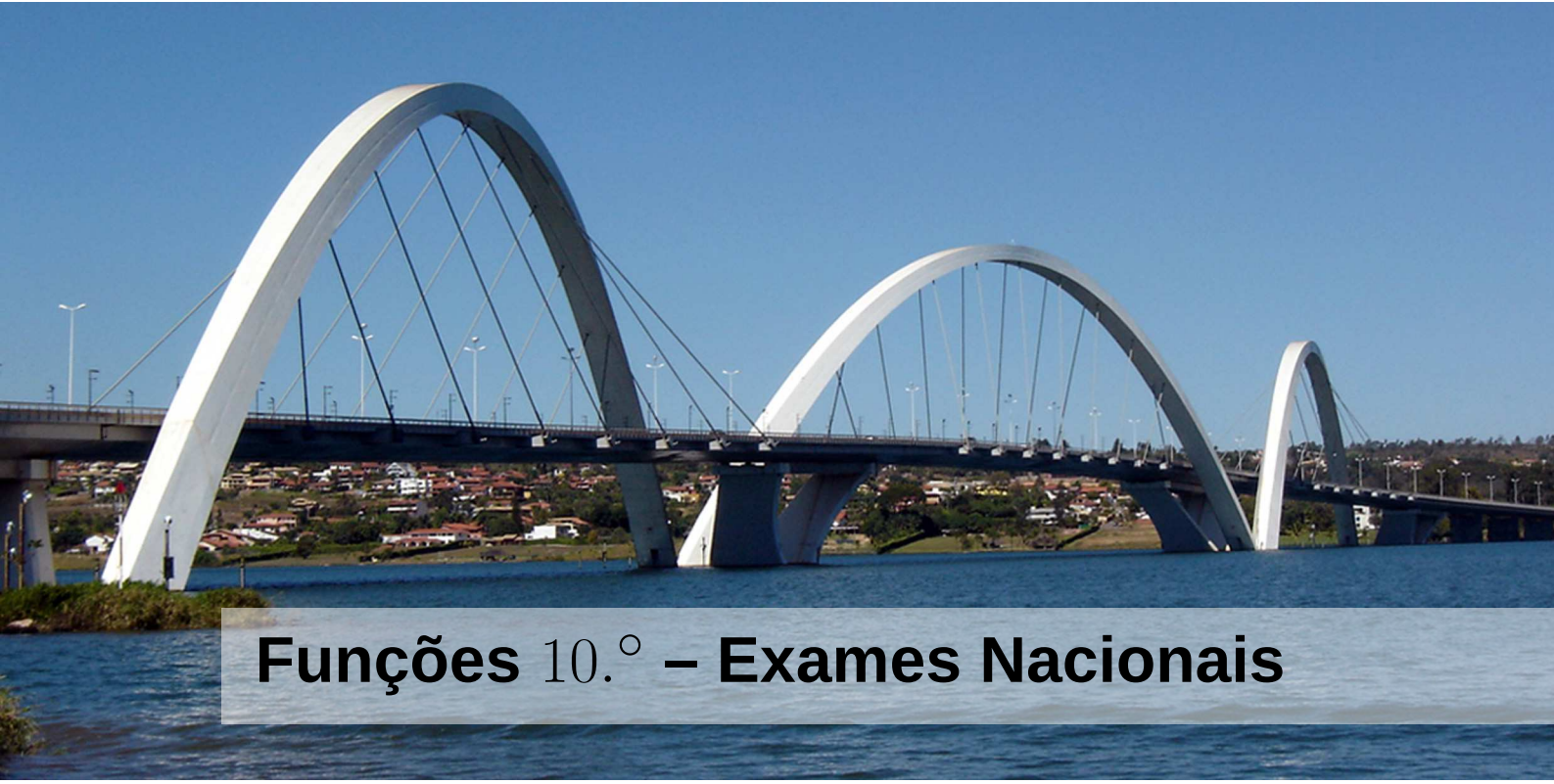
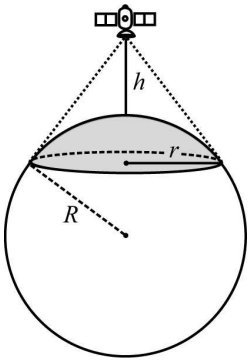


Funções $10.^{\circ}$ – Exames Nacionais

Perguntas de Exames Nacionais dos últimos 15 anos com resolução e/ou vídeo.
Versão de 14 de outubro de 2020.
Verifique se existe versão com data mais recente aqui e aceda a mais fichas aqui.

