinar w na forma trigonométrica.

$$w = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{3\pi}{28}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{28}\right)} = e^{i\frac{\pi}{7}}.$$

Uma vez que o afixo de w é um dos vértices de um polígono regular com centro na origem do referencial então w é uma raiz índice n de w^n, onde $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que $|w| = 1$ e um dos vértices do polígono pertence ao semieixo real positivo, os vértices do polígono regular são as raízes índice n de 1.
Assim,

$$w^n = 1 \Leftrightarrow e^{in\frac{\pi}{7}} = 1 \Leftrightarrow n\frac{\pi}{7} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 14k, k \in \mathbb{Z}.$$

Para $k = 1$ temos $n = 14$.
A opção correta é a **(B)**.

Resolução da pergunta 5

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

Vídeo da resolução:

Resolução:

Sendo $k + i$ uma raiz quadrada do complexo $3 - 4i$ temos

$$(k+i)^2 = 3 - 4i \Leftrightarrow k^2 + 2ki - 1 = 3 - 4i \Leftrightarrow k^2 - 1 = 3 \wedge 2k = -4 \Leftrightarrow k = -2.$$

A opção correta é a **(D)**.

Resolução da pergunta 6

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Comecemos por determinar z_1 na forma algébrica.

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{2}{1-i} + \frac{4}{i^5} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} + \frac{4}{i} \\ &= \frac{2+2i}{2} + \frac{4i}{-1} = 1 + i - 4i = 1 - 3i. \end{aligned}$$

Seja $z_2 = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$z_1 \times z_2 = (1-3i)(x+yi) = x + yi - 3xi + 3y = x + 3y + (y - 3x)i.$$

Como o afixo de $z_1 \times z_2$ tem coordenadas iguais então

$$x + 3y = y - 3x \Leftrightarrow 2x + y = 0 \Leftrightarrow y = -2x.$$

Assim, $z_1 \times z_2 = -5x - 5xi$ e $z_2 = x - 2xi$.
Por outro lado, como $|z_2| = \sqrt{5}$ então

$$\sqrt{x^2 + (-2x)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 5x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

As coordenadas do afixo de $z_1 \times z_2$ são positivas unicamente para $x = -1$.
Temos $z_1 \times z_2 = 5 + 5i$.
Consequentemente $z_2 = -1 + 2i$.

Resolução da pergunta 7

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Seja $z = x + yi$.

$$\mathrm{Re}(z) \times \mathrm{Im}(z) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(x+yi) \times \mathrm{Im}(x+yi) = 1 \Leftrightarrow xy = 1 \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} y = \frac{1}{x}.$$

Trata-se portanto da equação que uma hipérbole conhecida.
A opção correta é a **(D)**.

Resolução da pergunta 8

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Seja $z = \rho e^{i\theta}$.

$$
\begin{aligned}
z^2 = \bar{z} \Leftrightarrow \rho^2 e^{2i\theta} = \rho e^{-i\theta} \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \rho^2 = \rho \\ 2\theta = -\theta + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \rho(\rho - 1) = 0 \\ \theta = \frac{2k\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \rho = 0 \\ \theta = \frac{2k\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} \rho = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

As soluções não nulas são portanto

- para $k = 0$, $e^{i\times 0} = 1$;
- para $k = 1$, $e^{i\times\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$;
- para $k = 2$, $e^{i\times\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Como são três soluções não nulas, os afixos destes complexos são os vértices de um triângulo equilátero. A medida de um dos seus lados é

$$\left| -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1 \right| = \left| -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}.$$

O perímetro do polígono é portanto $3\sqrt{3}$.

Resolução da pergunta 9

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

$$
\begin{aligned}
w = \frac{3z_1 - i\overline{z_2}}{1+i^7} &= \frac{3(2-3i) - i(1+2i)}{1-i} \\
&= \frac{6-9i-i+2}{1-i} = \frac{8-10i}{1-i} \\
&= \frac{(8-10i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{8+8i-10i+10}{1^2+1^2} \\
&= \frac{18-2i}{2} = 9-i.
\end{aligned}
$$

A equação da circunferência de centro no afixo de z_1 e raio $\sqrt{53}$ é $|z-(2-3i)| = \sqrt{53}$. Substituindo w nesta equação vem:

$$|9-i-(2-3i)| = \sqrt{53} \Leftrightarrow |7+2i| = \sqrt{53} \Leftrightarrow \sqrt{7^2+2^2} = \sqrt{53} \Leftrightarrow \sqrt{53} = \sqrt{53}.$$

Podemos assim concluir que o afixo de w pertence à circunferência.

