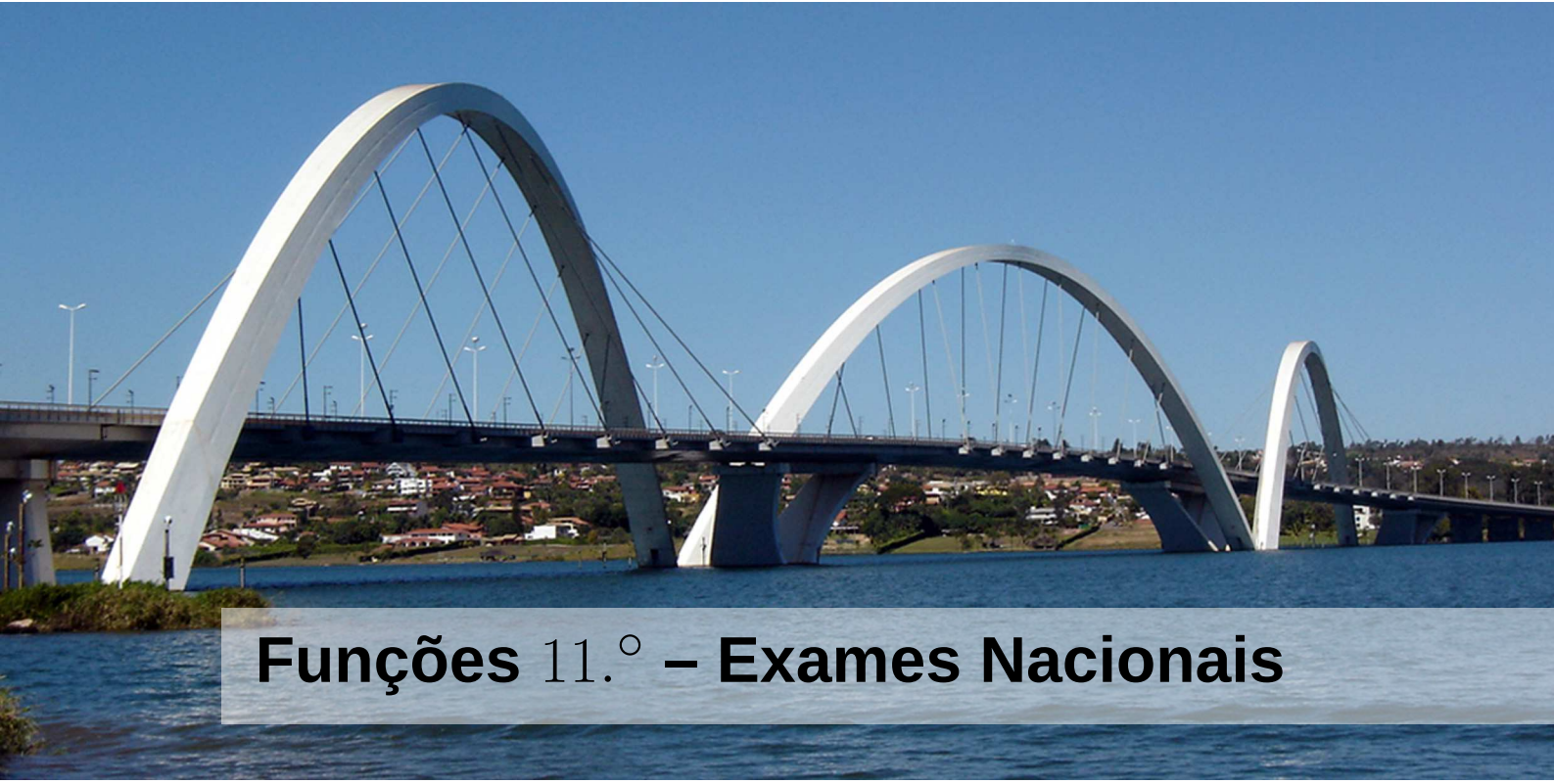
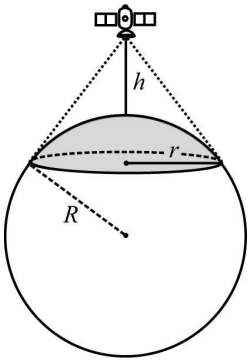


Funções $11.^{\circ}$ – Exames Nacionais

Perguntas de Exames Nacionais dos últimos 15 anos com resolução e/ou vídeo.
Versão de 9 de janeiro de 2022.
Verifique se existe versão com data mais recente aqui e aceda a mais fichas aqui.

