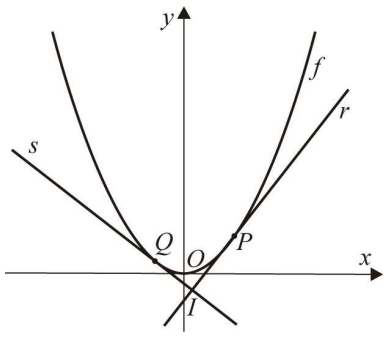


Derivadas do 11.° – Exames Nacionais

Perguntas de Exames Nacionais dos últimos 15 anos com resolução e/ou vídeo.
Versão de 9 de janeiro de 2022.
Verifique se existe versão com data mais recente aqui e aceda a mais fichas aqui.

1. Na figura, está representado o gráfico da função f, definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = x^2$.
Considere que um ponto P, de abcissa positiva, se desloca sobre o gráfico da função f.
Para cada posição do ponto P, seja:

- r a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto;
- s a reta perpendicular a r e tangente ao gráfico de f;
- Q o ponto de tangência da reta s com o gráfico de f;
- I o ponto de intersecção das retas r e s.



Mostre que, qualquer que seja a abcissa do ponto P, a ordenada do ponto I é sempre igual a $-\frac{1}{4}$.
Sugestão: Designe a abcissa do ponto P por a.

Resolução, pg. 7

Exame nacional de 2019 - 2.ª fase

2. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função tal que $f'(x) < 0$, para qualquer número real positivo x.
Considere, num referencial o.n. xOy,

- um ponto P, de abcissa a, pertencente ao gráfico de f;
- a reta r, tangente ao gráfico de f no ponto P;

- o ponto Q, ponto de intersecção da reta r com o eixo Ox.

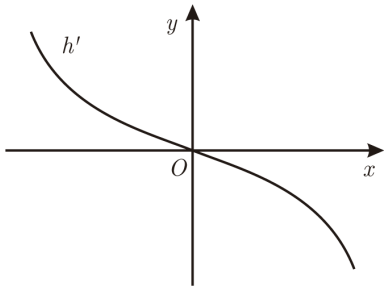
Sabe-se que $\overline{OP} = \overline{PQ}$.

Determine o valor de $f'(a) + \dfrac{f(a)}{a}$.

Resolução, pg. 8

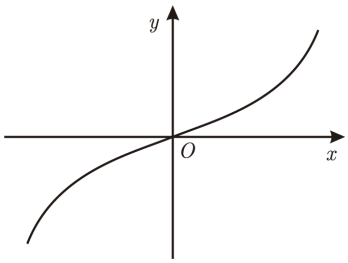
Exame nacional de 2017 - 2.ª fase

3. Na figura, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico de uma função h', primeira derivada de h.

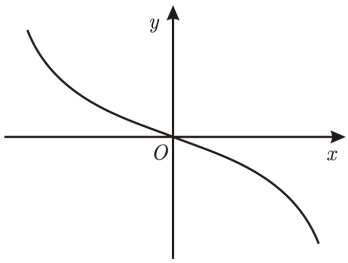


Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função h?

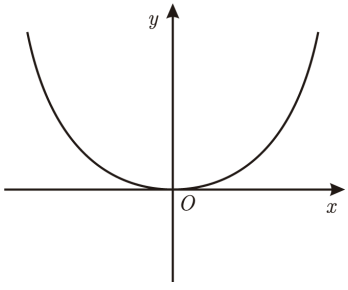
(A)



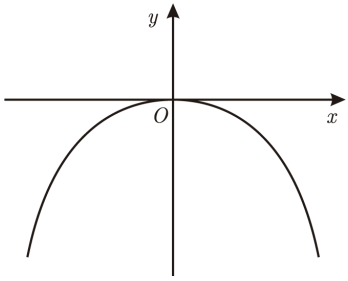
(B)



(C)



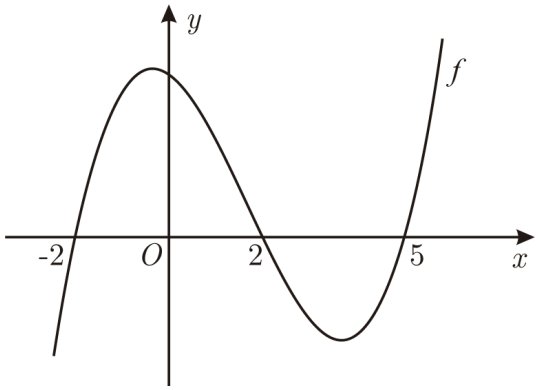
(D)



Resolução, pg. 10

Exame nacional de 2011 - Época especial

4. Na figura, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f de grau 3, de domínio $\mathbb{R}$.



Sabe-se que:

- -2, 2 e 5 são zeros de f;
- f' representa a função derivada de f.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

