Funções exponencial e logarítmica - Exame

Perguntas de Exames Nacionais dos últimos 16 anos com resolução e/ou vídeo.
Versão de 22 de março de 2022.
Verifique se existe versão com data mais recente aqui e aceda a mais fichas aqui.

1. Determine, sem recorrer à calculadora, os números reais que são solução da equação

$$x\ln(1-x)-\ln(1-x)=(1-x)\ln(3-2x).$$

Resolução, pg. 25 Exame Nacional de 2021 - 2.ª fase

2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.
Considere, para um certo número real k, a função g, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por

$$g\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x}{x^2-x}+k & \text{se } x<0\\ 2+x\ln x & \text{se } x>0\end{cases}$$

Sabe-se que existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.
Determine o valor de k.

Resolução, pg. 26 Exame Nacional de 2021 - 2.ª fase

3. Resolva este item sem recorrer à calculadora.
Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x)=\dfrac{x^3}{2x^2-\ln x}$.
Estude a função h quanto à existência de assíntota oblíqua ao seu gráfico e, caso esta exista,

escreva a sua equação reduzida.

Resolução, pg. 27

Exame Nacional de 2021 - 1.ª fase

4. Num laboratório cuja temperatura ambiente é constante, aqueceu-se uma substância até atingir uma certa temperatura, superior à temperatura ambiente, e, a seguir, deixou-se arrefecer essa substância durante uma hora.
Admita que a temperatura dessa substância, em graus Celsius, t minutos após o início do arrefecimento, é dada por

$$T(t) = 20 + 100e^{-kt},\ 0 \leq t \leq 60$$

em que k é uma constante real positiva.

4.1. Durante o arrefecimento, houve um instante t_1 em que a temperatura da substância foi 30 °C.
Qual é o valor de k?

(A) $\ln\left(\frac{10}{t_1}\right)$ **(B)** $t_1 - \ln 10$ **(C)** $\frac{\ln 10}{t_1}$ **(D)** $t_1 + \ln 10$

4.2. Considere $k = 0{,}04$.
Sabe-se que, durante os primeiros t_2 minutos, a taxa média de variação da função T foi iguala $-2{,}4$.
Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de t_2, sabendo que essevalor existe e é único.
Apresente o resultado em minutos e segundos (segundos arredondados às unidades).
Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.
Na sua resposta:
– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às milésimas.
Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Resolução, pg. 28

Exame Nacional de 2021 - 2.ª fase

5. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - e^{-x}}{x} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Resolva os itens **5.1.** e **5.2.** sem recorrer à calculadora.

5.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais ao seu gráfico e, caso estas existam, escreva as respetivas equações.

5.2. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa -2.

Resolução, pg. 29

Exame Nacional de 2021 - 2.ª fase

6. Determine, sem recorrer à calculadora, os números reais que são solução da equação

$$\ln\left((1-x)\,e^{x-1}\right) = x.$$

Resolução, pg. 30

Exame Nacional de 2021 - 1.ª fase

7. Seja f a função, de domínio $]0,+\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2(1+2\ln x) & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{5-5e^{x-1}}{x^2+3x-4} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

7.1. Averigue se a função f é contínua em $x=1$.

7.2. Estude, no intervalo $]0,1[$, a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.
Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

Resolução, pg. 31

Exame Nacional de 2021 - 1.ª fase

8. Seja f uma função, de domínio $]0,+\infty[$, cuja derivada, f', de domínio $]0,+\infty[$, é dada por $f'(x) = \dfrac{2+\ln x}{x}$.
Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.
Na sua resposta, apresente:
– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f.

Resolução, pg. 32

Exame nacional de 2020 - 2.ª fase

9. Seja h a função, de domínio $]-\infty,4[$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} 1+xe^{x-1} & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{\sqrt{x}-1}{\operatorname{sen}(x-1)} & \text{se } 1 < x < 4 \end{cases}$$

Mostre que o gráfico da função h tem uma assíntota horizontal e apresente uma equação dessa assíntota.

Resolução, pg. 33 Exame Nacional de 2020 - 2.ª fase

10. Dados dois números reais positivos, sabe-se que a soma dos seus logaritmos na base 8 é igual a $\frac{1}{3}$.
A que é igual o produto desses dois números?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 8 **(D)** 9

Resolução, pg. 34 Exame Nacional de 2020 - 2.ª fase

11. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - e^x} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x^2 \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens **(a)** e **(b)** sem recorrer à calculadora.

(a) Averigue se a função g é contínua em $x = 0$.

(b) Estude a função g quanto à monotonia em $]0, +\infty[$ e determine, caso existam, os extremos relativos.
Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

Resolução, pg. 35 Exame Nacional de 2020 - 1.ª fase

12. Seja f a função definida em $]-\infty, 2]$ por $f(x) = x + \ln(e^x + 1)$.
Resolva os itens **(a)** e **(b)** sem recorrer à calculadora.

(a) O gráfico de f tem uma assíntota oblíqua.
Determine uma equação dessa assíntota.

(b) A equação $f(x) = 2x + 1$ tem uma única solução.
Determine essa solução e apresente-a na forma $-\ln k$, com $k > 0$.

(c) Seja h a função definida em $]-\infty, 2]$ por $h(x) = f(x) - x$.
Qual das expressões seguintes pode ser a expressão analítica da função h^{-1}, função inversa de h?

(A) $e^x - 1$ **(B)** $1 - e^x$ **(C)** $\ln(e^x - 1)$ **(D)** $\ln(1 - e^x)$

Resolução, pg. 37 Exame Nacional de 2020 - 1.ª fase

13. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \dfrac{8n-4}{n+1}$.
Seja f a função, de domínio $]-\infty, 8[$, definida por $f(x) = \log_2(8-x)$.
A que é igual $\lim f\left(u_n\right)$?

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

Resolução, pg. 38 Exame Nacional de 2020 - 1.ª fase

14. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, definida por $h(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$.

(a) Estude a função h quanto à existência de assíntotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso existam, escreva as suas equações.

(b) Resolva, em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, a equação $(x-1) \times h(x) + 2e^{-x} = 3$.

Resolução, pg. 39 Exame Nacional de 2019 - 2.ª fase

15. Qual é, para qualquer número real positivo a, o limite da sucessão $\left(\dfrac{n+\ln a}{n}\right)^{n+2}$?

(A) a^2 **(B)** $2a$ **(C)** a **(D)** $\sqrt{a}$

Resolução, pg. 40 Exame Nacional de 2019 - 2.ª fase

16. Para um certo número real k, é contínua em $\mathbb{R}$ a função f, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log_3 k & \text{se } x = 1 \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \end{cases}$$

Qual é o valor de k?

(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 8 **(D)** 9

Resolução, pg. 41 Exame Nacional de 2019 - 2.ª fase

17. Sejam a e b dois números reais positivos tais que $a > b$.
Sabe-se que $a + b = 2(a-b)$.
Qual é o valor, arredondado às décimas, de $\ln\left(a^2 - b^2\right) - 2\ln(a+b)$?

(A) $0{,}7$ **(B)** $1{,}4$ **(C)** $-0{,}7$ **(D)** $-1{,}4$

Resolução, pg. 45 Exame Nacional de 2019 - 1.ª fase

18. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

(a) Estude a função g quanto à monotonia e determine, caso existam, os extremos relativos.

(b) Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = g(x) + 2x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Sabe-se que o gráfico da função h tem uma assíntota oblíqua.
Qual é o declive dessa assíntota?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** e **(D)** e^2

Resolução, pg. 42

Exame Nacional de 2019 - 1.ª fase

19. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{x}{x - \ln x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(a) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 1.

(b) Averigue se a função f é contínua no ponto 0.
Justifique a sua resposta.

Resolução, pg. 43

Exame Nacional de 2019 - 1.ª fase

20. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 + \dfrac{e^x}{1-x} & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{\ln(x^2) + 2}{x} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Determine $f'(0)$, recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.

(b) Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do seu gráfico.

(c) Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = x + 1$.
Qual é o valor de $(f \circ h^{-1})(2)$?
(o símbolo $\circ$ designa a composição de funções).

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3

Resolução, pg. 46

Exame Nacional de 2018 - 2.ª fase

21. Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação

$$\log_2(x+1) \leq 3 - \log_2(8-x).$$

Apresente a resposta usando a notação de intervalos de números reais.

Resolução, pg. 47

Exame Nacional de 2018 - 2.ª fase

22. Qual é o valor do limite da sucessão de termo geral $\left(\frac{n+5}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$?

(A) $+\infty$ **(B)** 1 **(C)** e^4 **(D)** e^2

Resolução, pg. 48

Exame Nacional de 2018 - 2.ª fase

23. Seja g a função, de domínio $]-\infty, \pi]$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{4x} & \text{se } x < 0 \\ \\ \dfrac{1}{2-\sin(2x)} & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

(a) Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função g não tem zeros.

(B) A função g tem um único zero.

(C) A função g tem exatamente dois zeros.

(D) A função g tem exatamente três zeros.

(b) Averigue se a função g é contínua no ponto 0.
Justifique a sua resposta.

Resolução, pg. 50

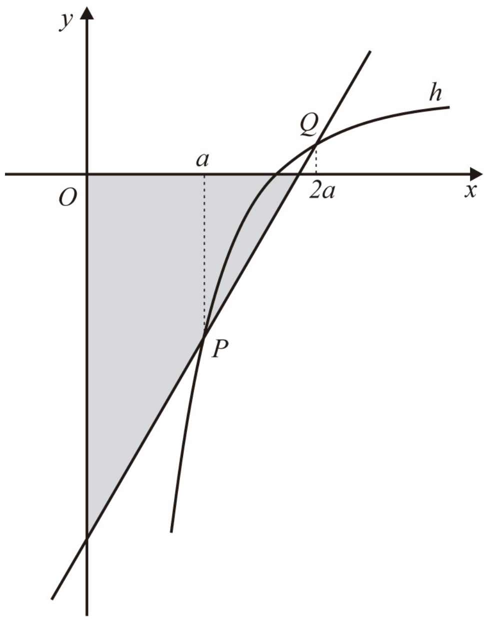
Exame Nacional de 2018 - 1.ª fase

24. Sejam a e b números reais superiores a 1 tais que $\ln b = 4 \ln a$.
Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $a^x \geq b^{\frac{1}{x}}$.
Apresente a resposta usando a notação de intervalos de números reais.

Resolução, pg. 51

Exame Nacional de 2018 - 1.ª fase

25. Na figura, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.



Para cada número real a pertencente ao intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ sejam P e Q os pontos do gráfico da função h de abcissas a e $2a$, respetivamente.
Tal como a figura sugere, a reta PQ define, com os eixos coordenados, um triângulo retângulo.
Mostre que existe, pelo menos, um número real a pertencente ao intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ para o qual esse triângulo é isósceles.
Sugestão: comece por identificar o valor do declive da reta PQ para o qual o triângulo é isósceles.

