

Geometria em $\mathbb{R}^2$ do 11.º – Exames

Perguntas de Exames Nacionais dos últimos 15 anos com resolução e/ou vídeo.

Versão de 9 de janeiro de 2022.

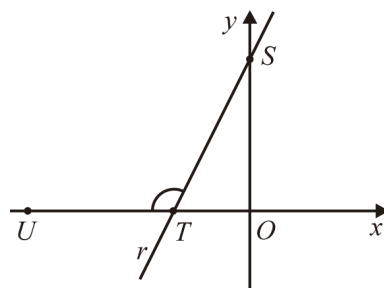
Verifique se existe versão com data mais recente [aqui](#) e aceda a mais fichas [aqui](#).

1. Na figura, estão representados, num referencial o.n. xOy , os pontos S , T e U e a reta r de equação $y = 2x + 4$.

Sabe-se que:

- os pontos S e T são, respetivamente, os pontos de intersecção da reta r com os eixos Oy e Ox ;
- o ponto U pertence ao eixo Ox e tem abcissa inferior à do ponto T

Qual dos valores seguintes é o valor, aproximado às centésimas, da amplitude, em radianos, do ângulo STU ?



(A) 4,25

(B) 2,68

(C) 2,03

(D) 1,82

[Resolução, pg. 6](#)

Exame nacional de 2020 - 1.ª fase

2. Considere, num referencial o.n. xOy , a circunferência centrada na origem do referencial e que passa no ponto $A(2, 1)$.

Seja r a reta tangente à circunferência no ponto A .

Qual é a ordenada na origem da reta r ?

(A) 4

(B) 5

(C) 6

(D) 7

[Resolução, pg. 8](#)

Exame nacional de 2018 - 2.ª fase

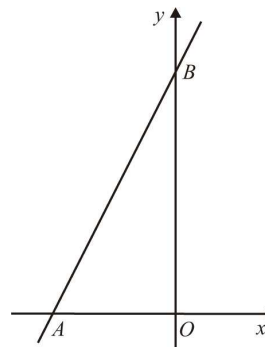
3. Na figura, está representada, num referencial o.n. xOy , a reta AB .
Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo negativo Ox e o ponto B pertence ao semieixo positivo Oy ;
- a reta AB tem equação $y = 2x + 4$.

Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$.

Quais são as coordenadas do ponto M ?

- (A) $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ (B) $(-1, 2)$
(C) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ (D) $(-2, 4)$



[Resolução, pg. 7](#)

Exame nacional de 2019 - 2.^a fase

4. Considere, num referencial o.n. xOy , uma elipse centrada na origem do referencial e de focos F_1 e F_2 pertencentes ao eixo Ox .

Sabe-se que:

- $\overline{F_1 F_2} = 12$;
- sendo P um ponto qualquer da elipse, tem-se $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 20$.

Qual é a equação reduzida desta elipse?

- (A) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$ (B) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$
(C) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ (D) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$

[Resolução, pg. 9](#)

Exame nacional de 2018 - 2.^a fase

5. Considere, num referencial o.n. xOy , o quadrado definido pela condição

$$0 \leq x \leq 4 \quad \wedge \quad 1 \leq y \leq 5.$$

Qual das condições seguintes define a circunferência inscrita neste quadrado?

- (A) $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 16$
(B) $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 4$
(C) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$
(D) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$

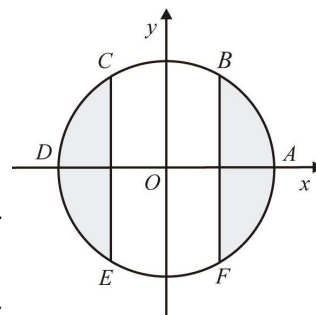
[Resolução, pg. 11](#)

Exame nacional de 2017 - 1.^a fase

6. Na figura, está representada, num referencial o.n. xOy , uma circunferência de centro na origem e que passa nos pontos A, B, C, D, E e F .

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox e tem abcissa igual a 2;
- os pontos B e F têm ambos abcissa igual a 1;
- os pontos C, D e E são, respetivamente, os simétricos dos pontos B, A e F relativamente ao eixo Oy .



Qual das condições seguintes define o domínio plano representado a sombreado?