1. Os satélites artificiais são utilizados para diversos fins e a altitude a que são colocados depende do fim a que se destinam.
Admita que a Terra é uma esfera.
A Figura 2 apresenta um esquema em que se pode observar a superfícieterrestre coberta por um satélite, quando este se encontra numa certaposição.
Nesta figura,



- R é o raio, em quilómetros, da Terra;
- h é a altitude, em quilómetros, do satélite ($h > 0$);
- r é o raio, em quilómetros, da base da calote esférica cuja superfície é coberta pelo satélite ($0 < r < R$);
- as grandezas h e r podem relacionar-se por meio da igualdade $r = \frac{R}{h+R}\sqrt{h^2 + 2hR}$.

Sabe-se que, para cada posição do satélite, a percentagem da área da superfície terrestre coberta pelo satélite é dada por $50\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}\right)$.

1.1 Qual é a percentagem da área da superfície terrestre coberta por um satélite se o raio da base da calote esférica for igual a $\frac{3}{5}$ do raio da Terra?

(A) 20% **(B)** 15% **(C)** 10% **(D)** 5%

1.2 Considere que o raio da Terra é $6400\ km$.
Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a percentagem da área

da superfície terrestre coberta por um satélite se a altitude deste for igual ao raio da base da respetiva calote esférica.
Apresente o resultado arredondado às unidades.
Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.
Na sua resposta:
— apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
— reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;
— apresente o valor pedido arredondado às unidades.
Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

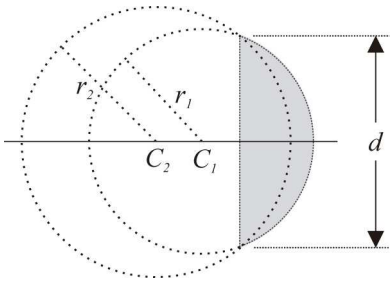
Resolução, pg. 6

Exame nacional de 2020 - 2.ª fase

2. Uma lente de contato é um meio transparente limitado por duas faces, sendo cada uma delas parte deuma superfície esférica. Na figura, pode observar-se uma lente de contato.



Na figura em baixo, está representado um corte longitudinal de duas superfícies esféricas, uma de centro C_1 e raio r_1 e outra de centro C_2 e raio r_2, com $r_2 > r_1$, que servem de base à construção de uma lente de contato, representada a sombreado na figura.
Seja $x = \overline{C_1C_2}$.Sabe-se que o diâmetro, d, da lente é dado por



$$\frac{\sqrt{\left[(r_1+r_2)^2-x^2\right]\left[x^2-(r_1-r_2)^2\right]}}{x},$$

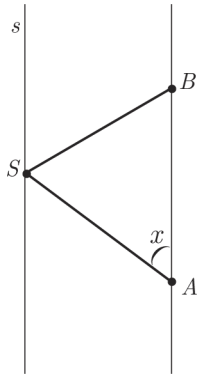
com $r_2 - r_1 < x < \sqrt{r_2^2 - r_1^2}$.
Uma lente de contato foi obtida a partir de duas superfícies esféricas com $7\ mm$ e $8\ mm$ de raio, respetivamente.
O diâmetro dessa lente excede em $9\ mm$ a distância, x, entre os centros das duas superfícies esféricas.
Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de x, sabendo-se que esse valor é único no intervalo $\left]r_2 - r_1, \sqrt{r_2^2 - r_1^2}\right[$.
Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.
Na sua resposta:
– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora

que lhe permite(m) resolver a equação;
– apresente o valor pedido em milímetros, arredondado às décimas.