Resolução, pg. 49

Exame Nacional de 2018 - 1.ª fase

26. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{1-e^{x-1}} & \text{se } x < 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ 3 + \dfrac{\sin(x-1)}{1-x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Estude a função g quanto à continuidade no ponto 1.

Resolução, pg. 53

Exame Nacional de 2017 - 2.ª fase

27. Seja k um número real.

Considere a sucessão convergente (u_n) definida por $u_n = \left(\frac{n+k}{n}\right)^n$.

Sabe-se que o limite de (u_n) é solução da equação $\ln\left(\frac{x}{e}\right) = 3$.

Qual é o valor de k?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** 3 **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** 4

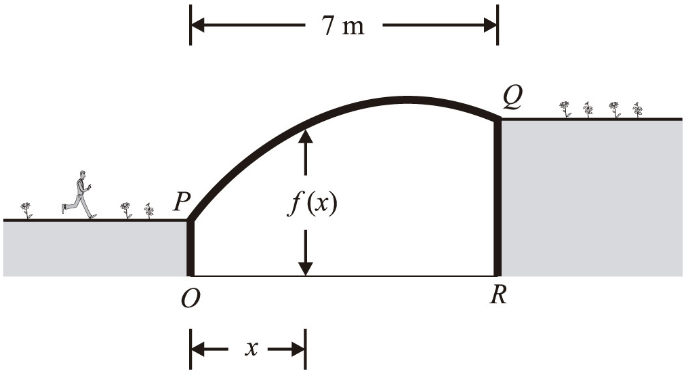
Resolução, pg. 52

Exame Nacional de 2018 - 1.ª fase

28. Na figura, está representada uma secção de uma ponte pedonal que liga as duas margens de um rio.

A ponte, representada pelo arco PQ, está suportada por duas paredes, representadas pelos segmentos de reta $[OP]$ e $[RQ]$. A distância entre as duas paredes é 7 metros.

O segmento de reta $[OR]$ representa a superfície da água do rio.



Considere a reta OR como um eixo orientado da esquerda para a direita, com origem no ponto O e em que uma unidade corresponde a 1 metro.

Para cada ponto situado entre O e R, de abcissa x, a distância na vertical, medida em metros, desse ponto ao arco PQ é dada por

$$f(x) = 9 - 2,5\left(e^{1-0,2x} + e^{0,2x-1}\right), \text{com } x \in [0,7].$$

Resolva os itens **(a)** e **(b)** recorrendo a métodos analíticos; utilize a calculadora apenas para efetuar eventuais cálculos numéricos.

(a) Seja S o ponto pertencente ao segmento de reta $[OR]$ cuja abcissa x verifica a equação

$$\sqrt{(f(0))^2 + x^2} = 2.$$

Resolva esta equação, apresentando a solução arredondada às décimas, e interprete essa solução no contexto da situação descrita.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

(b) O clube náutico de uma povoação situada numa das margens do rio possui um barco à vela. Admitaque, sempre que esse barco navega no rio, a distância do ponto mais alto do mastro à superfície da água é 6 metros.
Será que esse barco, navegando no rio, pode passar por baixo da ponte?
Justifique a sua resposta.

Resolução, pg. 54

Exame Nacional de 2017 - 2.ª fase

29. O José e o António são estudantes de Economia. O José pediu emprestados 600 euros ao António para comprar um computador, tendo-se comprometido a pagar o empréstimo em prestações mensais sujeitas a um certo juro.
Para encontrarem as condições de pagamento do empréstimo, os dois colegas adaptaram uma fórmula que tinham estudado e estabeleceram um contrato.
Nesse contrato, a prestação mensal p, em euros, que o José tem de pagar ao António é dada por

$$p = \frac{600x}{1 - e^{-nx}}$$

em que n é o número de meses em que o empréstimo será pago e x é a taxa de juro mensal.
Resolva os itens seguintes recorrendo a métodos analíticos.
Na resolução do item **(a)**, pode utilizar a calculadora para efetuar eventuais cálculos numéricos.

(a) O José e o António acordaram que a taxa de juro mensal seria 0.3% $(x = 0.003)$.
Em quantos meses será pago o empréstimo, sabendo-se que o José irá pagar uma prestação mensal de 24 euros?
Apresente o resultado arredondado às unidades.
Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

(b) Determine $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{600x}{1 - e^{-nx}}$, em função de n, e interprete o resultado no contexto da situação descrita.

Resolução, pg. 55

Exame Nacional de 2017 - 1.ª fase

30. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln x$.
Considere a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{n}{e^n}$.
Qual é o valor de $\lim f\left(u_n\right)$?

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** e **(D)** $+\infty$

Resolução, pg. 56

Exame Nacional de 2017 - 1.ª fase

31. Para certos valores de a e de b ($a > 1$ e $b > 1$), tem-se $\log_a (ab^3) = 5$.
Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_b a$?

(A) $\frac{5}{3}$ **(B)** $\frac{3}{4}$ **(C)** $\frac{3}{5}$ **(D)** $\frac{1}{3}$

Resolução, pg. 57

Exame Nacional de 2017 - 1.ª fase

32. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Resolva os itens seguintes recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

(a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados.

(b) Resolva a inequação $f(x) > 2 \ln x$.
Apresente o conjunto solução usando a notação de intervalos de números reais.

(c) Para um certo número real k, a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \frac{k}{x} + f(x)$, tem um extremo relativo para $x = 1$.
Determine esse número k.

Resolução, pg. 58

Exame Nacional de 2016 - 2.ª fase

33. Considere a função f, de domínio $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, definida por $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.
Resolva os itens seguintes recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

(a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

(b) Seja a um número real maior do que 1.
Mostre que a reta secante ao gráfico de f nos pontos de abcissas a e $-a$ passa na origem do referencial.

Resolução, pg. 59

Exame Nacional de 2016 - 1.ª fase

34. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, cuja derivada, f', de domínio $\mathbb{R}$, é dada por

$$f'(x) = e^x \left(x^2 + x + 1\right).$$

Resolva os itens seguintes recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

(a) Sejam p e q dois números reais tais que

$$p = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} \text{ e } q = -\frac{1}{p}.$$

Determine o valor de q e interprete geometricamente esse valor.

(b) Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.
Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

Resolução, pg. 61

Exame Nacional de 2016 - 1.ª fase

35. Considere as sucessões (u_n) e (v_n) de termos gerais

$$u_n = \frac{kn+3}{2n} \ (k \text{ é um número real}) \quad \text{e} \quad v_n = \ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$$

Sabe-se que $\lim (u_n) = \lim (v_n)$.
Qual é o valor de k?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** e **(D)** $2e$

Resolução, pg. 62

Exame Nacional de 2016 - 1.ª fase

36. Para um certo número real k, é contínua em $\mathbb{R}$ a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2+e^{x+k} & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{2x+\ln(x+1)}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** $\ln 2$ **(D)** $\ln 3$

Resolução, pg. 63

Exame Nacional de 2015 - 2.ª fase

37. Seja a um número real diferente de 0.
Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{ae^{x-a}-a}{x^2-a^2}$?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** 1 **(D)** 2

Resolução, pg. 64

Exame Nacional de 2016 - 1.ª fase

38. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 1 + xe^x & \text{se } x \leq 3 \\ \ln(x-3) - \ln x & \text{se } x > 3 \end{cases}$

Resolva os itens seguintes recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

(a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do seu gráfico.

(b) Resolva, em $]-\infty, 3]$, a condição $f(x) - 2x > 1$.
Apresente o conjunto solução, usando a notação de intervalos de números reais.

(c) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 4.

Resolução, pg. 65

Exame Nacional de 2015 - 2.ª fase

39. Para certos valores de a e de b ($a > 1$ e $b > 1$), tem-se $\log_b a = \frac{1}{3}$.
Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_a \left(a^2 b\right)$?

(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{5}{3}$ **(C)** 2 **(D)** 5

Resolução, pg. 67

Exame Nacional de 2015 - 2.ª fase

40. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - \sqrt{e}}{2x - 1} & \text{se } x < \frac{1}{2} \\ (x+1)\ln x & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Resolva os itens **(a)** e **(b)** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

(a) Averigue da existência de assíntotas verticais do gráfico da função f.

(b) Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, no intervalo $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f.

(c) Mostre que a equação $f(x) = 3$ é possível em $]1, e[$, utilizando a calculadora gráfica, determine a única solução desta equação, neste intervalo, arredondada às centésimas.
Na sua resposta:

- recorra ao teorema de Bolzano para provar que a equação $f(x) = 3$ tem, pelo menos, umasolução no intervalo $]1, e[$;

- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- apresente a solução pedida.

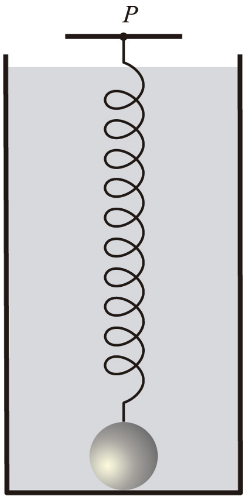
Resolução, pg. 68

Exame Nacional de 2015 - 1.ª fase

41. Na figura, está representado um recipiente cheio de um líquido viscoso.

Tal como a figura ilustra, dentro do recipiente, presa à sua base, encontra-se uma esfera. Essa esfera está ligada a um ponto P por uma mola esticada.
Num certo instante, a esfera é desprendida da base do recipiente e inicia um movimento vertical. Admita que, t segundos após esse instante, a distância, em centímetros, do centro da esfera ao ponto P é dada por

$$d(t) = 10 + (5 - t)e^{-0{,}05t} \quad (t \geq 0)$$



(a) Sabe-se que a distância do ponto P à base do recipiente é $16\ cm$.
Determine o volume da esfera.
Apresente o resultado em cm^3, arredondado às centésimas.

(b) Determine o instante em que a distância do centro da esfera ao ponto P é mínima, recorrendo amétodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Resolução, pg. 70

Exame Nacional de 2015 - 1.ª fase

42. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x}$.
Considere a sucessão de termo geral $u_n = n^2$.
Qual é o valor de $\lim f(u_n)$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** e **(D)** $+\infty$

Resolução, pg. 71

Exame Nacional de 2015 - 1.ª fase

43. Qual das seguintes expressões é, para qualquer número real k, igual a $\log_3\left(\dfrac{3^k}{9}\right)$?

(A) $\dfrac{k}{2}$ **(B)** $k - 2$ **(C)** $\dfrac{k}{9}$ **(D)** $k - 9$

Resolução, pg. 72

Exame Nacional de 2015 - 1.ª fase

44. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{2+\ln x}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

O gráfico de f admite uma assíntota horizontal.
Seja P o ponto de intersecção dessa assíntota com a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e.
Determine as coordenadas do ponto P recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Resolução, pg. 73

Exame Nacional de 2011 - 1.ª fase

45. Num museu, a temperatura ambiente em graus centígrados, t horas após as zero horas do dia 1 de Abril de 2010, é dada, aproximadamente, por

$$T(t) = 15 + 0{,}1t^2e^{-0{,}15t}, \quad \text{com} \quad t \in [0, 20].$$

Determine o instante em que a temperatura atingiu o valor máximo recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.
Apresente o resultado em horas e minutos, apresentando os minutos arredondados às unidades.
Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

Resolução, pg. 74

Exame Nacional de 2011 - 1.ª fase

46. Seja f uma função de domínio $[0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2^x - 9 & \text{se } 0 \leq x < 5 \\ \dfrac{1-e^x}{x} & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$$

Em qual dos intervalos seguintes o teorema de Bolzano permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f?