Resolução da pergunta 10

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Sabemos que sendo A o afixo de z, como C se obtém a partir de A através de uma rotação centrada na origem de amplitude $\frac{\pi}{2}$, então C é o afixo de iz.
Como $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$, o afixo de B é $z + iz = z(1 + i)$.
Podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

Resolução da pergunta 11

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

$$
\begin{aligned}
w &= \frac{z_1 + i^6 + 2\overline{z_1}}{z_1 - z_2} \\
&= \frac{3 + 4i - 1 + 6 - 8i}{-1 - 2i} \\
&= \frac{8 - 4i}{-1 - 2i} \\
&= \frac{(8 - 4i)(-1 + 2i)}{(-1 - 2i)(-1 + 2i)} \\
&= \frac{20i}{5} = 4i.
\end{aligned}
$$

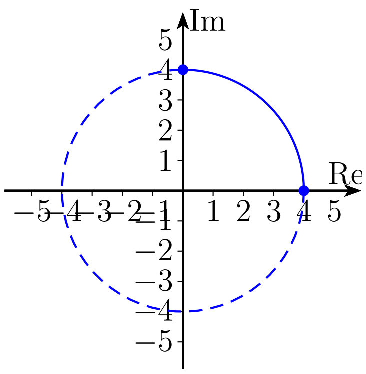
Assim,

- $|z| = |w| \Leftrightarrow |z| = 4$ representa, no plano de Argand, a circunferência centrada na origem com raio 4;
- $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ representa os complexos cujo afixo se encontra no eixo real ou acima deste;
- $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ representa os complexos cujo afixo se encontra no eixo imaginário ou à direita deste.

Na figura seguinte está representada no plano de Argand a região definida pela condição

$$|z| = |w| \wedge \mathrm{Im}(z) \geq 0 \wedge \mathrm{Re}(z) \geq 0.$$

Trata-se de um arco de circunferência.



Como o perímetro da circunferência completa é
$2\pi \times 4 = 8\pi$, o perímetro do arco de circunferência é $\frac{8\pi}{4} = 2\pi$ unidades de comprimento.

Resolução da pergunta 12

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

$\overline{z} = -1 - 2i$.
Sendo $\theta \in [0, 2\pi[$, como o afixo de $\overline{z}$ pertence ao $3.^\circ$ quadrante,

$$\text{tg}\theta = \frac{-2}{-1} \Leftrightarrow \theta = \text{tg}^{-1}(2) + \pi \Leftrightarrow \theta \approx 4.25 \in \left]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[.$$

A opção correta é a **(D)**.

Resolução da pergunta 13

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

$$\begin{aligned} z &= \frac{(2-i)^2+1+i}{1-2i}+3i^{15} \\ &= \frac{4-4i-1+1+i}{1-2i}+3i^3 \\ &= \frac{4-3i}{1-2i}-3i \\ &= \frac{(4-3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}-3i \\ &= \frac{10+5i}{5}-3i = 2-2i. \end{aligned}$$

Assim, $-\frac{1}{2}\bar{z} = -1-i$.
Como $|-1-i| = \sqrt{2}$ e $\operatorname{Arg}(-1-i) = -\frac{3\pi}{4}$ então

$$-\frac{1}{2}\bar{z} = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$

Resolução da pergunta 14

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Como o pentágono $[ABCDE]$ é regular então os seus vértices são os afixos das raízes índice 5 de um determinado complexo. Seja w esse complexo. Sabemos que qualquer uma das raízes índice 5 elevada a 5 é igual a w. Deste modo, com C é o afixo de $e^{i\pi}$ e

$$\left(e^{i\pi}\right)^5 = e^{5i\pi} = -1,$$

podemos concluir que $w = z^5 = -1$.
A opção correta é a **(A)**.

