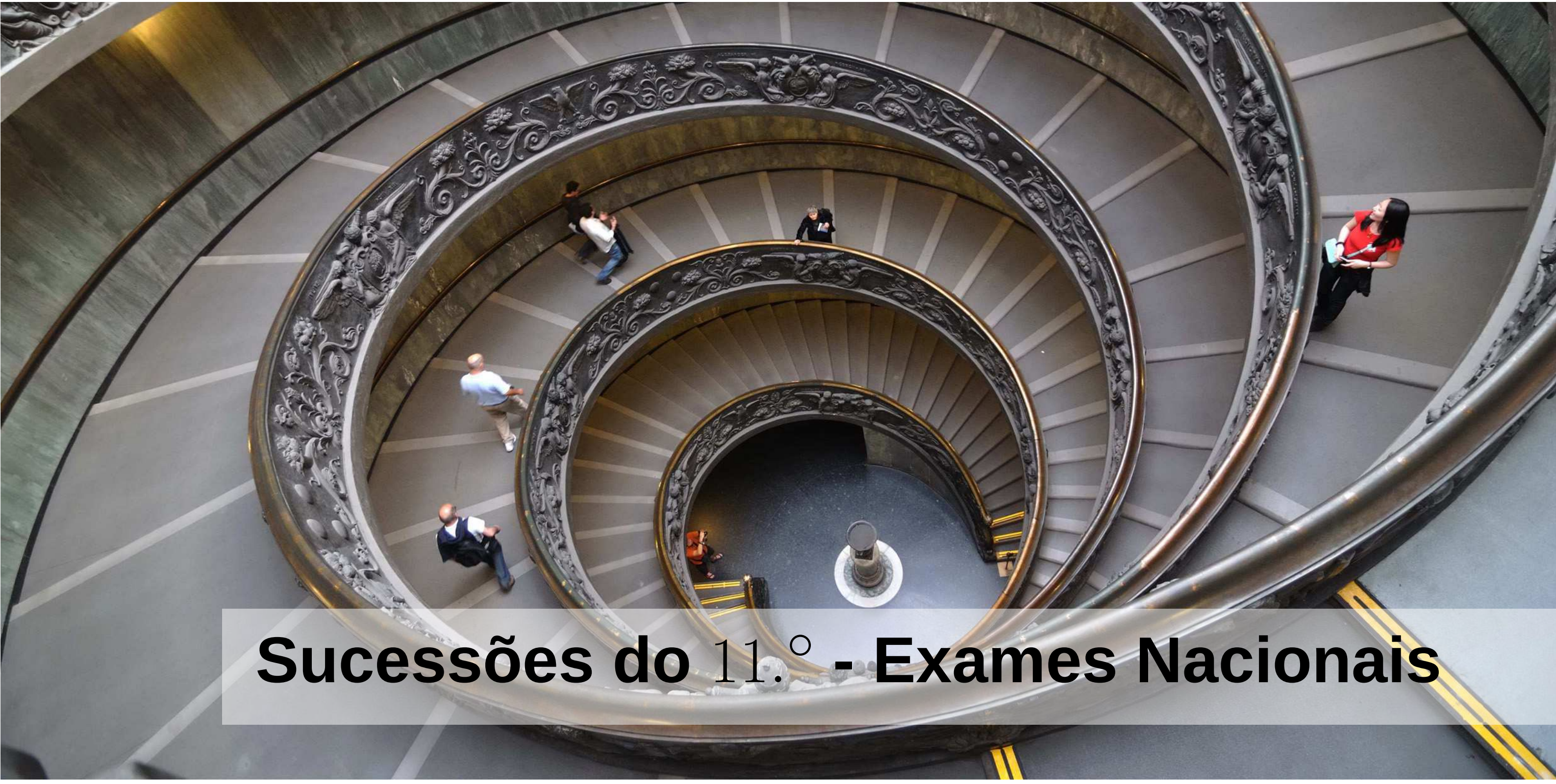

Sucessões do $11.^{\circ}$ - Exames Nacionais

Perguntas de Exames Nacionais dos últimos 16 anos com resolução e/ou vídeo.
Versão de 9 de janeiro de 2022.
Verifique se existe versão com data mais recente aqui e aceda a mais fichas aqui.