(A) $]0, 1[$ **(B)** $]1, 4[$ **(C)** $]4, 6[$ **(D)** $]6, 7[$

Resolução, pg. 75

Exame nacional de 2011 - 1.ª fase

47. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} k + \dfrac{1-e^{x-1}}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ -x + \ln x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

(k designa um número real)
Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

(a) Determine k, sabendo que f é contínua em $x = 1$.

(b) Considere, agora, $k = 3$.
Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do gráfico de f.

Resolução, pg. 76 Exame Nacional de 2011 - 1.ª fase - Prova Especial

48. O momento sísmico, M_0, é uma medida da quantidade total de energia que se transforma durante um sismo. Só uma pequena fracção do momento sísmico é convertida em energia sísmica irradiada, E , que é a que os sismógrafos registam.
A energia sísmica irradiada é estimada, em Joules, por $E = M_0 \times 1,6 \times 10^{-5}$.
A magnitude, M, de um sismo é estimada por $M = \frac{2}{3}\log_{10}(E) - 2,9$.
Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

(a) Admita que um sismo que ocorreu no Haiti, em 2010, teve magnitude $7,1$.
Determine o momento sísmico, M_0, para esse sismo.
Escreva o resultado na forma $a \times 10^n$, com n inteiro relativo e com a entre 1 e 10.

(b) Sejam M_1 e M_2 as magnitudes de dois sismos.
Mostre que, se a diferença entre a magnitude M_1 e a magnitude M_2 é igual a $\frac{2}{3}$, então a energia sísmica irradiada por um dos sismos é dez vezes superior à energia sísmica irradiada pelo outro sismo.

Resolução, pg. 77 Exame Nacional de 2011 - 1.ª fase - Prova Especial

49. Considere a função f, de domínio $]0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{4}{x} + 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Seja (u_n) uma sucessão de números reais, de termos positivos, tal que $\lim f(u_n) = 3$.
Qual das expressões seguintes pode definir o termo geral da sucessão (u_n)?

(A) $2 - \dfrac{1}{n}$ **(B)** $2 + \dfrac{1}{n}$ **(C)** $3 - \dfrac{1}{n}$ **(D)** $3 + \dfrac{1}{n}$

Resolução, pg. 78 Exame Nacional de 2011 - 1.ª fase - Prova Especial

50. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{1 - e^{x+1}} & \text{se } x \neq -1 \\ a + 2 & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

(a é um número real.)
Determine a sabendo que f é contínua em $x = -1$.

Resolução, pg. 79 Exame Nacional de 2011 - Época especial

51. Considere uma função f, de domínio $]0,3[$, cuja derivada f', de domínio $]0,3[$, é definida por $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x}$.
Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.
Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar os intervalos de monotonia da função f;
- assinalar e indicar as coordenadas dos pontos relevantes, com arredondamento às centésimas.

Resolução, pg. 81 Exame Nacional de 2010 - 1.ª fase

52. Para um certo valor real de k, admita que a quantidade de combustível, em litros, existente no depósito de uma certa máquina agrícola, t minutos após ter começado a funcionar, é dada aproximadamente por

$$Q(t) = 12 + \log_3\left(81 - kt^2\right), \quad \text{com} \quad t \in [0, 20].$$

Considere que essa máquina agrícola funcionou durante 20 minutos e que, nesse período de tempo, consumiu 2 litros de combustível.
Determine o valor de k recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Resolução, pg. 80 Exame Nacional de 2010 - 1.ª fase

53. Na Internet, no dia 14 de Outubro de 2009, pelas 14 horas, colocaram-se à venda todos os bilhetes de um espectáculo. O último bilhete foi vendido cinco horas após o início da venda.
Admita que, t horas após o início da venda, o número de bilhetes vendidos, em centenas, é dado, aproximadamente, por

$$N(t) = 8\log_4(3t+1)^3 - 8\log_4(3t+1), \quad t \in [0, 5].$$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

(a) Mostre que $N(t) = 16\log_4(3t+1)$, para qualquer $t \in [0, 5]$.

(b) Determine quanto tempo foi necessário para vender 2400 bilhetes.
Apresente o resultado em horas e minutos.
Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais, apresentando os minutos arredondados às unidades.

Resolução, pg. 82 Exame Nacional de 2010 - 1.ª fase

54. Seja g a função, de domínio $]-2,+\infty[$, definida por $g(x)=\ln(x+2)$.
Considere, num referencial o.n. xOy, um triângulo $[OAB]$ tal que:

- O é a origem do referencial;
- A é um ponto de ordenada 5;
- B é o ponto de intersecção do gráfico da função g com o eixo das abcissas.

Qual é a área do triângulo $[OAB]$?

(A) $\dfrac{5}{2}$ **(B)** $\dfrac{1}{2}$ **(C)** $\dfrac{5\ln 2}{2}$ **(D)** $\dfrac{\ln 2}{2}$

Resolução, pg. 83

Exame Nacional de 2010 - 1.ª fase

55. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x} & \text{se } x>0\\ \ln\left(x^2+1\right) & \text{se } x\le 0\end{cases}$

Resolva, no intervalo $]-\infty,0]$, a inequação $h(x)>h(-4)$.

Resolução, pg. 84

Exame Nacional especial de 2010 - Época especial

56. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^-$, definida por $f(x)=\ln(-3x)$.
Qual é a solução da equação $f(x)=2$?

(A) $\frac{1}{2}e^3$ **(B)** $-\frac{1}{2}e^3$ **(C)** $-\frac{1}{3}e^2$ **(D)** $\frac{1}{3}e^2$

Resolução, pg. 85

Exame Nacional especial de 2010 - Época especial

57. Num certo dia, o Fernando esteve doente e tomou, às 9 horas da manhã, um medicamento cuja concentração $C(t)$ no sangue, em mg/l, t horas após o medicamento ter sido ministrado, é dada por

$$C(t)=2te^{-0{,}3t}\quad (t\ge 0)$$

Resolva, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, os dois itens seguintes.

(a) Calcule $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)$ e interprete esse valor no contexto da situação apresentada.

(b) Determine a que horas se verificou a concentração máxima.

Apresente o resultado em horas e minutos, arredondando estes às unidades.
Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

Resolução, pg. 89

Exame Nacional especial de 2009 - 1.ª fase

58. Numa certa zona de cultivo, foi detectada uma doença que atinge as culturas. A área afetada pela doença começou por alastrar durante algum tempo, tendo depois começado a diminuir. Admita que a área, em hectares, afetada pela doença, é dada, em função de t, por

$$A(t) = 2 - t + 5\ln(t+1)$$

sendo t $(0 \leq t < 16)$ o tempo, em semanas, decorrido após ter sido detectada essa doença. Resolva, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, os dois itens seguintes.

(a) Quando a doença foi detectada, já uma parte da área de cultivo estava afetada. Passada uma semana, a área de cultivo afetada pela doença aumentou.
De quanto foi esse aumento?
Apresente o resultado em hectares, arredondado às centésimas.

(b) Determine a área máxima afetada pela doença.
Apresente o resultado em hectares, arredondado às centésimas.
Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

Resolução, pg. 86

Exame Nacional especial de 2009 - 2.ª fase

59. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+4} & \text{se } x > 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{e^{2x}-1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Estude a continuidade de h no domínio $\mathbb{R}$.

Resolução, pg. 87

Exame Nacional especial de 2009 - 2.ª fase

60. Seja a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{x+1}$.
Qual dos pontos seguintes pertence ao gráfico de f? ($\ln$ designa logaritmo de base e.)

(A) $(-1, 0)$ **(B)** $(\ln 2, 2e)$ **(C)** $(\ln 5, 6)$ **(D)** $(-2, e)$

Resolução, pg. 88

Exame Nacional especial de 2009 - 2.ª fase

61. Sejam as funções f e h, de domínios $]1, +\infty[$ e $]-\infty, 2[$, respetivamente, definidas por $f(x) = \log_2(x-1)$ e por $h(x) = \log_2(2-x)$.
Determine, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, o conjunto solução da condição $f(x) \geq 1 + h(x)$.
Apresente o resultado sob a forma de intervalo real.

Resolução, pg. 90

Exame Nacional especial de 2009 - 1.ª fase

62. Para um certo número real positivo k, é contínua a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(k+x) & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

Resolução, pg. 91 Exame Nacional especial de 2009 - 1.ª fase

63. Admita que a magnitude, M, de um sismo é dada, na escala de Richter, por

$$M = 0{,}67 \log E - 3,25$$

sendo E a energia, em joules, libertada por esse sismo. ($\log$ designa logaritmo de base 10.)
Resolva, recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, os dois itens seguintes.
Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

(a) Sejam E_1 e E_2 as energias libertadas por dois sismos de magnitudes M_1 e M_2, respetivamente.
Determine $\frac{E_1}{E_2}$, com aproximação às unidades, sabendo que $M_1 - M_2 = 1$.
Interprete o valor obtido no contexto da situação apresentada.

(b) O sismo que ocorreu nos Açores, no dia 1 de Abril de 2009, teve magnitude $4{,}7$ na escala de Richter.
Qual foi a energia libertada nesse sismo?
Escreva o resultado em notação científica, isto é, na forma $a \times 10^b$, sendo b um número inteiro, e a um número entre 1 e 10.
Apresente o valor de a arredondado às unidades.

Resolução, pg. 92 Exame Nacional especial de 2009 - 1.ª fase

64. Seja a função f, de domínio $[0, \pi]$, definida por $f(x) = e^x \cos x$.
Estude, recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, a função f, quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, indicando os intervalos de monotonia e, caso existam, os extremos relativos.

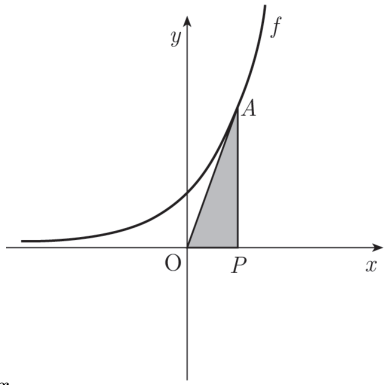
Resolução, pg. 93 Exame Nacional especial de 2009 - 1.ª fase

65. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \dfrac{e^x + 3}{e^x}$.
Estude, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, a função g, quanto à existência de assíntotas do seu gráfico e, caso existam, escreva as suas equações.

Resolução, pg. 94 Exame Nacional de 2009 - 1.ª fase

66. Na figura, está representada parte do gráfico da função f, dedomínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x$.