1. Os satélites artificiais são utilizados para diversos fins e a altitude a que são colocados depende do fim a que se destinam.
Admita que a Terra é uma esfera.
A Figura 2 apresenta um esquema em que se pode observar a superfícieterrestre coberta por um satélite, quando este se encontra numa certaposição.
Nesta figura,



- R é o raio, em quilómetros, da Terra;
- h é a altitude, em quilómetros, do satélite ($h > 0$);
- r é o raio, em quilómetros, da base da calote esférica cuja superfície é coberta pelo satélite ($0 < r < R$);
- as grandezas h e r podem relacionar-se por meio da igualdade $r = \frac{R}{h+R}\sqrt{h^2 + 2hR}$.

Sabe-se que, para cada posição do satélite, a percentagem da área da superfície terrestre coberta pelo satélite é dada por $50\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}\right)$.

1.1 Qual é a percentagem da área da superfície terrestre coberta por um satélite se o raio da base da calote esférica for igual a $\frac{3}{5}$ do raio da Terra?

(A) 20% **(B)** 15% **(C)** 10% **(D)** 5%

1.2 Considere que o raio da Terra é $6400\ km$.
Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a percentagem da área

da superfície terrestre coberta por um satélite se a altitude deste for igual ao raio da base da respetiva calote esférica.
Apresente o resultado arredondado às unidades.
Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.
Na sua resposta:
– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;
– apresente o valor pedido arredondado às unidades.
Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

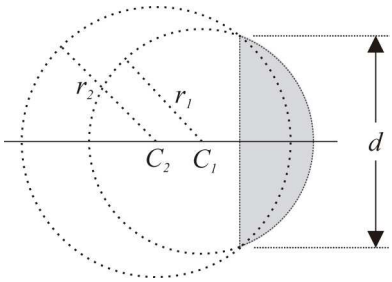
Resolução, pg. 10

Exame nacional de 2020 - 2.ª fase

2. Uma lente de contato é um meio transparente limitado por duas faces, sendo cada uma delas parte deuma superfície esférica. Na figura, pode observar-se uma lente de contato.



Na figura em baixo, está representado um corte longitudinal de duas superfícies esféricas, uma de centro C_1 e raio r_1 e outra de centro C_2 e raio r_2, com $r_2 > r_1$, que servem de base à construção de uma lente de contato, representada a sombreado na figura.
Seja $x = \overline{C_1C_2}$.Sabe-se que o diâmetro, d, da lente é dado por



$$\frac{\sqrt{\left[(r_1+r_2)^2-x^2\right]\left[x^2-(r_1-r_2)^2\right]}}{x},$$

com $r_2 - r_1 < x < \sqrt{r_2^2 - r_1^2}$.
Uma lente de contato foi obtida a partir de duas superfícies esféricas com $7\ mm$ e $8\ mm$ de raio, respetivamente.
O diâmetro dessa lente excede em $9\ mm$ a distância, x, entre os centros das duas superfícies esféricas.
Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de x, sabendo-se que esse valor é único no intervalo $\left]r_2 - r_1, \sqrt{r_2^2 - r_1^2}\right[$.
Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.
Na sua resposta:
– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora

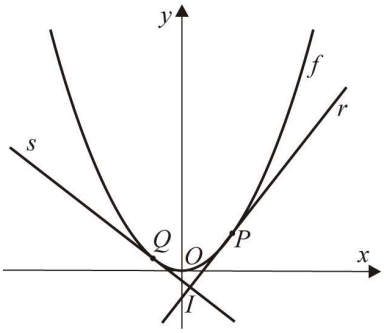
que lhe permite(m) resolver a equação;
– apresente o valor pedido em milímetros, arredondado às décimas.