1. Seja (u_n) uma progressão aritmética.
Sabe-se que, relativamente a (u_n), a soma do sexto termo com o vigésimo é igual a -5 e que o décimo nono termo é igual ao quádruplo do sétimo termo.
Determine a soma dos dezasseis primeiros termos desta progressão.

Resolução, pg. 5

Exame nacional de 2021 - 2.ª fase

2. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
Determine, sem recorrer à calculadora, quantos termos de ordem ímpar da sucessão (u_n) pertencem ao intervalo $\left[\frac{83}{41}, \frac{67}{33}\right]$.

Resolução, pg. 6

Exame nacional de 2021 - 1.ª fase

3. Seja (u_n) uma progressão geométrica.
Sabe-se que $v_5 = 4$ e que $v_8 = 108$.
Qual é o valor de v_6?

(A) 12 **(B)** 24 **(C)** 48 **(D)** 60

Resolução, pg. 7

Exame nacional de 2021 - 1.ª fase

4. Seja (v_n) a sucessão definida por

$$v_n = \begin{cases} n & \text{se } n < 10 \\ 1 + \dfrac{1}{n} & \text{se } n \geq 10 \end{cases}$$

(A) A sucessão (v_n) tem limite nulo.

(B) A sucessão (v_n) é divergente.

(C) A sucessão (v_n) é limitada.

(D) A sucessão (v_n) é monótona.

Resolução, pg. 8

Exame nacional de 2020 - 2.ª fase

5. De uma progressão aritmética (u_n) sabe-se que o sétimo termo é igual ao dobro do segundo e que a soma dos doze primeiros termos é igual a 57.
Sabe-se ainda que 500 é termo da sucessão (u_n).
Determine a ordem deste termo.

Resolução, pg. 9

Exame nacional de 2020 - 2.ª fase

6. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \dfrac{8n-4}{n+1}$.
Estude a sucessão (u_n) quanto à monotonia.

Resolução, pg. 10

Exame nacional de 2020 - 1.ª fase

7. Sejam a e b dois números reais diferentes de zero.
Sabe-se que 2, a e b são três termos consecutivos de uma progressão geométrica.
Sabe-se ainda que $a-2$, b e 2 são três termos consecutivos de uma progressão aritmética.
Determine a e b.

Resolução, pg. 11

Exame nacional de 2019 - 2.ª fase

8. Seja r um número real maior do que 1.
Sabe-se que r é a razão de uma progressão geométrica de termos positivos.
Sabe-se ainda que, de dois termos consecutivos dessa progressão, a sua soma é igual a 12 e a diferença entre o maior e o menor é igual a 3.
Determine o valor de r.

Resolução, pg. 12

Exame nacional de 2019 - 1.ª fase

9. De uma progressão aritmética (u_n) sabe-se que o terceiro termo é igual a 4 e que a soma dos doze primeiros termos é igual a 174.
Averigue se 5371 é termo da sucessão (u_n).

Resolução, pg. 13

Exame nacional de 2018 - 2.ª fase

10. Seja a um número real.
Sabe-se que a, $a+6$ e $a+18$ são três termos consecutivos de uma progressão geométrica.
Relativamente a essa progressão geométrica, sabe-se ainda que a soma dos sete primeiros termos é igual a 381.
Determine o primeiro termo dessa progressão.

Resolução, pg. 14

Exame nacional de 2018 - 1.ª fase

11. De uma progressão geométrica (u_n), monótona crescente, sabe-se que $u_4 = 32$ e que $u_8 = 8192$.
Qual é o quinto termo da sucessão (u_n)?

(A) 64 **(B)** 128

(C) 256 **(D)** 512

Resolução, pg. 15

Exame nacional de 2017 - 1.ª fase

12. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = \begin{cases} n & \text{se } n \leq 20 \\ (-1)^n & \text{se } n > 20. \end{cases}$
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A sucessão (u_n) é monótona crescente

(B) A sucessão (u_n) é monótona decrescente

(C) A sucessão (u_n) é limitada

(D) A sucessão (u_n) é um infinitamente grande

Resolução, pg. 16

Exame nacional de 2017 - 2.ª fase

13. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}$.
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A sucessão (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$

(B) A sucessão (u_n) é uma progressão geométrica de razão 2

(C) A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$

(D) A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão 2

Resolução, pg. 17

Exame nacional de 2016 - 2.ª fase

14. Seja a um número real.
Considere a sucessão (u_n) definida por

$$u_n = \begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = -3u_n + 2, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Qual é o terceiro termo desta sucessão?