(A) $x^2 + y^2 \leq 2 \wedge |x| \geq 1$

(B) $x^2 + y^2 \leq 4 \wedge |x| \leq 1$

(C) $x^2 + y^2 \leq 4 \wedge |x| \geq 1$

(D) $x^2 + y^2 \leq 2 \wedge |x| \leq 1$

[Resolução, pg. 10](#)

Exame nacional de 2018 - 1.ª fase

7. Considere, num referencial o.n. xOy , a região definida pela condição

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 1 \wedge x+y+2 \geq 0.$$

Qual é o perímetro dessa região?

(A) $\pi + 1$

(B) $\frac{\pi}{2} + 1$

(C) $\pi + 2$

(D) $\frac{\pi}{2} + 2$

[Resolução, pg. 12](#)

Exame nacional de 2016 - 2.ª fase

8. Na figura, está representado um triângulo isósceles ABC .

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{2}$
- $\widehat{BAC} = 75^\circ$

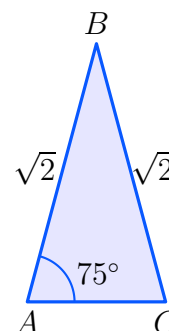
Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$?

(A) $\sqrt{2}$

(B) $2\sqrt{2}$

(C) $\sqrt{3}$

(D) $2\sqrt{3}$



[Resolução, pg. 13](#)

Exame nacional de 2016 - 1.ª fase

9. Considere, num referencial o.n. xOy , a circunferência definida pela equação

$$x^2 + (y - 1)^2 = 2.$$

Esta circunferência intersesta o eixo Ox em dois pontos. Destes pontos, seja A o que tem abcissa positiva. Seja r a reta tangente à circunferência no ponto A . Qual é a equação reduzida da reta r ?

(A) $y = x + 1$

(B) $y = x - 1$

(C) $y = 2x + 2$

(D) $y = 2x - 2$

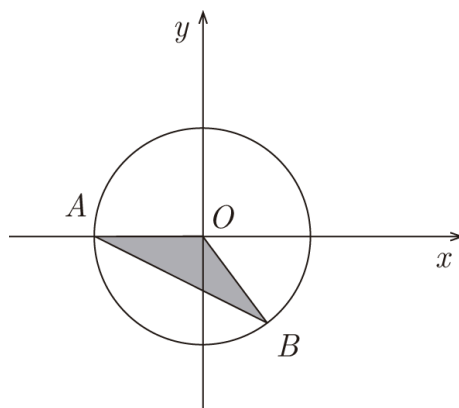
[Resolução, pg. 14](#)

Exame nacional de 2015 - 2.^a fase

10. Na figura, estão representados, num referencial o.n. xOy , uma circunferência e o triângulo $[OAB]$.

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- a circunferência tem centro no ponto O e raio 1;
- A é o ponto de coordenadas $(-1, 0)$;
- B pertence à circunferência e tem ordenada negativa;
- o ângulo AOB tem amplitude igual a $\frac{2\pi}{3}$ radianos.



Qual é a área do triângulo $[OAB]$?

(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(B) $\frac{1}{2}$

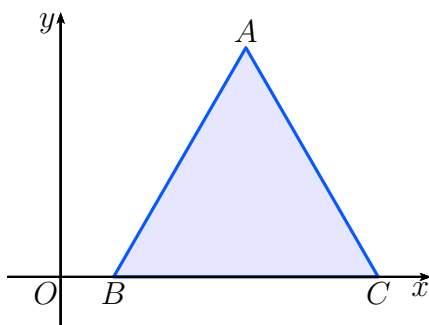
(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\sqrt{3}$

[Resolução, pg. 16](#)

Exame nacional de 2011 - Época especial

11. Na figura, está representado, num referencial o.n. xOy , um triângulo equilátero $[ABC]$.



Sabe-se que:

- o ponto A tem ordenada positiva;
- os pontos B e C pertencem ao eixo Ox ;
- o ponto B tem abcissa 1 e o ponto C tem abcissa maior do que 1.

Qual é a equação reduzida da reta AB ?