Resolução, pg. 12

Exame nacional de 2019 - 1.ª fase

3. Na figura, está representado o gráfico da função f, definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = x^2$.
Considere que um ponto P, de abcissa positiva, se desloca sobre o gráfico da função f.
Para cada posição do ponto P, seja:

- r a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto;
- s a reta perpendicular a r e tangente ao gráfico de f;
- Q o ponto de tangência da reta s com o gráfico de f;
- I o ponto de intersecção das retas r e s.



Mostre que, qualquer que seja a abcissa do ponto P, a ordenada do ponto I é sempre igual a $-\frac{1}{4}$.
Sugestão: Designe a abcissa do ponto P por a.

Resolução, pg. 11

Exame nacional de 2019 - 2.ª fase

4. Na Figura 1, está representado o gráfico de uma função f, de domínio $[-1, 6]$, e, na Figura 2, está representada parte do gráfico de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$.
Tal como as figuras sugerem, em ambas as funções, todos os objetos inteiros têm imagens inteiras.

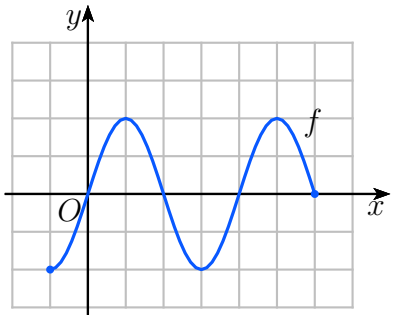


Figura 1

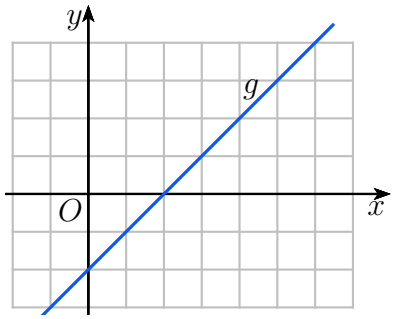


Figura 2

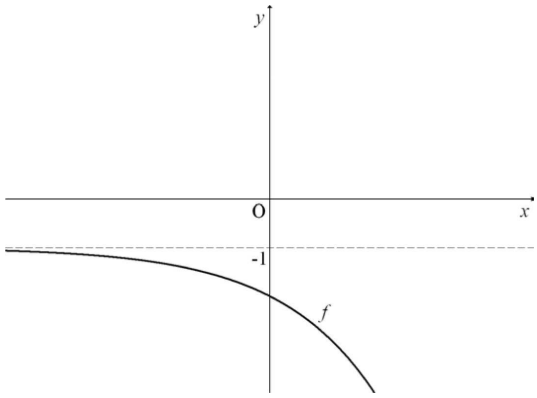
Quais são os zeros da função $g \circ f$? (o símbolo $\circ$ designa a composição de funções)

(A) 0 e 4 **(B)** 1 e 5 **(C)** -1 e 3 **(D)** 2 e 6

Resolução, pg. 13

Exame nacional de 2016 - 2.ª fase

5. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sendo $y = -1$ a única assíntota do seu gráfico.



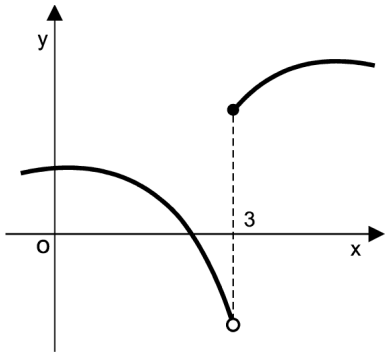
Qual é o valor do $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{f(x)}$?