Considere um ponto, P, a deslocar-se sobre o semieixo positivo das abcissas.
Seja A o ponto pertencente ao gráfico da função que tem a mesma abcissa que o ponto P.
Para cada posição do ponto P, define-se um triângulo $[OAP]$.
Qual das expressões seguintes representa, em função de x (abcissa do ponto P), a área do triângulo $[OAP]$?



(A) xe^x **(B)** $\dfrac{xe^x}{2}$ **(C)** $\dfrac{x + e^x}{2}$ **(D)** e^x

Resolução, pg. 95 Exame Nacional de 2009 - 1.ª fase

67. Sejam a e b dois números reais superiores a 1 e tais que $b = a^2$.
Qual dos valores seguintes é igual a $1 + \log_b a$?

(A) $\dfrac{2}{3}$ **(B)** $\dfrac{3}{4}$ **(C)** $\dfrac{4}{3}$ **(D)** $\dfrac{3}{2}$

Resolução, pg. 96 Exame Nacional de 2009 - 1.ª fase

68. Sabe-se que o ponto $P(1, 3)$ pertence ao gráfico da função $f(x) = 2^{ax} - 1$, $a \in \mathbb{R}$.
Qual é o valor de a?
(A) 2 **(B)** 1 **(C)** 0 **(D)** -2

Resolução, pg. 98 Exame Nacional de 2008 - 2.ª fase

69. Num determinado dia, um grupo de amigos decidiu formar uma associação desportiva.
Admita que, t dias após a constituição da associação, o número de sócios é dado, aproximadamente, por:

$$N(t) = \frac{2000}{1 + 199e^{-0{,}01t}}, \ t \geq 0.$$

Resolva, usando métodos analíticos, os dois itens seguintes.
Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use aproximações às milésimas.

(a) Determine $N(0)$ e $\lim_{t\to+\infty} N(t)$.
Interprete os valores obtidos, no contexto do problema.

(b) Ao fim de quantos dias se comemorou a inscrição do sócio número 1000?

Resolução, pg. 99 Exame Nacional de 2008 - 1.ª fase

70. A massa de uma substância radioativa diminui com a passagem do tempo.
Supõe-se que, para uma amostra de uma determinada substância, a massa, em gramas, ao fim de t horas de observação, é dada pelo modelo matemático $M(t) = 15 \times e^{-0{,}02t}$, $t \geq 0$.
Resolva, usando métodos analíticos, os dois itens que se seguem.
Nota:
A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

(a) Ao fim de quanto tempo se reduz a metade a massa inicial da amostra da substância radioativa?
Apresente o resultado em horas e minutos, estes arredondados às unidades.

(b) Utilize o Teorema de Bolzano para justificar que houve, pelo menos, um instante, entre as 2 horas e 30 minutos e as 4 horas após o início da observação, em que a massa da amostra da substância radioativa atingiu os 14 gramas.

Resolução, pg. 97 Exame Nacional de 2008 - 2.ª fase

71. Seja a um número real maior do que 1.
Qual dos seguintes valores é igual a $2\log_a\left(a^{\frac{1}{3}}\right)$?

(A) $-\frac{2}{3}$ **(B)** $-\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{2}{3}$

Resolução, pg. 100 Exame Nacional de 2008 - 1.ª fase

72. Aqueceu-se água num recipiente, durante um determinado tempo, num local onde a temperatura ambiente é constante e igual a $25°$ Celsius. Interrompeu-se o processo de aquecimento, e nesse instante, a água começou a arrefecer.
O arrefecimento da água segue a Lei do arrefecimento de Newton, de acordo com o modelo matemático: $T(t) = 25+48e^{-0{,}05t}$, em que $T(t)$ representa a temperatura da água em graus Celsius, t minutos após o início do arrefecimento.
Resolva, recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, os dois itens seguintes.

(a) Determine $T(0)$ e $\lim_{t\to+\infty} T(t)$.
Interprete os valores obtidos, no contexto do problema.

(b) Determine ao fim de quanto tempo, após o início do arrefecimento, a temperatura da água atinge os $36°$ Celsius.
Apresente o resultado em minutos e segundos, com estes arredondados às unidades.

Nota:
A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use quatro casas decimais.

Resolução, pg. 101 Exame especial de 2008

73. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = 1 - \ln(x^2)$.
Determine os pontos de intersecção do gráfico de f com o eixo Ox recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Resolução, pg. 103 Exame nacional de 2007 - 2.ª fase

74. Para todo o $x \in \mathbb{R}$, qual das seguintes expressões é equivalente a $x \cdot \ln(e^e)$?

(A) ex **(B)** e^x **(C)** e^{ex} **(D)** $x + e$

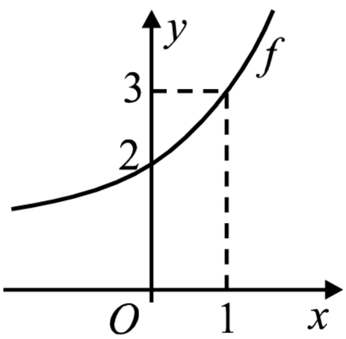
Resolução, pg. 102 Exame especial de 2008

75. Sabendo que
$\ln(x) - \ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right) > 0$ (ln designa logaritmo na base e),
um valor possível para x é:

(A) 0 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 2

Resolução, pg. 104 Exame nacional de 2007 - 1.ª fase

76. Sejam a e b dois números reais positivos.
Na figura está parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a^x + b$.
Tal como a figura sugere, os pontos $(0, 2)$ e $(1, 3)$ pertencem ao gráfico de f.
Quais são os valores de a e de b?



(A) $a = 2$ e $b = 1$ **(B)** $a = 2$ e $b = 3$
(C) $a = 3$ e $b = 2$ **(D)** $a = 3$ e $b = 1$

Resolução, pg. 105 Exame nacional de 2006 - 2.ª fase

77. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = \dfrac{\ln\left(\sqrt{e^x}\right)}{2}$ ($\ln$ designa logaritmo de base e).
Qual das seguintes expressões pode também definir h?

(A) $\sqrt{x}$ **(B)** $\dfrac{x}{2}$ **(C)** $\dfrac{x}{4}$ **(D)** $\dfrac{\sqrt{x}}{2}$

Resolução, pg. 106 Exame nacional de 2006 - 1.ª fase

Resoluções

Resolução da pergunta 1

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1

Comecemos por determinar o domínio da condição:

$$D = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x > 0 \wedge 3 - 2x > 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x < 1 \wedge x < \frac{3}{2}\right\} =]-\infty, 1[.$$

$x \ln(1-x) - \ln(1-x) = (1-x)\ln(3-2x) \Leftrightarrow \ln(1-x)(x-1) + (x-1)\ln(3-2x) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(\ln(1-x) + \ln(3-2x)) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee \ln((1-x)(3-2x)) = 0$

$\Leftrightarrow (x = 1 \vee 3 - 5x + 2x^2 = 1) \wedge x \in D \Leftrightarrow \left(x = 1 \vee x = 2 \vee x = \frac{1}{2}\right) \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$

Logo $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Resolução da pergunta 2

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1

Como $0 \notin \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lim_{x \to 0} g(x)$ existe se e só se

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^+} g(x).$$

Vamos portanto determinar os limites laterais no ponto 0.

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{x^3 - x}{x^2 - x} + k \right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{x(x-1)(x+1)}{x(x-1)} + k \right) = \lim_{x \to 0^-} (x + 1 + k) = 1+k.$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} (2 + x \ln x) \overset{(0 \times \infty)}{=}$$
$$\overset{(1)}{=} 2 + \lim_{y \to +\infty} \frac{\ln \frac{1}{y}}{y} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} 2 - \lim_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{y} \overset{(2)}{=} 2 - 0 = 2.$$

(1) Efetuou-se a mudança de variável $y = \frac{1}{x}$. Assim, $x = \frac{1}{y}$ e $x \to 0^+ \Rightarrow y \to +\infty$.

(2) Limite notável: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Deste modo

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^+} g(x) \Leftrightarrow 1 + k = 2 \Leftrightarrow k = 1.$$

Resolução da pergunta 3

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x^2-\ln x}\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2-\frac{\ln x}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2-\frac{\ln x}{x}\times\frac{1}{x}}$$
$$=\frac{1}{2-0\times 0}=\frac{1}{2}.$$

NOTA:

Limite notável $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(h\left(x\right)-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-\ln x}-\frac{1}{2}x\right)$$
$$\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-2x^2+x\ln x}{4x^2-2\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln x}{x}}{4-\frac{2\ln x}{x^2}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln x}{x}}{4-\frac{\ln x}{x}\times\frac{2}{x}}=\frac{0}{4-0}=0.$$

Podemos concluir que $y=\frac{1}{2}x$ é a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de h.

Resolução da pergunta 4

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

4.1.

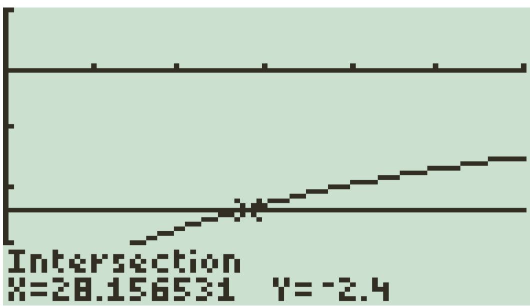
$$T\left(t_1\right)=30 \Leftrightarrow 20+100e^{-kt_1}=30 \Leftrightarrow e^{-kt_1}=\frac{1}{10}$$
$$\Leftrightarrow \; -kt_1=\ln\frac{1}{10} \Leftrightarrow -kt_1=\ln 10^{-1} \Leftrightarrow -kt_1=-\ln 10 \Leftrightarrow k=\frac{\ln 10}{t_1}.$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(C)**.

4.2. Uma equação que permite resolver o problema é

$$tmv_{[0,t_2]}T=-2{,}4 \Leftrightarrow \frac{T\left(t_2\right)-T(0)}{t_2-0}=-2{,}4$$
$$\Leftrightarrow \frac{20+100e^{-0{,}04t_2}-120}{t_2}=-2{,}4 \Leftrightarrow \frac{100e^{-0{,}04t_2}-100}{t_2}=-2{,}4.$$

No gráfico seguinte, obtido através de uma calculadora gráfica, estão representados os gráficos de
$y=\frac{100e^{-0{,}04x}-100}{x}$ e $y=-2{,}4$ no intervalo $[0,60]$ e assinalado o seu ponto de interseção.



Podemos concluir que $t_2\approx 28{,}157$.
Como $0{,}157\times 60\approx 9$, podemos concluir que o valor de t_2 corresponde a 28 minutos e 9 segundos.