(A) $y = \sqrt{2}x - \sqrt{2}$

(B) $y = \sqrt{2}x + \sqrt{2}$

(C) $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$

(D) $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$

[Resolução, pg. 15](#)

Exame nacional de 2015 - 1.ª fase

Resoluções

Resolução da pergunta 1

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1](#)

Vídeo da resolução: 

Sabemos que

$$\tan(\widehat{STO}) = 2 \Leftrightarrow \widehat{STO} = \tan^{-1} 2.$$

Consequentemente, $\widehat{STU} \approx \pi - \tan^{-1} 2 \approx 2,03$.

A opção correta é a **(C)**.

Resolução da pergunta 3

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Podemos obter as coordenadas do ponto A , ponto de interseção da reta AB com Ox , resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -2. \end{cases}$$

Podemos concluir que $A(-2, 0)$. Podemos obter as coordenadas do ponto B , ponto de interseção da reta AB com Oy , resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4. \end{cases}$$

Podemos concluir que $B(0, 4)$.

As coordenadas do ponto médio são

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(\frac{-2 + 0}{2}, \frac{0 + 4}{2} \right) = (-1, 2).$$

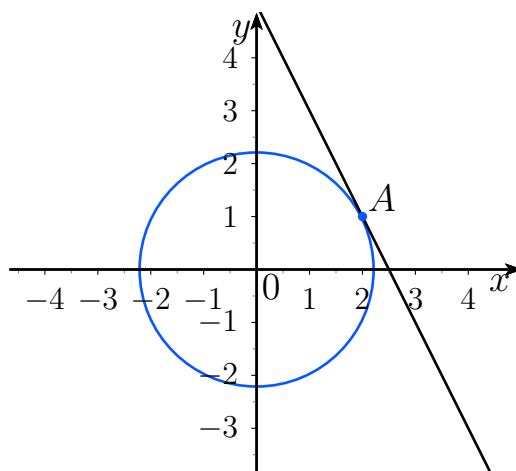
A opção correta é a **(B)**.

Resolução da pergunta 2

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1](#)

Vídeo da resolução ([Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!](#)): 

Começemos por representar num referencial ortonormado os elementos descritos.



$$\overrightarrow{OA} = (2, 1) \Rightarrow m_{OA} = \frac{1}{2}.$$

Logo, como a reta tangente no ponto A é perpendicular à reta OA , o seu declive é igual a -2 .

Consequentemente, a sua equação reduzida é da forma $y = -2x + b$, onde $b \in \mathbb{R}$.

Substituindo nesta equação as coordenadas de A temos

$$1 = -4 + b \Leftrightarrow b = 5$$

e podemos concluir que a equação reduzida da reta r é $y = -2x + 5$.

Temos portanto que a ordenada na origem da reta r é 5.

A opção correta é a **(B)**.

Resolução da pergunta 4

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Temos

$$\overline{F_1 F_2} = 12 \Leftrightarrow 2c = 12 \Leftrightarrow c = 6.$$

Por outro lado, como a soma das distâncias aos focos de uma elipse é sempre igual ao comprimento do eixo maior $2a$ então

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 20 \Leftrightarrow 2a = 20 \Leftrightarrow a = 10.$$

Deste modo,

$$b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow b^2 = 100 - 36 \Leftrightarrow b^2 = 64$$

e podemos concluir que a equação da elipse centrada na origem é

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1.$$

A opção correta é a **(B)**.

Resolução da pergunta 6

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Uma vez que a região consiste na parte de um círculo centrado na origem de raio 2, os seus pontos (x, y) terão que satisfazer a condição

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4.$$

Como se encontra à esquerda ou na reta de equação $x = -1$ ou à direita ou na reta de equação $x = 1$ então terá também que se verificar a condição

$$x \leq -1 \vee x \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1.$$

Podemos concluir que, como se verificam cumulativamente as duas condições, a opção correta é a **(C)**.

Resolução da pergunta 5

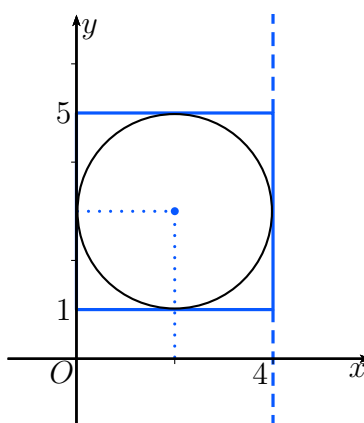
[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2](#)

A figura em baixo ilustra a situação.