(A) $-\infty$ **(B)** -3 **(C)** -1 **(D)** 3

Resolução, pg. 15

Exame nacional de 2008 - 2.ª fase

6. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função f, real de variável real.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

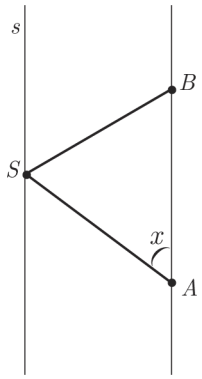
(A) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ **(B)** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{2}$

(C) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{f(x)} = -\dfrac{1}{2}$ **(D)** Não existe $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{f(x)}$

Resolução, pg. 10

Exame nacional de 2007 - 2.ª fase

7. Na figura ao lado estão representadas duas retas paralelas, a reta AB (em que A e B são pontos fixos) e a reta s.



O ponto S é um ponto móvel, deslocando-se ao longo de toda a reta s.
Para cada posição do ponto S, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo BAS e seja $a(x)$ a área do triângulo $[ABS]$.
Apenas um dos seguintes gráficos pode representar a função a.
Numa composição, explique por que razão cada um dos outros três gráficos não pode representar a função a.

Gráfico 1

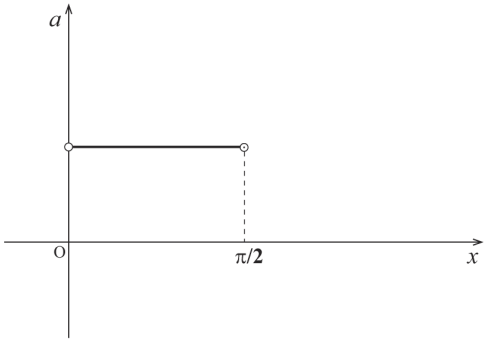


Gráfico 2

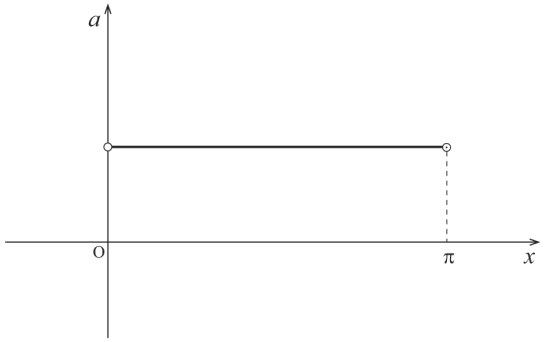


Gráfico 3

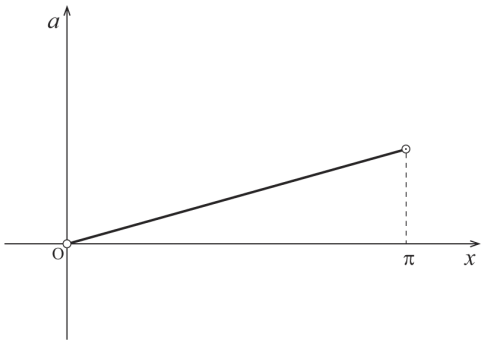
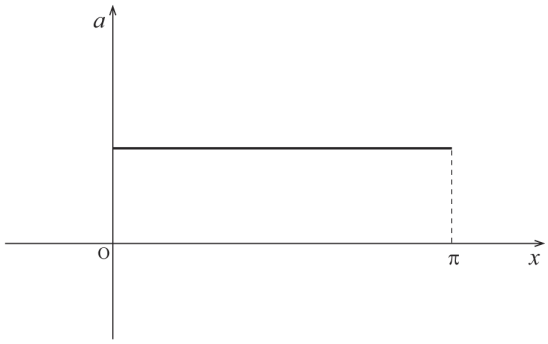


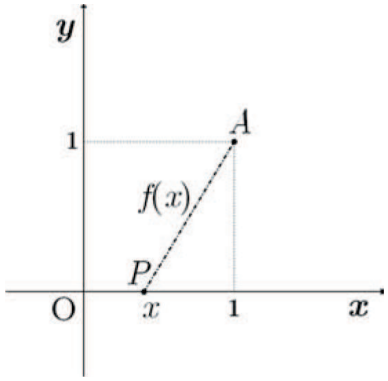
Gráfico 4



Resolução, pg. 16

Exame nacional de 2008 - 2.ª fase

8. Considere o ponto $A(1, 1)$, representado na figura.



Admita que um ponto, P, parte da origem O do referencial e se desloca ao longo do semi-eixo positivo Ox. Para cada posição do ponto P, seja x a abcissa de P.
Seja f a função que, a cada valor de x, faz corresponder a distância do ponto P ao ponto A.
Apenas um dos seguintes gráficos pode representar a função f.
Numa pequena composição, explique por que razão cada um dos outros três gráficos não pode representar a função f.