Resolução da pergunta 5

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

5.1.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-e^{-x}}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{e^{-x}}{x}\right)$$
$$\overset{(1)}{=} 1+\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{y}}{y} = 1+\infty = +\infty.$$

(1) $y=-x \Leftrightarrow x=-y;\ x\to-\infty \Rightarrow y\to+\infty$.Podemos concluir que o gráfico de f não admite assíntotas horizontais quando $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}-3\right)$$
$$\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}-3 = \frac{\sqrt{1+0}}{1+0}-3=-2.$$

Podemos concluir que a reta de equação $y=-2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x\to+\infty$.

5.2. Para $x<0$,

$$f'(x) = \frac{\left(1+e^{-x}\right)x-x+e^{-x}}{x^2}.$$

O declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa -2 é dado por

$$f'(-2) = \frac{\left(1+e^{2}\right)\times(-2)+2+e^2}{4} = -\frac{e^2}{4}.$$

Podemos que concluir que a sua equação reduzida é da forma $y=-\frac{e^2}{4}x+b$, $b\in\mathbb{R}$.Substituindo nesta equação as coordenadas do ponto de tangência $T\left(-2, f(-2)\right) = \left(-2, \frac{-2-e^2}{-2}\right) = \left(-2, \frac{2+e^2}{2}\right)$ temos

$$\frac{2+e^2}{2} = -\frac{e^2}{4}\times(-2)+b \Leftrightarrow b=1.$$

Deste modo, $y=-\frac{e^2}{4}x+1$ é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -2.

Resolução da pergunta 6

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

Comecemos por determinar o domínio da equação.

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} : (1-x)e^{x-1} > 0\right\} = \{x \in \mathbb{R} : 1-x > 0\} =]-\infty, 1[.$$

No conjunto D temos

$$\ln\left((1-x)\,e^{x-1}\right) = x \Leftrightarrow (1-x)\,e^{x-1} = e^x \Leftrightarrow 1-x = e \Leftrightarrow x = 1-e.$$

Podemos concluir que $1-e$ é a única solução da equação.

Resolução da pergunta 7

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

7.1.

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} (-x^2(1+2\ln x) = -1(1+0) = -1 = f(1).$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{5-5e^{x-1}}{x^2+3x-4} = -5 \lim_{x\to1^+} \frac{e^{x-1}-1}{(x-1)(x+4)} = \star$$

De facto, como $x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-4$ então $x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$.
Fazendo a mudança de variável $y=x-1 \Leftrightarrow x=y+1$ temos $y\to0^+$ e

$$\begin{aligned}\star =& -5 \lim_{y\to0^+} \frac{e^y-1}{y(y+5)} = -5 \lim_{y\to0^+} \frac{e^y-1}{y} \times \lim_{y\to0^+} \frac{1}{y+5}\\ =& -5\times1\times\frac{1}{5} = -1.\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = f(1)$ então f é contínua em $x=1$.

7.2. Para $x\in]0,1[$,

$$f'(x) = -2x(1+2\ln x) - x^2 \times \frac{2}{x} = x(-2-4\ln x-2) = x(-4-4\ln x).$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow (x=0 \vee \ln x=-1) \wedge x\in]0,1[\Leftrightarrow x=e^{-1}.$$

Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de f' e da monotonia de f em $]0,1[$.

x	0		e^{-1}		1
x		$+$	$+$	$+$	
$-4-4\ln x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	max	$\searrow$	

Podemos concluir que f é decrescente em $[e^{-1},1[$ e crescente em $]0,e^{-1}]$.
$f\left(e^{-1}\right) = -e^{-2}\left(1+2\ln e^{-1}\right) = e^{-2}$ é máximo relativo.

Resolução da pergunta 8

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (2 + \ln x) \times 1}{x^2} = \frac{-1 - \ln x}{x^2}.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -1 - \ln x = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}.$$

Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de f'' e da concavidade do gráfico de f em $]0, +\infty[$.

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$-1 - \ln x$	N.D.	$+$	0	$-$
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	N.D.	$+$	0	$-$
f	N.D.	$\cup$	P.I.	$\cap$

Podemos concluir que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $\left]0, \frac{1}{e}\right]$ e voltada para baixo em $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$.O ponto de abcissa $\frac{1}{e}$ é ponto de inflexão do gráfico de f.

Resolução da pergunta 9

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(1 + xe^{x-1}\right) \overset{(0\times\infty)\star}{=} \lim_{y\to+\infty}\left(1 - ye^{-y-1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{e}\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^y} = 1 - \frac{1}{e}\frac{1}{\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y}} = 1 - \frac{1}{e}\times\frac{1}{+\infty} = 1 - 0 = 1.$$

$\star$ Efetuou-se a mudança de variável $y = -x \Leftrightarrow x = -y$; $x \to -\infty \Rightarrow y \to +\infty$.

Podemos concluir que a reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico de h.

Resolução da pergunta 10

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Sejam a e b os dois números reais positivos.

$$\log_8 a + \log_8 b = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_8(ab) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow ab = 8^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow ab = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow ab = 2.$$

A opção correta é a **(A)**.

Resolução da pergunta 11

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

Vídeos da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):
(a)
(b)

(a)

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(1+\frac{\operatorname{sen} x}{1-e^x}\right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} 1+\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}{\frac{1-e^x}{x}}$$
$$= 1+\frac{\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} x}{x}}{-\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}} \overset{\star}{=} 1+\frac{1}{-1} = 0.$$

$\star$ Limites notáveis $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ e $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x^2\ln x\right) = 0\times(-\infty)$$

Uma vez que obtivemos um símbolo de indeterminação, vamos efetuar a mudança de variável $y=\frac{1}{x} \Leftrightarrow x=\frac{1}{y}$ e utilizar o limite notável $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$. Como $x\to 0^+$ então $y\to+\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x^2\ln x\right) = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y^2}\ln\frac{1}{y}\right) = -\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}\times\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y} = -0\times 0 = 0.$$

Como $g(0)=0$ então temos $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^-} g(x) = g(0)$ e podemos concluir que g é contínua em $x=0$.

(b)

Comecemos por determinar $g'(x)$ no intervalo $]0,+\infty[$:

$$g'(x) = 2x\ln x + x^2\times\frac{1}{x} = 2x\ln x + x.$$

Estudemos agora a existência de pontos críticos em $]0,+\infty[$:

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2x\ln x + x = 0 \wedge x\in\,]0,+\infty[\, \Leftrightarrow x\,(2\ln x+1)=0 \wedge x\in\,]0,+\infty[$$
$$\Leftrightarrow \left(x=0 \vee x=e^{-\frac{1}{2}}\right)\wedge x\in\,]0,+\infty[\, \Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}.$$

Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de g' e da monotonia de g em $]0,+\infty[$.

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
x	N.D.	$+$	$+$	$+$
$2\ln x+1$	N.D.	$-$	0	$+$
$g'(x)$	N.D.	$-$	0	$+$
g	N.D.	$\searrow$	min	$\nearrow$

Podemos concluir que
$$g\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=e^{-1}\ln e^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2e}$$
é mínimo relativo.
g é monótona decrescente em $\left]0,e^{-\frac{1}{2}}\right]$ e monótona crescente em $\left[e^{-\frac{1}{2}},+\infty\right[$.

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

Resolução da pergunta 12

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

Vídeos da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):
(a)
(b)
(c)

(a) Como $D_f =]-\infty, 2]$ trata-se de uma assíntota quando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\ln(e^x+1)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x} + \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(e^x+1)}{x} = 1 + \frac{\ln(e^{-\infty}+1)}{-\infty} = 1.$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to-\infty} (x+\ln(e^x+1)-x) = \ln\left(e^{-\infty}+1\right) = 0.$$

Podemos concluir que a reta de equação $y = x$ é a assíntota oblíqua do gráfico de f pretendida.
(b) Consideremos $x \in]-\infty, 2]$.

$$\begin{aligned} f(x) = 2x+1 &\Leftrightarrow x+\ln(e^x+1) = 2x+1 \Leftrightarrow \ln(e^x+1) = x+1 \\ &\Leftrightarrow e^x+1 = e^{x+1} \Leftrightarrow e^x - e^x \times e = -1 \\ &\Leftrightarrow e^x(1-e) = -1 \Leftrightarrow e^x = \frac{-1}{1-e} \\ &\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{e-1}\right) \Leftrightarrow x = \ln 1 - \ln(e-1) \\ &\Leftrightarrow x = -\ln(e-1). \end{aligned}$$

Como $-\ln(e-1) \in]-\infty, 2]$ temos que $-\ln(e-1)$ é a solução da equação na forma pretendida.
(c)

$$\begin{aligned} y = h(x) &\Leftrightarrow y = x+\ln(e^x+1)-x \Leftrightarrow e^x+1 = e^y \\ &\Leftrightarrow e^x = e^y - 1 \Leftrightarrow x = \ln(e^y-1). \end{aligned}$$

Temos portanto $h^{-1}(x) = \ln(e^x-1)$.A opção correta é a **(C)**.

Resolução da pergunta 13

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Comecemos por escrever a expressão $\frac{8n-4}{n+1}$ numa forma mais conveniente para determinar o valor do seu limite.

$$\begin{array}{r|l} 8n-4 & n+1 \\ \hline -8n-8 & 8 \\ \hline -12 & \end{array} \qquad \frac{8n}{n}=8$$

Podemos concluir que $u_n = 8 - \frac{12}{n+1}$.$\lim u_n = \lim\left(8 - \frac{12}{n+1}\right) = 8 - \frac{12}{+\infty+1} = 8^-$.

Consequentemente, $\lim f(u_n) = \lim\limits_{x\to 8^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 8^-} \log_2(8-x) = \log_2(0^+) = -\infty$.

Podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

Resolução da pergunta 14

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

Vídeos da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):
(a)
(b)

(a) As assíntotas paralelas aos eixos coordenados são as assíntotas verticais e as assíntotas horizontais.Assíntotas verticais:

Comecemos por notar que $D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Como
$\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e}{0^-} = -\infty$;
$\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e}{0^+} = +\infty$
então $x = 1$ é uma equação da assíntota vertical do gráfico de h. É a única pois h é contínua em D_h, por ser a divisão de funções contínuas.Assíntotas horizontais:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} h(x) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x-1} \\ &\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{e^x}{x} \times \frac{x}{x-1}\right] \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} \times \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x-1} \\ &= +\infty \times 1 = +\infty.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -\infty} h(x) &= \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x-1} \\ &= \frac{e^{-\infty}}{-\infty - 1} = \frac{0}{-\infty} = 0.\end{aligned}$$

Podemos concluir que a reta de equação $y = 0$ é a única assíntota horizontal do gráfico de h.

(b)

$$\begin{aligned}&(x-1) \times h(x) + 2e^{-x} = 3 \\ \Leftrightarrow\ &(x-1) \times \frac{e^x}{x-1} + 2e^{-x} - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ &e^x + 2e^{-x} - 3 = 0 \wedge x \neq 1 \\ \Leftrightarrow\ &\left(e^x\right)^2 - 3e^x + 2 = 0 \wedge x \neq 1 \\ \Leftrightarrow\ &e^x = 2 \vee e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln 2 \vee x = 0.\end{aligned}$$

O conjunto solução é $S = \{0, \ln 2\}$.