(A) $6a + 4$

(B) $9a - 4$

(C) $6a - 4$

(D) $9a + 4$

Resolução, pg. 18

Exame nacional de 2005 - 1.ª fase

15. Qual das expressões seguintes é termo geral de uma sucessão monótona e limitada?

(A) $(-1)^n$

(B) $(-1)^n \cdot n$

(C) $-\frac{1}{n}$

(D) $1 + n^2$

Resolução, pg. 19

Exame nacional de 2015 - 2.ª fase

Resoluções

Resolução da pergunta 1

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1

$$\begin{cases} u_6 + u_{20} = -5 \\ u_{19} = 4u_7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 5r + u_1 + 19r = -5 \\ u_1 + 18r = 4\left(u_1 + 6r\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -\frac{5}{2} - 12r \\ -3u_1 - 6r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ \frac{15}{2} + 36r - 6r = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ r = -\frac{15}{60} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -\frac{5}{2} + 3 \\ r = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ r = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Assim $S_{16} = \dfrac{u_1 + u_{16}}{2} \times 16 = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 15 \times \left(-\frac{1}{4}\right)}{2} \times 16 = -22.$

Resolução da pergunta 2

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1

A subsucessão dos números ímpares é $2 + \dfrac{1}{n}$.

$$\frac{83}{41} \leq 2 + \frac{1}{n} \leq \frac{67}{33} \Leftrightarrow \frac{1}{41} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{33} \Leftrightarrow 33 \leq n \leq 41.$$

Os números ímpares compreendidos entre 33 e 41 são $33, 35, 37, 39$ e 41.
Temos portanto 5 termos de ordem ímpar.

Resolução da pergunta 3

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1

Notemos que
$$v_8 = v_5 \times r^3 \Leftrightarrow r^3 = \frac{108}{4} \Leftrightarrow r = 3.$$
Assim, $v_6 = v_5 \times r = 4 \times 3 = 12$.
A opção correta é a **(A)**.

Resolução da pergunta 4

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Para $n < 10$ temos $1 \leq v_n \leq 9$.
Para $n \geq 10$, como $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{10}$ então $1 < 1 + \frac{1}{n} \leq \frac{11}{10}$.
Assim, $1 \leq v_n \leq 9, \ \forall n \in \mathbb{N}$ e podemos concluir que a sucessão (v_n) é limitada.
A opção correta é a **(C)**.

Resolução da pergunta 5

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

$$\begin{cases} u_7 = 2u_2 \\ S_{12} = 57 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6r = 2\,(u_1 + r) \\ \frac{u_1+u_{12}}{2} \times 12 = 57 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4r \\ u_1 + u_{12} = \frac{57}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ u_1 + u_1 + 11r = \frac{57}{6} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4r \\ 8r + 11r = \frac{57}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ r = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Consequentemente,

$$u_n = u_1 + (n-1)r = 2 + (n-1) \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2} + \frac{3}{2}.$$
$$u_n = 500 \Leftrightarrow \frac{n}{2} + \frac{3}{2} = 500 \Leftrightarrow n = 1000 - 3 \Leftrightarrow n = 997.$$

Podemos concluir que a ordem do termo 500 é 997.

Resolução da pergunta 6

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{8(n+1)-4}{n+2} - \frac{8n-4}{n+1} \\
&= \frac{(8n+4)(n+1)-(8n-4)(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{8n^2+8n+4n+4-(8n^2+16n-4n-8)}{(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{12}{(n+2)(n+1)}.
\end{aligned}
$$

Como $12 > 0$ e $(n+2)(n+1) > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ então $\dfrac{12}{(n+2)(n+1)} > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Temos portanto $u_{n+1} - u_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ e podemos concluir que (u_n) é monótona crescente.

Resolução da pergunta 7

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Uma vez que:

- 2, a e b são três termos consecutivos de uma progressão geométrica, então $\dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{a}$;
- $a - 2$, b e 2 são três termos consecutivos de uma progressão aritmética então $b - (a - 2) = 2 - b$.

Vamos determinar os valores de a e b através da resolução do sistema seguinte.