Gráfico 1

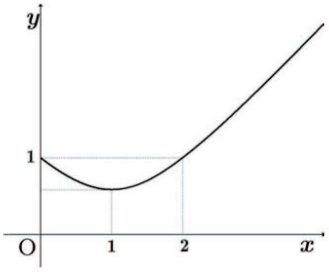


Gráfico 2

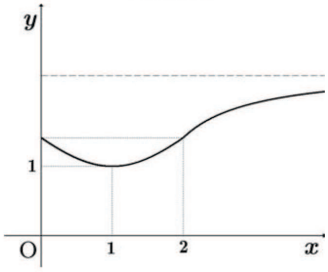


Gráfico 3

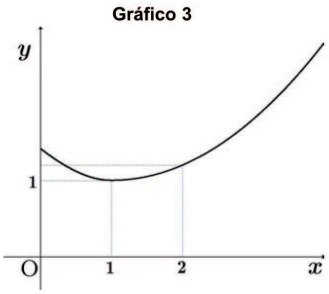
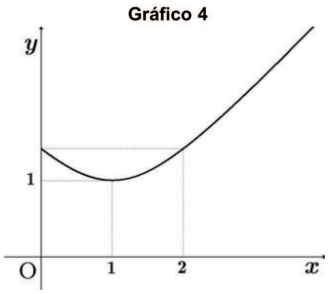


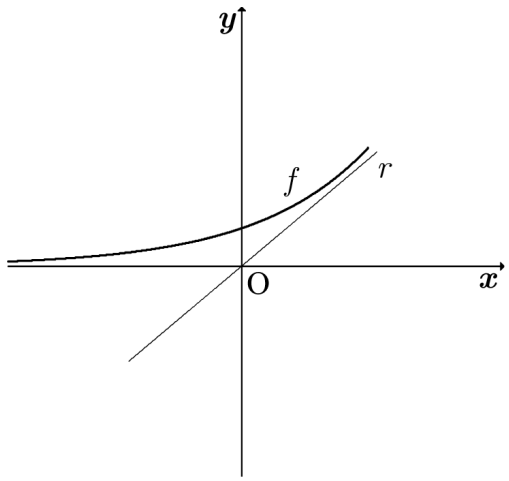
Gráfico 4



Resolução, pg. 14

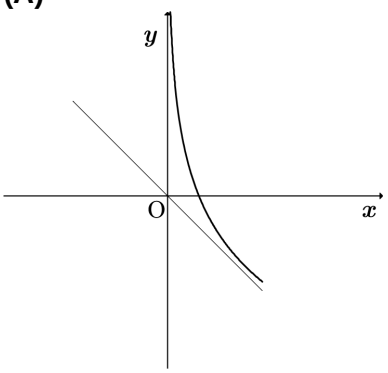
Exame nacional de 2009 - 1.ª fase

9. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função f e a reta r de equação $y = x$.

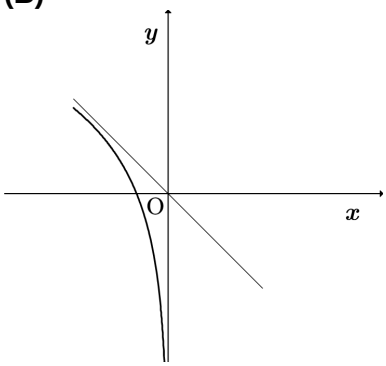


Qual das figuras seguintes pode ser parte do gráfico da função f^{-1}, função inversa de f?