Resolução da pergunta 15

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

$$\begin{aligned}\lim\left(\frac{n+\ln a}{n}\right)^{n+2} &= \lim\left(1+\frac{\ln a}{n}\right)^{n} \times \lim\left(1+\frac{\ln a}{n}\right)^{2}\\ &= e^{\ln a} \times 1^{2} = a.\end{aligned}$$

A opção correta é a **(C)**.

Resolução da pergunta 16

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Como f é contínua em $\mathbb{R}$, também é em particular contínua no ponto 1. Assim tem que verificar $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$.Como

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \\ &\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1}(x+1) = 2\end{aligned}$$

então f é contínua no ponto 0 se e só se

$$\log_3 k = 2 \Leftrightarrow k = 3^2 \Leftrightarrow k = 9.$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(D)**.

Resolução da pergunta 18

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6

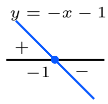
Vídeos da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):
(a)
(b)

(a) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Para estudar a monotonia e a existência de extremos da função g vamos começar por determinar a derivada e os seus zeros.$g'(x) = \frac{-e^{-x}\times x - e^{-x}\times 1}{x^2} = \frac{e^{-x}(-x-1)}{x^2}$.

$$\begin{aligned} & g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(-x-1) = 0 \wedge x^2 \neq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(e^{-x} = 0 \vee -x-1 = 0\right) \wedge x \neq 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = -1. \end{aligned}$$

Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de g' e da monotonia de g.

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
e^{-x}	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$-x-1$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
x^2	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	ND	$-$
g	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$



Podemos concluir que g é crescente em $]-\infty, -1]$ e decrescente em $[-1, 0[$ e em $]0, +\infty[$.
$g(-1) = \frac{e}{-1} = -e$ é máximo relativo.
(b) O declive da assíntota oblíqua é dado por

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x}.$$

Como $h(x) = g(x) + 2x - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{e^{-x}}{x} + 2x - \frac{1}{\sqrt{x}}$,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x^2} + 2 - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) \\ &= \frac{0}{+\infty} + 2 - \frac{1}{+\infty} = 2. \end{aligned}$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(B)**.

Resolução da pergunta 19

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6

Vídeos da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):
(a)
(b)

(a) Se $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1(x - \ln x) - x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(1 - \ln x)^2} = \frac{x - \ln x - x + 1}{(1 - \ln x)^2} = \frac{1 - \ln x}{(1 - \ln x)^2}.$$

Assim, $f'(1) = \frac{1 - \ln 1}{(1 - \ln 1)^2} = 1$ e a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1 é da forma $y = x + b$, $b \in \mathbb{R}$.Como $f(1) = \frac{1}{1 - \ln 1} = 1$ então $T(1, 1)$ é um ponto da reta tangente em estudo.
Substituindo as coordenadas de T na equação $y = x + b$ temos

$$1 = 1 + b \Leftrightarrow b = 0.$$

Podemos concluir que $y = x$ é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.
(b) Para f ser contínua, tem que se verificar:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0).$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} \frac{1 - \cos x}{x} \\
&\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} \\
&= \lim_{x \to 0^-} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} \\
&= \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} \\
&= \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{1 + \cos x} \\
&= 1 \times \frac{0}{1 + 1} = 0.
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x - \ln x}$$

$$= \frac{0}{0 - \ln 0^+} = \frac{0}{0 - (-\infty)} = 0.$$

Como $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$ então f é contínua no ponto 0.

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6

Resolução da pergunta 17

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

$$
\begin{aligned}
& \ln\left(a^2-b^2\right)-2\ln(a+b)=\ln(a-b)+\ln(a+b)-2\ln(a+b) \\
= \ & \ln(a-b)-\ln(a+b)=\ln(a-b)-\ln(2(a-b)) \\
= \ & \ln(a-b)-[\ln 2+\ln(a-b)]=-\ln 2\approx -0.7.
\end{aligned}
$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(C)**.

Resolução da pergunta 20

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6

Vídeos da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):
(a)
(b)
(c)

(a)

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3+\frac{e^h}{1-h}-4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1+h}{h(1-h)} \\
&\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} \times \lim_{h\to 0} \frac{1}{1-h} + \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(1-h)} \\
&= 1\times 1+1 = 2.
\end{aligned}$$

(b) Comecemos por determinar as assíntotas do gráfico de f quando $x\to-\infty$. $\lim_{x\to-\infty}\left(3+\frac{e^x}{1-x}\right) =$
$3+\frac{0}{1-(-\infty)} = 3.$
Podemos concluir que a reta de equação $y=3$ é assíntota horizontal do gráfico de f.
Determinemos agora as assíntotas do gráfico de f quando $x\to+\infty$.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(x^2\right)+2}{x}\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x} + \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} \\
&= 0+0=0
\end{aligned}$$

Podemos concluir que a reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal do gráfico de f.**(c)**
$\left(f\circ h^{-1}\right)(2) = f\left(h^{-1}(2)\right).$
Como $h(x)=2 \Leftrightarrow x+1=2 \Leftrightarrow x=1$ então $h^{-1}(2)=1$ e
$f\left(h^{-1}(2)\right) = f(1) = \frac{\ln 1+2}{1} = 2.$
Podemos concluir que a opção correta é a **(C)**.

Resolução da pergunta 21

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 7

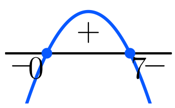
Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Comecemos por determinar o domínio da condição:

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 > 0 \land 8 - x > 0\} =]-1, 8[.$$

$$\begin{aligned} & \log_2(x+1) \leq 3 - \log_2(8-x) \\ \Leftrightarrow\ & \log_2(x+1) + \log_2(8-x) \leq \log_2 8 \\ \Leftrightarrow\ & \log_2\left((x+1)(8-x)\right) \leq \log_2 8 \\ \Leftrightarrow\ & -x^2 + 7x \leq 0 \land x \in D \end{aligned}$$

Para resolver uma inequação do 2.° grau $-x^2 + 7x \leq 0$ devemos:
(i) determinar os zeros da equação $ax^2 + bx + c = 0$ associada à inequação;
(ii) esboçar o gráfico da função definida por
$y = ax^2 + bx + c$;
(iii) escrever o conjunto solução.C.A. $-x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x = 7 \lor x = 0$.
Esboço do gráfico da função definida por $y = -x^2 + 7x$:



Logo,

$$-x^2 + 7x \leq 0 \land x \in D \Leftrightarrow x \in]-1, 0] \cup [7, 8[.$$

Podemos concluir que o conjunto solução é $S =]-1, 0] \cup [7, 8[$.

Resolução da pergunta 22

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 7

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

$$\lim\left(\frac{n+5}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}=\lim\left(\frac{n\left(1+\frac{5}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^{\frac{n}{2}}=\left[\frac{\lim\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n}}{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{e^5}{e}\right]^{\frac{1}{2}}=e^2.$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(D)**.

Resolução da pergunta 25

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 8

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

De acordo com o enunciado temos

$$P(a, h(a)) = \left(a, \frac{\ln a}{a}\right); \quad Q(a, h(2a)) = \left(2a, \frac{\ln(2a)}{2a}\right).$$

O declive da reta PQ é

$$m_{PQ} = \frac{\frac{\ln(2a)}{2a} - \frac{\ln a}{a}}{2a - a} = \frac{\ln(2a) - 2\ln a}{2a^2}.$$

Seja $f(a) = \frac{\ln(2a) - 2\ln a}{2a^2}$.
Para o triângulo da figura ser isósceles, o declive da reta PQ tem que ser igual a 1, ou seja $f(a) = 1$.
Como
$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln 1 - 2\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\ln 4 > 2\ln e = 2 > 1$;
$f(1) = \frac{\ln 2 - 2\ln 1}{2} = \frac{\ln 2}{2} < \frac{\ln e^2}{2} = 1$
então $f(1) < 1 < f\left(\frac{1}{2}\right)$. Como f é contínua em $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, por ser a diferença, divisão e composição de funções contínuas, então o Teorema de Bolzano garante que a equação $f(a) = 1$ tem pelo menos uma solução no intervalo $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

Resolução da pergunta 23

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 7

Vídeos da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

(a)

(b)

(a)

$$\begin{aligned}
& g(x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{e^{2x}-1}{4x} = 0 \wedge x < 0\right) \vee \left(\frac{1}{2-\sin(2x)} = 0 \wedge 0 \leq x \leq \pi\right) \\
\Leftrightarrow\ & \left(e^{2x}-1 = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x < 0\right) \vee x \in \varnothing \\
\Leftrightarrow\ & e^{2x} = 1 \wedge x \neq 0 \wedge x < 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x < 0 \\
\Leftrightarrow\ & x \in \varnothing.
\end{aligned}$$

Podemos concluir que a função g não tem zeros e que a opção correta é a **(A)**.

(b)

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{4x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \frac{1}{2} \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{2x} \\
= & \frac{1}{2} \lim_{y\to 0^-} \frac{e^{y}-1}{y} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2-\sin(2x)} = \frac{1}{2} = g(0).$$

Como

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$$

então g é contínua em $x = 0$.

Resolução da pergunta 24

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 7

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

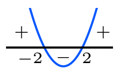
Comecemos por notar que $\ln b = 4\ln a \Leftrightarrow \frac{\ln b}{\ln a} = 4$.

$$\begin{aligned}
a^x \geq b^{\frac{1}{x}} &\Leftrightarrow \ln a^x \geq \ln b^{\frac{1}{x}} \\
&\Leftrightarrow x\ln a \geq \frac{1}{x}\ln b \\
&\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{x}\frac{\ln b}{\ln a} \\
&\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{x} \times 4 \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x} \geq 0.
\end{aligned}$$

Para estudar o sinal da expressão $\frac{x^2-4}{x}$ vamos recorrer a uma tabela onde se estuda separadamente o sinal do seu numerador e denominador. Para isso, notemos que

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2.$$

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
x^2-4	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x^2-4}{x}$	$-$	0	$+$	ND	$-$	0	$+$



Podemos concluir que

$$\frac{x^2-4}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, 0[\cup[2, +\infty[.$$

Resolução da pergunta 27

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 9

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

$\lim \left(\frac{n+k}{n}\right)^n = \lim \left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k$.
Substituindo e^k na equação dada temos

$$\ln\left(\frac{e^k}{e}\right) = 3 \Leftrightarrow \ln e^{k-1} = 3 \Leftrightarrow k-1=3 \Leftrightarrow k=4.$$

A opção correta é a **(D)**.

Resolução da pergunta 26

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 8

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} g(x) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{e^{x-1}-1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{e^{x-1}-1} \times \lim_{x\to 1^-} (x+1) = \frac{\lim\limits_{y\to 0^-} 1}{\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{e^y-1}{y}} \times 2 \\ &\overset{(1)}{=} 1\times 2 = 2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} g(x) &= \lim_{x\to 1^+} \left(3 + \frac{\sin(x-1)}{1-x}\right) \\ &= 3 - \lim_{x-1\to 0^+} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \overset{(2)}{=} 3-1 = 2.\end{aligned}$$

(1) Limite notável: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

(2) Limite notável: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Como $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = g(1)$ então g é contínua no ponto 1.