Resolução da pergunta 15

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Vamos começar por simplificar w.

$$\begin{aligned} w &= 1 + \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}i^5}{1+2i} \\ &= 1 + \frac{\left(2\sqrt{3} - \sqrt{3}i\right)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} \\ &= 1 + \frac{2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}i - \sqrt{3}i - 2\sqrt{3}}{5} = 1 - \sqrt{3}i. \end{aligned}$$

Vamos agora escrever w na forma trigonométrica.
Como $|1-\sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2$ e $\operatorname{Arg}(w) = -\frac{\pi}{3}$ então $w = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
Por outro lado, sabemos que os argumentos das raízes quartas de um complexo estão em progressão aritmética de razão $\frac{\pi}{2}$. Consequentemente, a raiz quarta pretendida é $2e^{-i\left(\frac{\pi}{3}\right)} \times e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Resolução da pergunta 16

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Notemos que, como

$$|\cos x + i\sin x| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1,$$

então

$$\begin{aligned} &(\cos x + i\sin x)^{10} = \left(e^{ix}\right)^{10} \\ &= e^{10ix} = \cos(10x) + i\sin(10x). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{3}\operatorname{Re}(z) &\Leftrightarrow \sin(10x) = \frac{1}{3}\cos(10x) \\ \Leftrightarrow \tan(10x) = \frac{1}{3} &\wedge \cos(10x) \neq 0. \end{aligned}$$

Logo, como $x \in \left]0, \frac{\pi}{12}\right[$, $10x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x \approx 0.03$.

A opção correta é a **(B)**.

Resolução da pergunta 17

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6

A distância entre as imagens geométricas de z_1 e z_2 ser $\sqrt{5}$ pode ser equacionada por $|z_1 - z_2| = \sqrt{5}$.
Para prosseguir, devemos escrever z_1 e z_2 na forma algébrica.

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1-3i^{19}}{1+i} = \frac{1-3i^{19-16}}{1+i} = \frac{1-3i^3}{1+i} \\ &= \frac{1-3\times(-i)}{1+i} = \frac{1+3i}{1+i} = \frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{1-i+3i-3i^2}{1^2+1^2} = \frac{4+2i}{2} = 2+i. \end{aligned}$$

$z_2 = -3ke^{i\frac{3\pi}{2}} = -3k \times (-i) = 3ki,\ k \in \mathbb{R}^+$.
Deste modo,

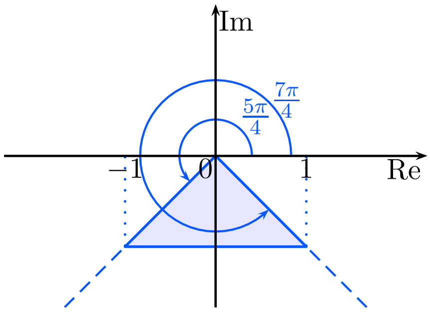
$$\begin{aligned} & |z_1 - z_2| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |2+i-3ki| = \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow\ & |2+(1-3k)i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{2^2+(1-3k)^2} = \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow\ & 4+1-6k+9k^2 = 5 \Leftrightarrow 9k^2-6k = 0 \\ \Leftrightarrow\ & k(9k-6) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = \frac{6}{9} \\ \Leftrightarrow\ & k = 0 \vee k = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Como $k \in \mathbb{R}^+$ então $k = \frac{2}{3}$.

Resolução da pergunta 18

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6

A figura em baixo representa a região.



Como a área do triângulo é $\dfrac{2 \times 1}{2} = 1$, a opção correta é a **(D)**.

Resolução da pergunta 19

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6

Comecemos por escrever $-1+i$ na forma trigonométrica $re^{i\alpha}$ onde:

- $r = |-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$;
- $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{-1} = -1$; Como o afixo de $-1+i$ pertence ao $2.^\circ$ quadrante então $\alpha = \frac{-\pi}{4} + \pi = \frac{3}{4}\pi$.

Deste modo temos $-1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}$.
Vamos agora escrever z na forma trigonométrica:

$$z = \frac{-1+i}{\left(\rho e^{i\theta}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}}{\rho^2 e^{i(2\theta)}} = \frac{\sqrt{2}}{\rho^2}e^{i\left(\frac{3}{4}\pi - 2\theta\right)}.$$

Por outro lado, como $|-\sqrt{2}i| = \sqrt{2}$ e o afixo de $-\sqrt{2}i$ pertence à parte negativa do eixo imaginário temos $-\sqrt{2}i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
Vamos finalmente igualar os dois complexos na forma trigonométrica:
$z = w \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\rho^2} = \sqrt{2} \wedge \frac{3}{4}\pi - 2\theta = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\overset{\rho>0}{\Rightarrow} \rho = 1 \wedge \theta = \frac{5}{8}\pi - k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Vamos agora atribuir valores inteiros a k na expressão $\theta = \frac{5}{8}\pi - k\pi$ de modo a obter o valor do intervalo $]0,\pi[$:

- $k = -1 \Rightarrow \theta = \frac{5}{8}\pi + \pi = \frac{13}{8}\pi \notin]0,\pi[$;
- $k = 0 \Rightarrow \theta = \frac{5}{8}\pi \in]0,\pi[$;
- $k = 1 \Rightarrow \theta = \frac{5}{8}\pi - \pi = -\frac{3}{8}\pi \notin]0,\pi[$.