Temos portanto uma circunferência de centro $(2, 3)$ e raio 2 definida pela equação

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4.$$

A opção correta é a (C).

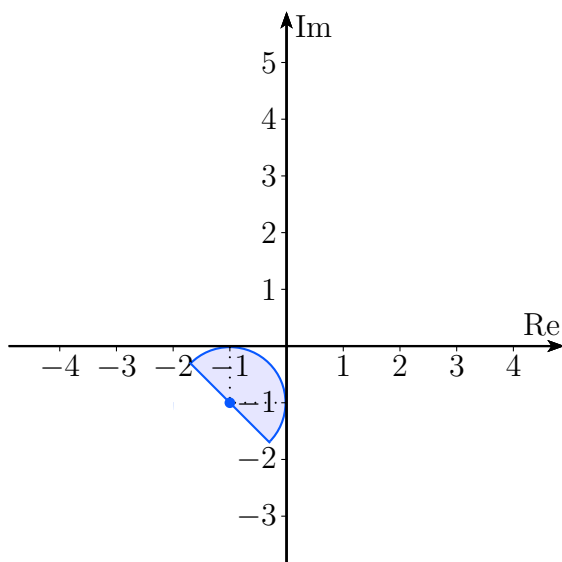


Resolução da pergunta 7

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3](#)

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 1 \wedge x+y+2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 1 \wedge y \geq -x-2.$$

Temos portanto a interseção de um círculo de centro $(-1, -1)$ e raio 1 intersectado com o semi-plano superior, limitado inferiormente por $y = -x - 2$.



O perímetro da região é igual a metade do perímetro do círculo mais o seu diâmetro:

$$\frac{2\pi \times 1}{2} + 2 = \pi + 2.$$

A opção correta é a (C).

Resolução da pergunta 8

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3](#)

Uma vez que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° temos

$$\begin{aligned} \widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{ABC} &= 180^\circ \Leftrightarrow 75^\circ \times 2 + \widehat{ABC} = 180^\circ \\ \Leftrightarrow \widehat{ABC} &= 30^\circ. \end{aligned}$$

Pela definição de produto escalar temos

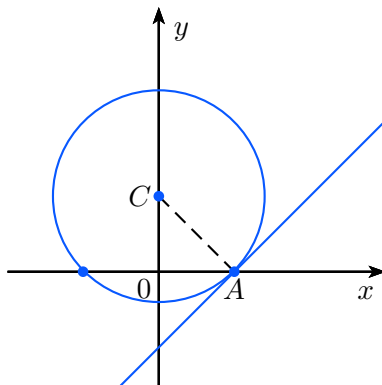
$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= \|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos(\widehat{ABC}) \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

A opção correta é a (C).

Resolução da pergunta 9

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4](#)

A circunferência de equação $x^2 + (y - 1)^2 = 2$ tem centro no ponto $(0, 1)$ e raio $\sqrt{2}$. A figura seguinte ilustra a circunferência e a reta r , tangente à circunferência no ponto A .



As coordenadas dos pontos de interseção da circunferência com o eixo Ox podem ser através do sistema seguinte

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 = 2 \\ y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (0 - 1)^2 = 2 \\ y = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \vee x = -1 \\ y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Podemos concluir que $A(1, 0)$.

A reta r é perpendicular à reta CA . Como $M_{CA} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{0 - 1}{1 - 0} = -1$ então o declive da reta r é $m = -\frac{1}{-1} = 1$. Deste modo, a equação reduzida da reta r é da forma $y = x + b$ para $b \in \mathbb{R}$. Substituindo as coordenadas de A na equação vem

$$0 = 1 + b \Leftrightarrow b = -1$$

e podemos concluir que a equação reduzida da reta é $y = x - 1$.

Podemos concluir que a opção correta é a (B).

Resolução da pergunta 11

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5](#)

Como o triângulo é equilátero então $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Consequentemente, o declive da reta AB é

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}.$$

Como a ordenada na origem da reta AB é negativa, **(D)** é a opção correta.

Resolução da pergunta 10

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 