Resolução da pergunta 28

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 9

(a) $\sqrt{(f(0))^2+x^2}=2 \Leftrightarrow \sqrt{\left(9-2.5\left(e+e^{-1}\right)\right)^2+x^2}=2.$
Como $\left(9-2.5\left(e+e^{-1}\right)\right)^2+x^2 \geq 0, \forall x \in [0,7]$ então

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(9-2.5\left(e+e^{-1}\right)\right)^2+x^2}=2 \\ \Leftrightarrow\ & \left(9-2.5\left(e+e^{-1}\right)\right)^2+x^2=4 \\ \Leftrightarrow\ & x=\pm\sqrt{4-\left(9-2.5\left(e+e^{-1}\right)\right)^2} \\ \Leftrightarrow\ & x \approx \pm 1.5. \end{aligned}$$

Sendo $P(0, f(0))$ e $S(x,0)$ temos

$$\overline{PS}=\sqrt{(x-0)^2+(f(0)-0)^2}=\sqrt{(f(0))^2+x^2}.$$

Logo, para $x \approx 1.5$, a distância entre os pontos P e $S(1.5,0)$ é igual a $2\ m$.
(b) Vamos determinar o máximo absoluto de f.

Comecemos por determinar $f'(x)$ no intervalo $[0,7]$:

$$f'(x)=-2.5\left(-0.2e^{1-0.2x}+0.2e^{0.2x-1}\right).$$

Estudemos agora a existência de pontos críticos:

$$\begin{aligned} f'(x)=0 \Leftrightarrow -0.2e^{1-0.2x}+0.2e^{0.2x-1}=0 \Leftrightarrow e^{1-0.2x}=e^{0.2x-1} \\ \Leftrightarrow 1-0.2x=0.2x-1 \Leftrightarrow 0.4x=2 \Leftrightarrow x=5. \end{aligned}$$

Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de f' e da monotonia de f em $[0,7]$.

x	0		5		7
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	max	$\searrow$	0

Podemos concluir que

$$f(5)=9-2.5\left(-0.2e^{1-0.2\times 5}+0.2e^{0.2\times 5-1}\right)=9-2.5\times 2=4$$

é o máximo absoluto. Deste modo, não é possível o barco passar por baixo da ponte.

Resolução da pergunta 29

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 10

(a) A incógnita do problema é o n, $p = 24$ e $x = 0.003$.

$$24 = \frac{600 \times 0.003}{1 - e^{-n\times 0.003}} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 1 - e^{-0.003n} = \frac{1.8}{24}$$
$$\Leftrightarrow e^{-0.003n} = 0.925 \Leftrightarrow -0.003n = \ln 0.925$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{\ln 0.925}{-0.003} \Leftrightarrow n \approx 26.$$

(1) Como $n > 0$ então $1 - e^{-n\times 0.003} \neq 0$.
Podemos concluir que o José vai pagar o empréstimo em 26 meses.
(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{600x}{1 - e^{-nx}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} -600 \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^{-nx} - 1}$$
$$= -600 \lim_{x\to 0} \frac{1}{\dfrac{e^{-nx} - 1}{-nx} \times (-n)}$$
$$\overset{(2)}{=} -600 \times \frac{1}{-n} = \frac{600}{n}.$$

(2) Limite notável: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.
Uma vez que o valor do empréstimo é 600 euros e n o número de meses em que o empréstimo será pago, podemos concluir que quando a taxa de juro mensal tende para 0 o valor da prestação mensal é igual a $\dfrac{600}{n}$. Corresponde pagar os 600 euros em n parcelas iguais a $\dfrac{600}{n}$.

Resolução da pergunta 30

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 10

Com base no limite notável $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ temos $\lim\dfrac{e^n}{n}=+\infty$.
Logo,

$$\lim\left(u_n\right)=\lim\frac{n}{e^n}=\lim\frac{1}{\frac{e^n}{n}}=\frac{1}{+\infty}=0^+$$

e temos

$$\lim f\left(u_n\right)=\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty.$$

A opção correta é a **(A)**.

Resolução da pergunta 31

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 11

Como pelas propriedades dos logaritmos temos

$$\begin{aligned}\log_a\left(ab^3\right)=5 &\Leftrightarrow \log_a a+\log_a b^3=5\\ &\Leftrightarrow 1+3\log_a b=5 \Leftrightarrow \log_a b=\frac{4}{3}\\ &\Leftrightarrow \frac{\log_b b}{\log_b a}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_b a}=\frac{4}{3}\\ &\Leftrightarrow \log_b a=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

então a opção correta é a **(B)**.

Resolução da pergunta 32

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 11

(a) Assíntotas verticais: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 0^+}{0^+} = -\infty \times \frac{1}{0^+} = -\infty \times (+\infty)$
Logo, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de f. É a única pois f é contínua em $\mathbb{R}^+$ por ser o quociente de funções contínuas.
Assíntotas horizontais:
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{(1)}{=} 0$ **(1)** Limite notável: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$, para $p \in \mathbb{R}^+$.
Logo, a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f.
(b) Comecemos por notar que o domínio da condição $f(x) > 2\ln x$ é $D = D_f \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$.

Assim temos:

$$
\begin{aligned}
& f(x) > 2\ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} > 2\ln x \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\ln x - 2x\ln x}{x} > 0 \\
\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ & \ln x(1-2x) > 0 \\
\Leftrightarrow\ & ((\ln x > 0 \land 1 - 2x > 0) \lor (\ln x < 0 \land 1 - 2x < 0)) \land x \in D \\
\Leftrightarrow\ & ((x > 1 \land x < \frac{1}{2}) \lor (x < 1 \land x > \frac{1}{2})) \land x \in D \\
\Leftrightarrow\ & x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[.
\end{aligned}
$$

O conjunto solução da condição é portanto $S = \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

(c) Como g é uma função derivável em $\mathbb{R}^+$, por ser a soma de funções deriváveis, então $g(1)$ ser extremo relativo implica que $g'(1) = 0$.Como

$$g'(x) = \frac{-k}{x^2} + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{-k + 1 - \ln x}{x^2}$$

então

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{-k + 1 - \ln 1}{1^2} = 0 \Leftrightarrow -k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1.$$

Resolução da pergunta 33

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 11

(a) Como f é a composição das funções definidas por $y = \ln x$ e $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ que são contínuas nos seus domínios então f é contínua em $D_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.
Deste modo, os únicos pontos que podem originar assíntotas verticais são os pontos de abcissas -1 e 1.
Vamos por isso calcular os limites seguintes.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1^-} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{-2}{0-}\right) \\ &= \ln(+\infty) = +\infty.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{0^+}{1}\right) = \ln\left(0^+\right) \\ &= -\infty.\end{aligned}$$

Podemos concluir que as retas de equações $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas verticais do gráfico de f.
São as únicas pois f é contínua em D_f.
(b) Os pontos de abcissas a e $-a$ têm de coordenadas

$$(a, f(a)) = \left(a, \ln\frac{a-1}{a+1}\right)$$

e

$$(-a, f(-a)) = \left(-a, \ln\frac{-a-1}{-a+1}\right).$$

O declive da reta secante nos pontos de abcissas a e $-a$ é

$$\begin{aligned}m &= \frac{\ln\frac{-a-1}{-a+1} - \ln\frac{a-1}{a+1}}{-a-a} = \frac{\ln\frac{-a-1}{-a+1} - \ln\frac{a-1}{a+1}}{-2a} \\ &= \frac{\ln\frac{a+1}{a-1} + \ln\frac{a+1}{a-1}}{-2a} = \frac{2\ln\frac{a+1}{a-1}}{-2a} = \frac{\ln\frac{a+1}{a-1}}{-a}\end{aligned}$$

Podemos concluir que a reta pretendida é da forma

$$y = \frac{\ln\frac{a+1}{a-1}}{-a}x + b$$

onde b é uma constante real.
Substituindo na equação da reta o ponto

$$(a, f(a)) = \left(a, \ln\frac{a-1}{a+1}\right)$$

vem:

$$\ln\frac{a-1}{a+1} = \frac{\ln\frac{a+1}{a-1}}{-\cancel{a}} \times \cancel{a} + b \Leftrightarrow b = \ln\frac{a-1}{a+1} + \ln\frac{a+1}{a-1}$$
$$\Leftrightarrow b = \ln\frac{a-1}{a+1} - \ln\frac{a-1}{a+1} \Leftrightarrow b = 0.$$

Podemos concluir que a equação reduzida da reta secante é

$$y = \frac{\ln\frac{a+1}{a-1}}{-a}x.$$

Como

$$0 = \frac{\ln\frac{a+1}{a-1}}{-a} \times 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

então a reta contém a origem do referencial.

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 11

Resolução da pergunta 34

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 11

(a) Podemos concluir através da definição de derivada de uma função num ponto que

$$p = f'(-1) = e^{-1}\left((-1)^2 - 1 + 1\right) = \frac{1}{e}.$$

Consequentemente $q = -\dfrac{1}{\frac{1}{e}} = -e$.

Geometricamente, como p é o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1 e a reta normal neste ponto tem declive $-\frac{1}{p}$, podemos concluir que o declive da reta normal ao gráfico de f no ponto de abcissa -1 é $-e$.

(b). Para estudar o sentido das concavidades de f devemos começar por calcular $f''(x)$:

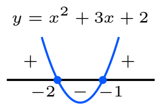
$$f''(x) = e^x\left(x^2 + x + 1\right) + e^x(2x + 1) = e^x\left(x^2 + 3x + 2\right).$$

O passo seguinte é determinar os zeros de f''.

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow e^x\left(x^2 + 3x + 2\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x = 0 \vee x^2 + 3x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \varnothing \vee x = -2 \vee x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1. \end{aligned}$$

Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de f'' e da concavidade de f.

x	$-\infty$	-2		-1	$+\infty$
e^x	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2+3x+2	$+$	0	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$		$\cap$		$\cup$



Podemos concluir que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -2]$ e em $[-1, +\infty[$ e voltada para baixo em $[-2, -1]$.Os pontos de abcissas -2 e -1 são pontos de inflexão do gráfico de f.

Resolução da pergunta 35

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 12

Tendo em consideração que $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ vem que

$$\begin{aligned}\lim v_n &= \lim \left[\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\right] = \ln\left[\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\\ &= \ln e = 1.\end{aligned}$$

Por outro lado, como

$$\lim \frac{kn+3}{2n} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{kn}{2n} + \lim \frac{3}{2n} = \frac{k}{2} + 0 = \frac{k}{2}$$

então $\frac{k}{2} = 1 \Leftrightarrow k = 2$.
A opção correta é a **(B)**.