Podemos concluir que $\theta = \frac{5}{8}\pi$ e $\rho = 1$.

Resolução da pergunta 20

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6

Os afixos das raízes índice 6 são os vértices de um hexágono centrado no plano de Argand.
Como $|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$ então o hexágono apresenta o aspeto da figura ao lado.
Como um hexágono é constituído por 6 triângulos equiláteros, estamos perante um hexágono com 5 unidades de lado.
Consequentemente o seu perímetro é $5 \times 6 = 30$ e a opção correta é a **(C)**.

Resolução da pergunta 21

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 7

Comecemos por determinar z_2. Como $z_2 = 2 + i$ então

$$
\begin{aligned}
&z_1 \times \overline{z_2} = 4 - 3i \Leftrightarrow (2+i) \times \overline{z_2} = 4 - 3i \Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{4-3i}{2+i} \\
\Leftrightarrow &\overline{z_2} = \frac{(4-3i)(2-i)}{4+1} \Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{8-4i-6i+3i^2}{5} \Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{5-10i}{5} \\
\Leftrightarrow &\overline{z_2} = 1 - 2i \Leftrightarrow z_2 = 1 + 2i.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\
\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= 1 + i.
\end{aligned}
$$

Substituindo $1 + i$ na condição $|z - z_1| = |z - z_2|$ vem

$$
|1 + i - (2 + i)| = |1 + i - (1 + 2i)| \Leftrightarrow |-1| = |-i| \Leftrightarrow 1 = 1.
$$

Geometricamente, significa que o afixo de $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ pertence à mediatriz do segmento de reta de extremos nos afixos de z_1 e z_2.

Resolução da pergunta 22

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 7

Seja $z = \rho e^{i\frac{\pi}{5}}$, $\rho \in \mathbb{R}^+$.

$$-5iz = 5e^{-i\frac{\pi}{2}} \times \rho e^{i\dfrac{\pi}{5}} = 5\rho e^{i\left(-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{5}\right)}$$

$$5\rho e^{i\left(-\dfrac{-5\pi+2\pi}{10}\right)} = 5\rho e^{-i\dfrac{3\pi}{10}}$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

Resolução da pergunta 23

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 7

Comecemos por escrever o complexo $-1+\sqrt{3}i$ na forma trigonométrica.$|-1+\sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2$.
Seja $\alpha = \arg\left(-1+\sqrt{3}i\right)$. Como o afixo de $-1+\sqrt{3}i$ pertence ao $2.^\circ$ quadrante então

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{-1} \Leftarrow \alpha = -\frac{\pi}{3}+\pi = \frac{2}{3}\pi$$

e temos

$$-1+\sqrt{3}i = 2e^{i\frac{2}{3}\pi}.$$

Deste modo,

$$z_1 = \frac{8e^{i\theta}}{2e^{i\frac{2}{3}\pi}} = 4e^{i\left(\theta-\frac{2}{3}\pi\right)}$$

e temos

$$\overline{z_1}\times z_2 = 4e^{i\left(-\theta+\frac{2}{3}\pi\right)}\times e^{i(2\theta)} = 4e^{i\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)}.$$

Para este complexo ser um número real deve verificar-se

$$\theta+\frac{2}{3}\pi = k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = -\frac{2}{3}\pi+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Para $k=1$ temos $\theta = -\frac{2}{3}\pi+\pi = \frac{\pi}{3}$, sendo este o valor pretendido.

Resolução da pergunta 24

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 7

Como $-3e^{i\theta} = 3e^{i(\theta+\pi)}$ e

$$\theta \in \left]\pi, \frac{3}{2}\pi\right[\Leftrightarrow \theta + \pi \in \left]\pi + \pi, \frac{3}{2}\pi + \pi\right[$$
$$\Leftrightarrow \theta + \pi \in \left]2\pi, \frac{5}{2}\pi\right[.$$

Para sabermos o quadrante a que pertence a imagem geométrica do complexo z podemos considerar o intervalo

$$\left]2\pi - 2\pi, \frac{5}{2}\pi - 2\pi\right[= \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

e concluir que a opção correta é a **(A)**.