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} \dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{a} \\ b - (a - 2) = 2 - b \end{cases} \overset{a \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (2b)^2 = 2b \\ 2b = a \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} 4b^2 - 2b = 0 \\ --- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(2b - 1) = 0 \\ --- \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} b = 0 \vee b = \frac{1}{2} \\ --- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Como, por hipótese, $a \neq 0$ e $b \neq 0$ então $a = 1$ e $b = \frac{1}{2}$.

Resolução da pergunta 8

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Como $r > 1$ e $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, a sucessão (a_n) é monótona crescente.
Sejam a_p e a_{p+1} dois termos consecutivos da sucessão.

$$\begin{cases} a_p + a_{p+1} = 12 \\ a_{p+1} - a_p = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_p + r \times a_p = 12 \\ r \times a_p - a_p = 3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_p = \frac{12}{1+r} \\ a_p(r-1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ \frac{12r-12-3-3r}{1+r} = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ 9r - 15 = 0 \wedge r \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_p = \frac{9}{2} \\ r = \frac{5}{3}. \end{cases}$$

Podemos concluir que a razão é igual a $\frac{5}{3}$.

Resolução da pergunta 9

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

$u_3 = 4 \Leftrightarrow u_1 + 2r = 4 \Leftrightarrow u_1 = 4 - 2r$.

$$\begin{aligned} S_{12} = 174 &\Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{12}}{2} \times 12 = 174 \\ &\Leftrightarrow u_1 + u_1 + 11r = 29 \\ &\Leftrightarrow 8 - 4r + 11r = 29 \\ &\Leftrightarrow r = 3. \end{aligned}$$

Logo, $u_n = u_3 + (n-3) \times 3 = 3n - 5$.
$u_n = 5371 \Leftrightarrow 3n = 5376 \Leftrightarrow n = 1792$.
Como $1792 \in \mathbb{N}$, podemos concluir que 5371 é termo da sucessão (u_n).

Resolução da pergunta 10

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Como a, $a+6$ e $a+18$ são três termos consecutivos de uma progressão geométrica então

$$\frac{a+6}{a}=\frac{a+18}{a+6}\Leftrightarrow\frac{(a+6)^2-(a+18)a}{a(a+6)}=0$$
$$\Leftrightarrow -6a=-36\wedge a(a+6)\neq 0\Leftrightarrow a=6.$$

Logo a razão da progressão geométrica é $\frac{6+6}{6}=2$.
Por outro lado,

$$S_7=381\Leftrightarrow a_1\times\frac{1-2^7}{1-2}=381\Leftrightarrow a_1=3.$$

Temos portanto que o primeiro termo é 3.

Resolução da pergunta 11

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

Numa progressão geométrica (u_n) de razão r temos é temos $u_n = u_k \times r^{n-k}$.
Logo,

$$u_8 = u_4 \times r^{8-4} \Leftrightarrow r^4 = \frac{8192}{32} \Leftrightarrow r = \pm\sqrt[4]{256} \Leftrightarrow r = \pm 4$$

e podemos concluir que

$$u_n = u_4 \times 4^{n-4} = 32 \times 4^{n-4}$$

e que $u_5 = 32 \times 4^{5-4} = 128$.
A opção correta é a (B).

Resolução da pergunta 12

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

Como para $n \leq 20$ temos $1 \leq u_n \leq 20$ e para $n > 20$ temos $-1 \leq u_n \leq 1$ então $-1 \leq u_n \leq 20, \forall n \in \mathbb{N}$.
A opção correta é a (C).

Resolução da pergunta 13

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

Como

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1-(n+1)}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$$

então (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$

A opção correta é a (B).

Resolução da pergunta 14

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

Trata-se de uma sucessão definida por recorrência.
$u_2 = -3u_1 + 2 = -3a + 2$; $u_3 = -3u_2 + 2 = -3(-3a + 2) + 2 = 9a - 4$.
A opção correta é a **(B)**.

Resolução da pergunta 15

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

Como $-1 \leq -\frac{1}{n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$ podemos concluir que $u_n = -\frac{1}{n}$ é o termo geral de uma sucessão limitada.
Por outro lado, como

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -\frac{1}{n+1} - \left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{-n+n+1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} > 0, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

podemos concluir que (u_n) é uma sucessão monótona crescente.
A opção correta é a (C).