Resolução, pg. 7

Exame nacional de 2019 - 1.ª fase

3. Na figura ao lado estão representadas duas retas paralelas, a reta AB (em que A e B são pontos fixos) e a reta s.



O ponto S é um ponto móvel, deslocando-se ao longo de toda a reta s.
Para cada posição do ponto S, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo BAS e seja $a(x)$ a área do triângulo $[ABS]$.
Apenas um dos seguintes gráficos pode representar a função a.
Numa composição, explique por que razão cada um dos outros três gráficos não pode representar a função a.

Gráfico 1

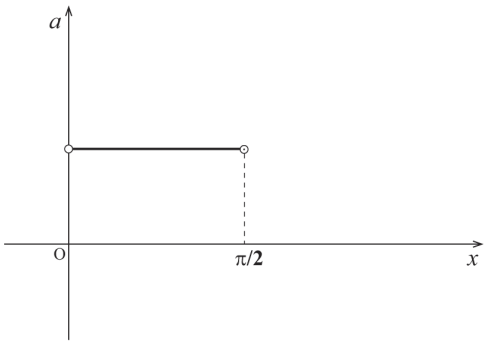


Gráfico 2

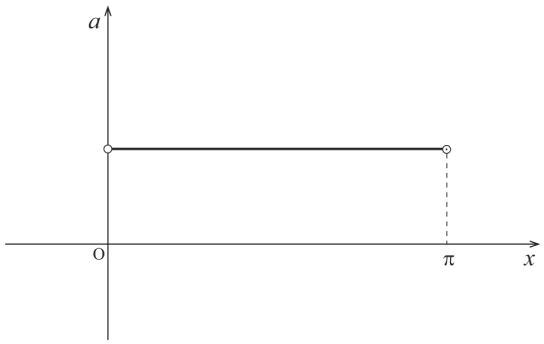


Gráfico 3

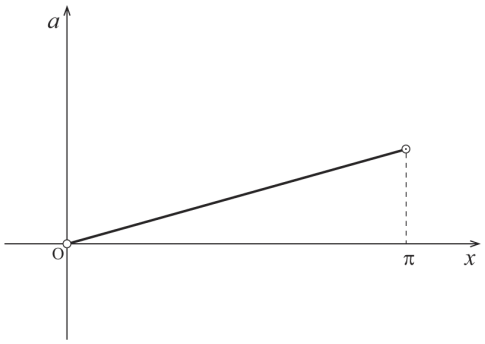
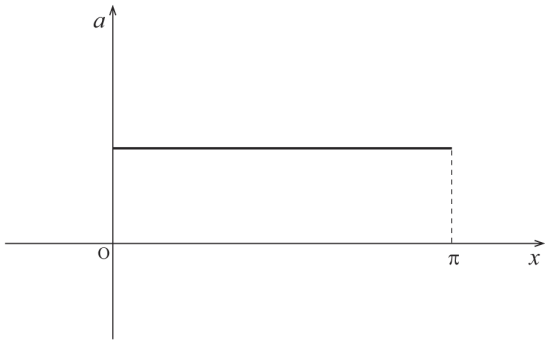


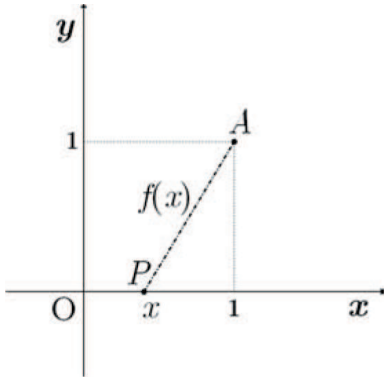
Gráfico 4



Resolução, pg. 9

Exame nacional de 2008 - 2.ª fase

4. Considere o ponto $A(1, 1)$, representado na figura.



Admita que um ponto, P, parte da origem O do referencial e se desloca ao longo do semi-eixo positivo Ox. Para cada posição do ponto P, seja x a abcissa de P.
Seja f a função que, a cada valor de x, faz corresponder a distância do ponto P ao ponto A.
Apenas um dos seguintes gráficos pode representar a função f.
Numa pequena composição, explique por que razão cada um dos outros três gráficos não pode representar a função f.