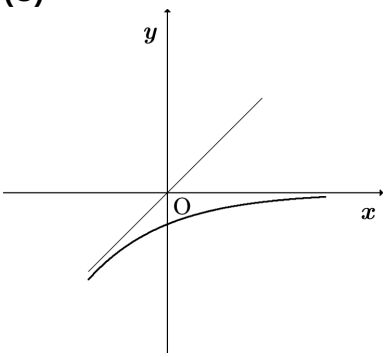
(A)



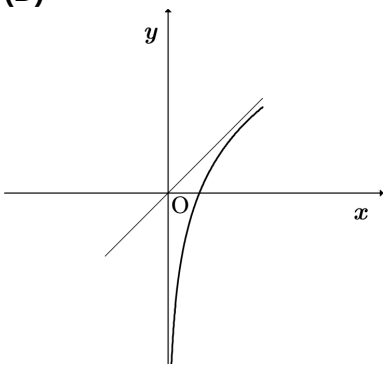
(B)



(C)



(D)



Resolução, pg. 17

Época especial de 2008

10. Identifique o valor de $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{4 - x^2}$.

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** $+\infty$ **(D)** $-\infty$

Resolução, pg. 21

Exame nacional de 2007 - 1.ª fase

11. Considere um retângulo cuja área é igual a 5.
Qual das seguintes expressões representa o perímetro deste retângulo, em função do comprimento, x, de um dos seus lados?

(A) $2x + \frac{10}{x}$ **(B)** $2x + \frac{2x}{5}$ **(C)** $2x + \frac{5}{x}$ **(D)** $x + \frac{5}{x}$

Resolução, pg. 19

Exame nacional de 2007 - 2.ª fase

12. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.
Sabe-se que 3 é um zero da função f.
Seja g a função definida por $g(x) = f(x-1) + 4$, para qualquer número real x.
Qual dos seguintes pontos pertence garantidamente ao gráfico da função g?

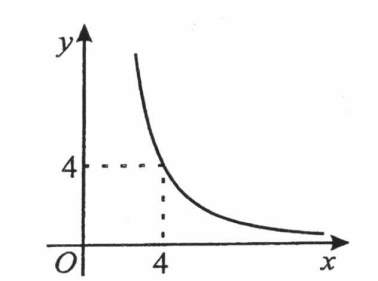
(A) $(2, 4)$ **(B)** $(4, 4)$ **(C)** $(2, 8)$ **(D)** $(1, 7)$

Resolução, pg. 20

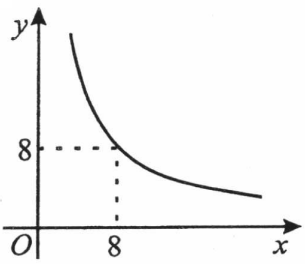
Exame nacional de 2007 - 1.ª fase

13. Pretende-se construir um prisma quadrangular regular com $64\ cm^3$ de volume.
A altura y do prisma, medida em cm, depende do comprimento x da aresta da base, medido igualmente em cm.
Qual dos gráficos seguintes traduz corretamente a relação entre estas duas variáveis?

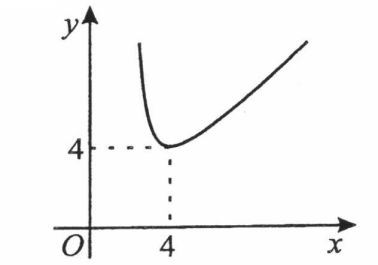
(A)



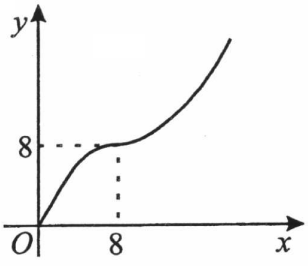
(B)



(C)



(D)



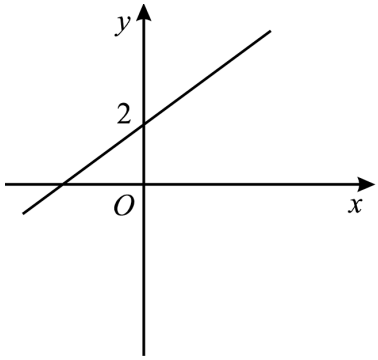
Resolução, pg. 24

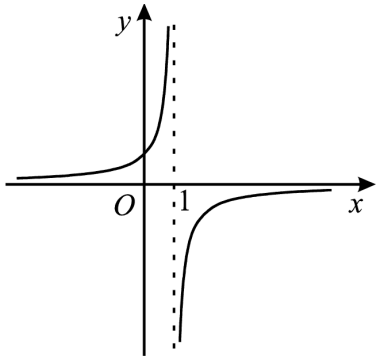
Exame nacional de 2006 - 1.ª fase

14. De duas funções, f e g sabe-se que:

- o gráfico de f é uma reta, cuja ordenada na origem é igual a 2;
- o gráfico de g é uma hipérbole.