Resolução da pergunta 25

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 7

Comecemos por notar que como $z^4 = \overline{z_1} \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{\overline{z_1}}$ então pretendemos encontrar as raízes quartas do número complexo $\overline{z_1}$. Para tal, comecemos por escrever z_1 na forma trigonométrica.Na Figura 1 está representado o complexo $-1+i$ no plano de Argand.
Como o afixo de $-1+i$ pertence ao $2.^{\circ}$ quadrante temos

$$\begin{aligned}\theta &= \tan^{-1}\frac{1}{-1}+\pi\\ &= \tan^{-1}(-1)+\pi = -\frac{\pi}{4}+\pi = \frac{3}{4}\pi\end{aligned}$$

Como $|-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$ e $\theta = \frac{3}{4}\pi$ então

$$-1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}.$$

Deste modo,

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}} = e^{i\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{12}\right)} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

e $\overline{z_1} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

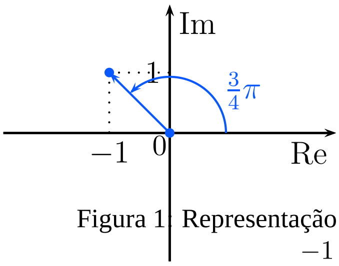


Figura 1: Representação geométrica do complexo $-1+i$.

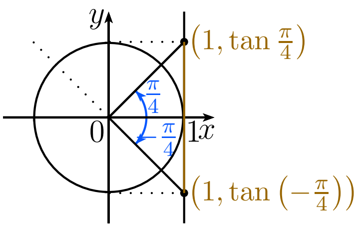


Figura 2: Representação de $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ na circunferência trigonométrica

Pela fórmula de Moivre generalizada as raízes quartas de $\overline{z_1}$ são

$$z_k = \sqrt[4]{1}e^{i\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)},\ k\in\{0,1,2,3\}.$$

Logo, substituindo em z_k o k por $0,1,2,3$ obtemos:

- $z_0 = e^{i\left(-\frac{\frac{2\pi}{3}}{4}\right)} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$;

- $z_1 = e^{i\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{3}}$;
- $z_2 = e^{i\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{5}{6}\pi}$;
- $z_3 = e^{i\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{4}{3}\pi}$.

O conjunto solução da equação $z^4 = \overline{z_1}$ é portanto

$$S = \left\{e^{-i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{5}{6}\pi}, e^{i\frac{4}{3}\pi}\right\}.$$

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 7

Resolução da pergunta 26

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 8

Como o triângulo $[OAB]$ é equilátero então $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$ e $\measuredangle AOB = \frac{\pi}{3}$. Deste modo

$$z = 1e^{-i\frac{\pi}{3}} = e^{i\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi\right)} = e^{i\frac{5\pi}{3}}.$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(D)**.

Resolução da pergunta 27

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 8

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 28

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 8

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 29

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 8

Vídeos da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

(a)

(b)

Resolução da pergunta 30

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 9

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 35

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 11

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 31

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 9

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 36

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 11

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 32

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 10

Vídeos da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):
(a)
(b)

Resolução da pergunta 33

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 10

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 34

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 10

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 37

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 12

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 38

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 13

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 39

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 13

Vídeos da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):
(a)
(b)

Resolução da pergunta 40

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 14

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 41

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 14

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 42

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 15

Vídeos da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):
(a)
(b)

Resolução da pergunta 43

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 15

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 44

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 15

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 45

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 15

Vídeos da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

(a)

(b)

Resolução da pergunta 46

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 16

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 47

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 16

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 49

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 17

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 50

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 17

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 48

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 17

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 51

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 18

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 52

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 18

Vídeos da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):
(a)
(b)

Resolução da pergunta 53

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 18

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 54

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 19

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 55

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 19

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 56

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 19

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 57

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 19

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 58

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 20

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 59

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 20

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 60

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 20

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 61

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 20

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 62

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 21

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 63

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 21

Vídeos da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

(a)

(b)

Resolução da pergunta 64

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 21

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 65

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 22

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 66

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 22

Vídeos da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):
(a)
(b)

Resolução da pergunta 67

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 22

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 68

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 23

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 69

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 23

Vídeos da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):
(a)
(b)

Resolução da pergunta 70

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 23

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 71

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 23

Vídeos da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):
(a)
(b)

Resolução da pergunta 72

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 24

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 73

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 24

Vídeos da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):
(a)
(b)

Resolução da pergunta 76

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 25

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 75

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 25

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 74

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 24

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 78

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 26

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 77

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 25

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 79

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 26

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 80

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 26

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):