Gráfico 1

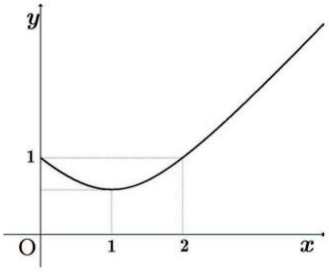


Gráfico 2

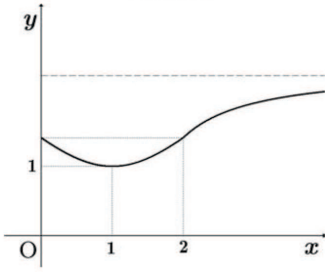


Gráfico 3

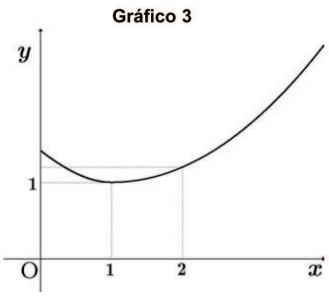
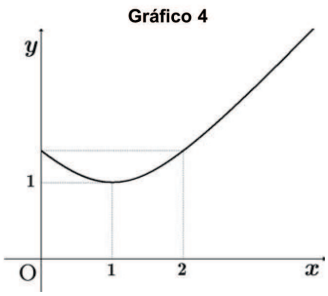


Gráfico 4



Resolução, pg. 8

Exame nacional de 2009 - 1.ª fase

5. Considere um retângulo cuja área é igual a 5.
Qual das seguintes expressões representa o perímetro deste retângulo, em função do comprimento, x, de um dos seus lados?

(A) $2x + \frac{10}{x}$ **(B)** $2x + \frac{2x}{5}$ **(C)** $2x + \frac{5}{x}$ **(D)** $x + \frac{5}{x}$

Resolução, pg. 10

Exame nacional de 2007 - 2.ª fase

6. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.
Sabe-se que 3 é um zero da função f.
Seja g a função definida por $g(x) = f(x-1) + 4$, para qualquer número real x.
Qual dos seguintes pontos pertence garantidamente ao gráfico da função g?

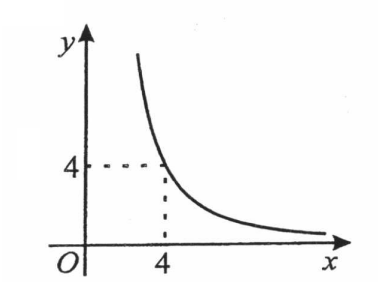
(A) $(2, 4)$ **(B)** $(4, 4)$ **(C)** $(2, 8)$ **(D)** $(1, 7)$

Resolução, pg. 11

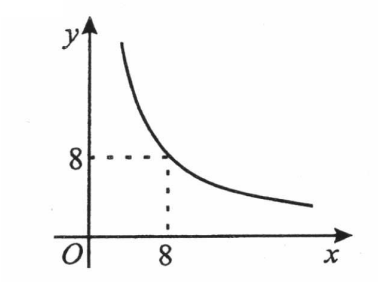
Exame nacional de 2007 - 1.ª fase

7. Pretende-se construir um prisma quadrangular regular com $64\ cm^3$ de volume.
A altura y do prisma, medida em cm, depende do comprimento x da aresta da base, medido igualmente em cm.
Qual dos gráficos seguintes traduz corretamente a relação entre estas duas variáveis?

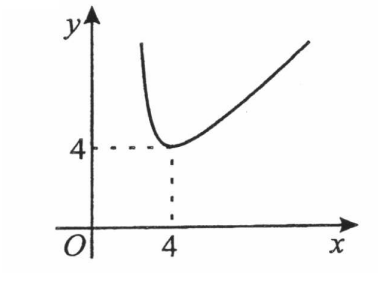
(A)



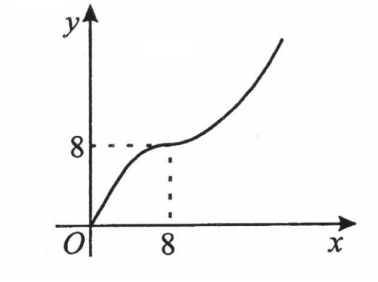
(B)