Nas figuras seguintes estão representadas parte dessa reta e parte dessa hipérbole.





A reta de equação $x = 1$ é assíntota do gráfico de g.

Indique o valor de $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

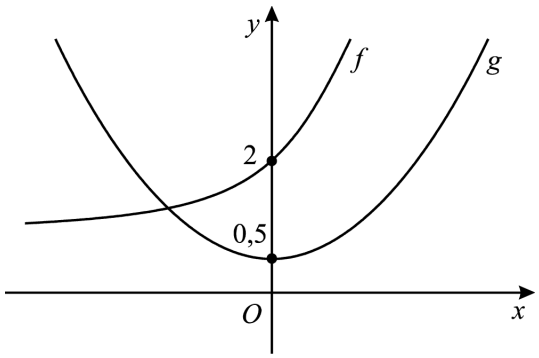
(A) 0 **(B)** 2 **(C)** $+\infty$ **(D)** $-\infty$

Resolução, pg. 22

Exame nacional de 2006 - $2.^{\text{a}}$ fase

15. Na figura estão representadas, em referencial o.n. xOy, partes dos gráficos de duas funções, f e g, contínuas em $\mathbb{R}$.
Tal como a figura sugere,

- nenhum dos gráficos interseta o eixo Ox;
- os gráficos de g e de f intersetam o eixo Oy nos pontos de ordenadas $0{,}5$ e 2, respetivamente.



Apenas uma das equações seguintes é impossível. Qual delas?

(A) $f(x) + g(x) = 0$ **(B)** $f(x) - g(x) = 0$

(C) $f(x) \times g(x) = 1$ **(D)** $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

Resolução, pg. 23

Exame nacional de 2006 - $1.^{\text{a}}$ fase

Resoluções

Resolução da pergunta 1

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1

1.1 Vídeo da resolução:

Como $r = \frac{3}{5}R$ então

$$50\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}\right) = 50\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{\frac{3}{5}R}{R}\right)^2}\right)$$
$$= 50\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\right) = 50\left(1-\frac{4}{5}\right) = 10.$$

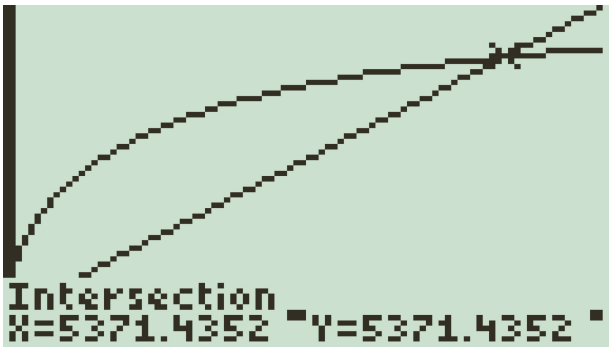
A opção correta é a **(C)**.

1.2 Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

$R = 6400$.

$$h = r \Rightarrow r = \frac{6400}{r+6400}\sqrt{r^2+2r\times 6400} \Leftrightarrow r = \frac{6400}{r+6400}\sqrt{r^2+12800r}.$$

Recorrendo à calculadora gráfica obtemos os gráficos das funções definidas por $y = r$ e $y = \frac{6400}{r+6400}\sqrt{r^2+12800r}$ e uma aproximação do seu ponto de interseção no intervalo $]0, 6400[$.



Podemos concluir que $r \approx 5371.44$.
Como

$$50\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{5371.44}{6400}\right)^2}\right) \approx 23$$

podemos concluir que a percentagem da área da superfície terrestre coberta pelo satélite é aproximadamente 23%.