Resolução da pergunta 36

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 12

Para f ser contínua no ponto 0 tem que verificar $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.Como

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(2 + e^{x+k}\right) = 2 + e^k = f(0)$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{2x + \ln(x+1)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{x} + \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 2 + 1 = 3\end{aligned}$$

então f é contínua no ponto 0 se e só se

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)\\ \Leftrightarrow &2 + e^k = 3 \Leftrightarrow e^k = 1 \Leftrightarrow k = 0.\end{aligned}$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

Resolução da pergunta 37

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 12

$$\lim_{x\to a}\frac{ae^{x-a}-a}{x^2-a^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to a}\frac{a\left(e^{x-a}-1\right)}{(x-a)(x+a)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{e^{x-a}-1}{x-a}\times\lim_{x\to a}\frac{a}{x+a}=\star$$

Com base no limite notável $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, fazendo em $\lim_{x\to a}\frac{e^{x-a}-1}{x-a}$ a mudança de variável $x-a=y\Leftrightarrow x=a+y$ temos $x\to a\Leftrightarrow x-a\to 0\Leftrightarrow y\to 0$ e vem
$\star=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\times\lim_{x\to a}\frac{a}{x+a}=1\times\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$.
Podemos concluir que a opção correta é a **(B)**.

Resolução da pergunta 38

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 13

(a) De acordo com a definição de assíntota horizontal, o gráfico de f admite a reta de equação $y = b$ como assíntota horizontal se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$.
Comecemos com o estudo da existência de assíntotas horizontais quando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (1 + xe^x) \overset{(\infty \times 0)}{=} \star$$

Como obtivemos um símbolo de indeterminação, vamos efetuar a mudança de variável $y = -x \Leftrightarrow x = -y$ e utilizar o limite notável $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ $(p \in \mathbb{R})$.

$$\star = 1 + \lim_{y \to +\infty} \frac{-y}{e^y} = 1 - \frac{1}{\lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y}} = 1 - \frac{1}{+\infty} = 1.$$

Podemos concluir que $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico de f.Prosseguimos com o estudo da existência de assíntotas horizontais quando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (\ln(x-3) - \ln x) \overset{(\infty - \infty)}{=}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\ln \frac{x-3}{x} \right) = \ln \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{x-3}{x} \right) = \ln 1 = 0.$$

Podemos concluir que $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f.
Em suma, $y = 0$ e $y = 1$ são as assíntotas horizontais do gráfico de f.
(b) Em $]-\infty, 3]$ temos

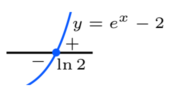
$$f(x) - 2x > 1 \Leftrightarrow 1 + xe^x - 2x > 1 \Leftrightarrow x\left(e^x - 2\right) > 0.$$

Para resolver esta inequação vamos determinar os zeros da equação que lhe está associada e estudar o sinal da função definida por $y = x\left(e^x - 2\right)$ através de uma tabela de sinal.

$$x\left(e^x - 2\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee e^x = 2$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \ln 2.$$

Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal da função definida por
$y = x\left(e^x - 2\right)$.

x	$-\infty$	0		$\ln 2$		3
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$e^x - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$x\left(e^x - 2\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$	



Note-se que o esboço do gráfico da função definida por $y = e^x - 2$ obteve-se deslocando o gráfico de $y = e^x$ duas unidades para baixo.Podemos concluir que o conjunto solução da condição é $S =]-\infty, 0[\cup]\ln 2, 3]$.

(c) Comecemos por recordar que, por definição, a reta tangente ao gráfico de uma função num ponto x_0 é a reta que tem como declive $f'(x_0)$ e contém o ponto $(x_0, f(x_0))$, denominado por ponto de tangência.
Como para $x > 3$ temos $f'(x) = (\ln(x-3) - \ln x)' = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x}$ então

$$f'(4) = \frac{1}{4-3} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

e a equação reduzida da reta tangente pretendida é da forma $y = \frac{3}{4}x + b$ onde $b \in \mathbb{R}$. Substituindo o ponto de tangência é $(4, f(4)) = (4, \ln 1 - \ln 4) = (4, -\ln 4)$ nesta equação vem

$$-\ln 4 = \frac{3}{4} \times 4 + b \Leftrightarrow b = -\ln 4 - 3$$

e podemos concluir que a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 4 é $y = \dfrac{3}{4}x - \ln 4 - 3$.

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 13

Resolução da pergunta 39

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 13

A resolução do problema vai utilizar as propriedades dos logaritmos.

$$\begin{aligned}\log_a\left(a^2 b\right) &= \log_a\left(a^2\right) + \log_a(b)\\ &= 2 + \frac{\log_b(b)}{\log_b(a)} = 2 + \frac{1}{\frac{1}{3}} = 2 + 3 = 5.\end{aligned}$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(D)**.

Resolução da pergunta 40

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 13

(a) Como para $x < \frac{1}{2}$ a função f está definida pelo quociente de funções contínuas então é contínua em $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$.

Para $x > \frac{1}{2}$ a função está definida pelo produto de funções contínuas. Consequentemente f é contínua em $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Resta-nos estudar a continuidade no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x-\frac{1}{2}\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{2}}\left(e^{x-\frac{1}{2}}-1\right)}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$
$$= \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim_{x-\frac{1}{2}\to 0^-} \frac{e^{x-\frac{1}{2}}-1}{x-\frac{1}{2}} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} ((x+1)\ln x) = \left(\frac{1}{2}+1\right)\ln\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\ln\frac{1}{2}.$$

Deste modo, como $\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) \neq \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)$ então f não é contínua no ponto $\frac{1}{2}$.

Como os limites laterais no ponto $\frac{1}{2}$ são finitos então a reta de equação $x = \frac{1}{2}$ não é assíntota vertical do gráfico de f.

Podemos também concluir que, como f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

(b). Para estudar o sentido das concavidades de f devemos começar por calcular $f''(x)$ en $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$:

$$f'(x) = \ln x + (x+1)\times\frac{1}{x} = \ln x + \frac{x+1}{x}.$$

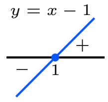
$$f''(x) = \left(\ln x + \frac{x+1}{x}\right)' = \frac{1}{x} + \frac{x-(x+1)}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}.$$

O passo seguinte é determinar os zeros de f''.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

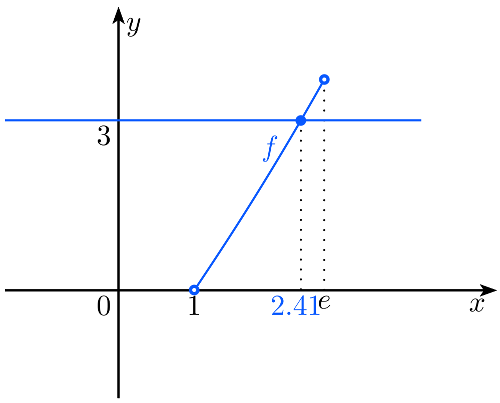
Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de f'' e da concavidade de f.

x	$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$
f''	$-$	$-$	0	$+$
f		$\cap$		$\cup$



Podemos concluir que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$ e voltada para cima em $[1, +\infty[$.O ponto $(1, f(1)) = (1, 0)$ é o único ponto de inflexão do gráfico de f.

(c) Como para $x > \frac{1}{2}$ a função f está definida pelo produto de funções contínuas então f é contínua em $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Assim, f é em particular contínua em $[1, e]$.
Como $f(1) = 0 < 3$ e $f(e) = (e+1)\ln e = e + 1 > 3$ então $f(1) < 3 < f(e)$ e podemos concluir pelo Teorema de Bolzano que f tem pelo menos uma solução no intervalo $]1, e[$.
No gráfico seguinte, obtido através de uma calculadora gráfica, estão representados os gráficos de $y = f(x)$ e $y = 3$.



Podemos concluir que a solução pedida aproximada às centésimas é 2.41.

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 13

Resolução da pergunta 41

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 14

(a) Como $d(0) = 10 + 5e^0 = 15$ e a distância de P à base do recipiente é 16 então o raio da esfera é igual a $16 - 15 = 1$ e o seu volume é

$$\frac{4}{3}\pi \times 1^3 = \frac{4}{3}\pi \; cm^3 \approx 4.19 \; cm^3.$$

(b) Para obter o pretendido vamos estudar a monotonia de d.

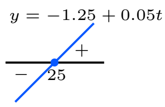
$$\begin{aligned} &d'(t) = 0 - e^{-0.05t} + (5-t) \times (-0.05)e^{-0.05t} \\ =&e^{-0.05t}\left(-1 - 0.25 + 0.05t\right) \Leftrightarrow e^{-0.05t}\left(-1.25 + 0.05t\right). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} &d'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-0.05t} = 0 \vee -1.25 + 0.05t = 0 \\ \Leftrightarrow &t \in \varnothing \vee t = 25 \Leftrightarrow t = 25 \end{aligned}$$

então 25 é o único ponto crítico.Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de d' e da monotonia de d.

x	0		25	$+\infty$
$e^{-0.05t}$		$+$	$+$	$+$
$-1.25 + 0.05t$		$-$	0	$+$
$d'(t)$		$-$	0	$+$
d	0	$\searrow$	min	$\nearrow$ 0



Podemos concluir que a distância é mínima quando $t = 25$. Corresponde portanto a 25 segundos após se ter iniciado o movimento.

Resolução da pergunta 42

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 14

Como $\lim (u_n) = (+\infty)^2 = +\infty$ então

$$\lim f(u_n) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\ln x}{x}$$
$$\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 + 0 = 0.$$

A opção correta é a **(A)**.

Resolução da pergunta 43

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 14

$\log_3\left(\frac{3^k}{9}\right) = \log_3 3^k - \log_3 3^2 = k - 2.$

A opção correta é a **(B)**.

Resolução da pergunta 44

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 15

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 45

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 15

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 46

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 15

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 47

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 15

Vídeos da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):
(a)
(b)

Resolução da pergunta 48

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 16

Vídeos da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):
(a)
(b)

Resolução da pergunta 49

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 16

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 50

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 16

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 52

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 17

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 51

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 17

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 53

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 17

Vídeos da resolução:
(a)
(b)

Resolução da pergunta 54

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 18

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 55

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 18

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 56

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 18

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 58

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 19

Vídeos da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):
(a)
(b)

Resolução da pergunta 59

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 19

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 60

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 19

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 57

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 18

Vídeos da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):
(a)
(b)

Resolução da pergunta 61

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 19

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 62

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 20

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 63

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 20

Vídeos da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):
(a)
(b)

Resolução da pergunta 64

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 20

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 65

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 21

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 66

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 21

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 67

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 21

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 70

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 22

Vídeos da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

(a)

(b)

Resolução da pergunta 68

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 21

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 69

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 21

Vídeos da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):
(a)
(b)

Resolução da pergunta 71

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 22

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 72

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 22

Vídeos da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):
(a)
(b)

Resolução da pergunta 74

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 23

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 73

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 23

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 75

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 23

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 76

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 23

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 77

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 24

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):