(C)



(D)



Resolução, pg. 12

Exame nacional de 2006 - 1.ª fase

Resoluções

Resolução da pergunta 1

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1

1.1 Vídeo da resolução:

Como $r = \frac{3}{5}R$ então

$$50\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}\right) = 50\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{\frac{3}{5}R}{R}\right)^2}\right)$$
$$= 50\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\right) = 50\left(1-\frac{4}{5}\right) = 10.$$

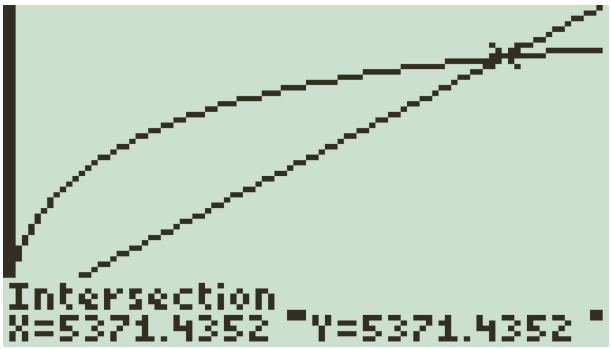
A opção correta é a **(C)**.

1.2 Vídeo da resolução:

$R = 6400$.

$$h = r \Rightarrow r = \frac{6400}{r+6400}\sqrt{r^2+2r\times 6400} \Leftrightarrow r = \frac{6400}{r+6400}\sqrt{r^2+12800r}.$$

Recorrendo à calculadora gráfica obtemos os gráficos das funções definidas por $y = r$ e $y = \frac{6400}{r+6400}\sqrt{r^2+12800r}$ e uma aproximação do seu ponto de interseção no intervalo $]0, 6400[$.



Podemos concluir que $r \approx 5371.44$.
Como

$$50\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{5371.44}{6400}\right)^2}\right) \approx 23$$

podemos concluir que a percentagem da área da superfície terrestre coberta pelo satélite é aproximadamente 23%.

Resolução da pergunta 2

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

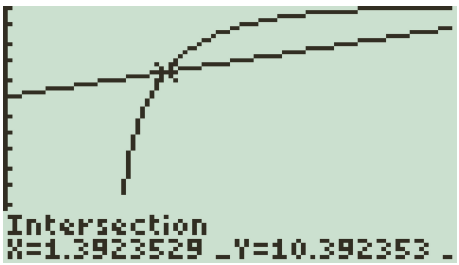
Vídeo da resolução:

O problema pode ser equacionado com $d = x + 9$.Como $r_1 = 7$ e $r_2 = 8$ temos

$$\begin{aligned} & d = x + 9 \\ \Leftrightarrow & \frac{\sqrt{\left[(7+8)^2 - x^2\right]\left[x^2 - (7-8)^2\right]}}{x} = x + 9 \\ \Leftrightarrow & \frac{\sqrt{(225 - x^2)(x^2 - 1)}}{x} = x + 9 \end{aligned}$$

e $\left]r_2 - r_1, \sqrt{r_2^2 - r_1^2}\right[= \left]1, \sqrt{15}\right[$.

Introduzindo na calculadora gráfica as expressões $y = \frac{\sqrt{(225-x^2)(x^2-1)}}{x}$ e $y = x + 9$ e recorrendo às suas potencialidades, obtemos os gráficos seguintes e o seu ponto de interseção no intervalo $\left]1, \sqrt{15}\right[$.



Podemos concluir que $x \approx 1.4$.

Resolução da pergunta 4

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

Vídeo da resolução: vídeo

Resolução da pergunta 3

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

Vídeo da resolução: vídeo

Resolução da pergunta 5

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

Resposta correta: (A)
Vídeo da resolução: vídeo

Resolução da pergunta 6

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

Resposta correta: (B)
Vídeo da resolução: vídeo

Resolução da pergunta 7

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

Resposta correta: (A)
Vídeo da resolução: vídeo