Resolução da pergunta 3

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Seja a a abcissa do ponto P.
Como $f'(x) = 2x$ então $f'(a) = 2a$ é o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a. A sua equação reduzida é da forma $y = 2ax + b$, onde $b \in \mathbb{R}$.
Substituindo as coordenadas do ponto de tangência $(a, f(a)) = (a, a^2)$ nesta equação temos

$$a^2 = 2a \times a + b \Leftrightarrow b = -a^2.$$

Podemos concluir que a equação reduzida da reta r é $y = 2ax - a^2$.
Uma vez que a reta s é perpendicular à reta r então o seu declive é $-\frac{1}{2a}$.
Vamos agora determinar uma equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f com declive $-\frac{1}{2a}$.
A sua equação reduzida é da forma $y = -\frac{1}{2a}x + b',\ b' \in \mathbb{R}$.
Como

$$f'(x) = -\frac{1}{2a} \Leftrightarrow 2x = -\frac{1}{2a} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4a},$$

a sua abcissa é $-\frac{1}{4a}$.
$\left(-\frac{1}{4a}, f\left(-\frac{1}{4a}\right)\right) = \left(-\frac{1}{4a}, \frac{1}{16a^2}\right)$ são as coordenadas do respetivo ponto de tangência. Substituindo na equação da reta tangente temos

$$\frac{1}{16a^2} = -\frac{1}{2a} \times \left(-\frac{1}{4a}\right) + b' \Leftrightarrow b' = -\frac{1}{16a^2}.$$

Podemos concluir que a equação reduzida da reta s é $y = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2}$.
A solução do sistema seguinte vai-nos dar as coordenadas do ponto I, de interseção das retas r e s.

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 2ax - a^2 \\ y = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} --- \\ 2ax - a^2 = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} --- \\ -16a^4 + 1 = -8ax - 32a^3x \wedge a \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} --- \\ x = \frac{1-16a^4}{-8a(4a^2+1)} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} --- \\ x = \frac{(1-4a^2)(1+4a^2)}{-8a(4a^2+1)} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2a} \times \frac{1-4a^2}{-8a} - \frac{1}{16a^2} \\ x = \frac{1-4a^2}{-8a} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{1}{4} \\ x = \frac{1-4a^2}{-8a} \end{array} \right.$$

Concluímos deste modo que a ordenada do ponto I é sempre $-\frac{1}{4}$.

Voltar ao enunciado da pergunta

Resolução da pergunta 2

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

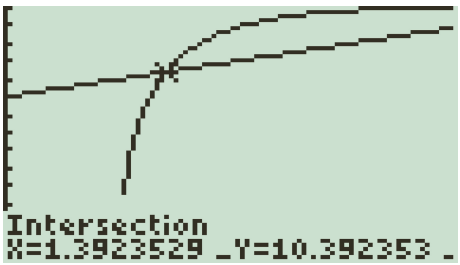
Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

O problema pode ser equacionado com $d = x + 9$.Como $r_1 = 7$ e $r_2 = 8$ temos

$$\begin{aligned} & d = x + 9 \\ \Leftrightarrow & \frac{\sqrt{\left[(7+8)^2 - x^2\right]\left[x^2 - (7-8)^2\right]}}{x} = x + 9 \\ \Leftrightarrow & \frac{\sqrt{(225 - x^2)(x^2 - 1)}}{x} = x + 9 \end{aligned}$$

e $\left]r_2 - r_1, \sqrt{r_2^2 - r_1^2}\right[= \left]1, \sqrt{15}\right[$.

Introduzindo na calculadora gráfica as expressões $y = \frac{\sqrt{(225-x^2)(x^2-1)}}{x}$ e $y = x + 9$ e recorrendo às suas potencialidades, obtemos os gráficos seguintes e o seu ponto de interseção no intervalo $\left]1, \sqrt{15}\right[$.



Podemos concluir que $x \approx 1.4$.

Resolução da pergunta 4

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

Observamos no gráfico de g que 2 é o único zero de g. Consequentemente, $g(2) = 0$ e

$$g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5.$$

A opção correta é a (B).

Resolução da pergunta 8

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 5

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 7

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 9

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 7

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 6

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 11

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 8

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 12

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 8

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 10

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 7

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 14

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 9

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 15

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 9

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 13

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 8

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):