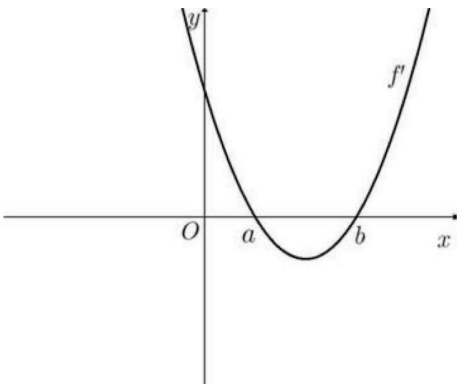
(A) $f'(0) \times f'(6) = 0$ **(B)** $f'(-3) \times f'(6) < 0$

(C) $f'(-3) \times f'(0) > 0$ **(D)** $f'(0) \times f'(6) < 0$

Resolução, pg. 9

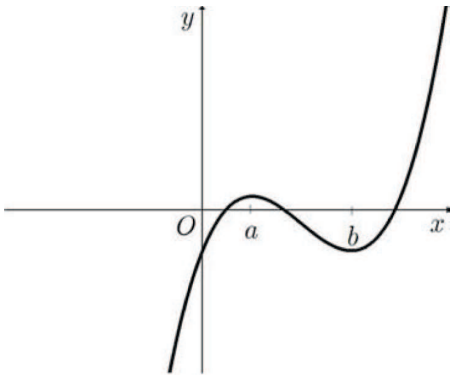
Exame nacional de 2011 - 1.ª fase

5. Na figura, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função derivada, f', de uma função f.

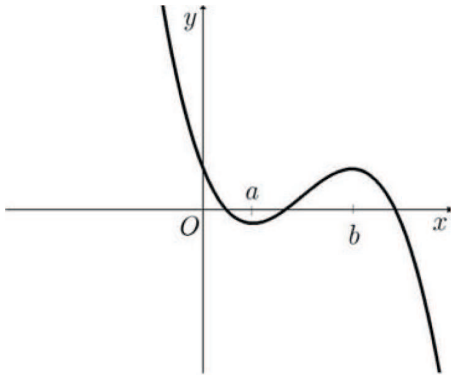


Em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f?

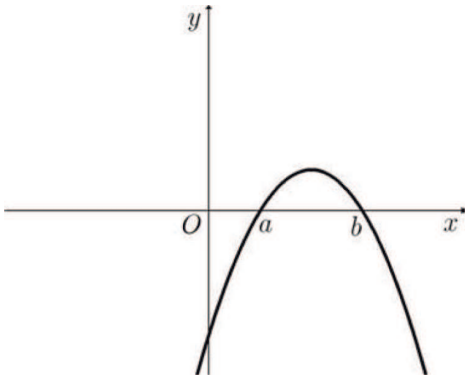
(A)



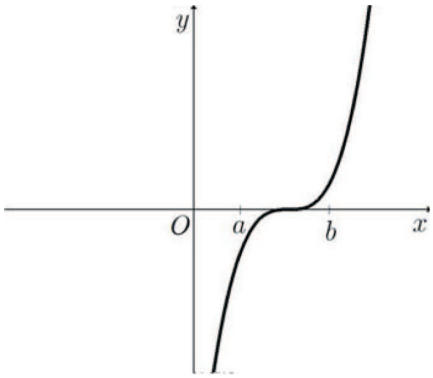
(B)



(C)



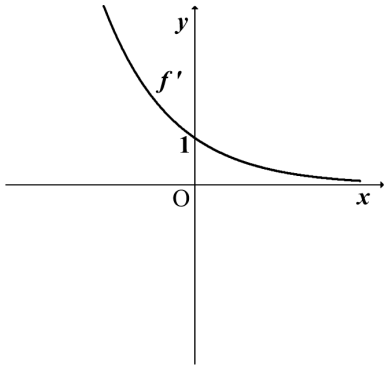
(D)



Resolução, pg. 11

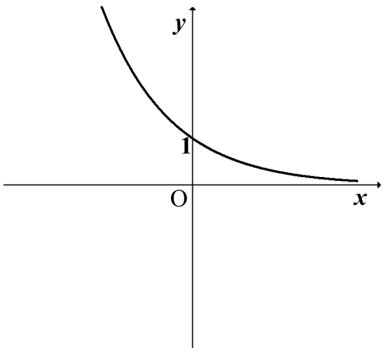
Exame nacional de 2010 - Época especial

6. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função f', derivada de f, ambas de domínio $\mathbb{R}$, em que o eixo Ox é uma assíntota do gráfico de f'.
Seja a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) + x$.

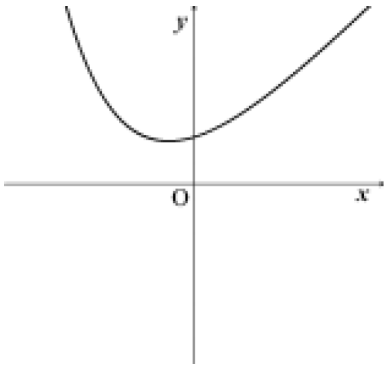


Qual das figuras seguintes pode representar parte do gráfico da função g', derivada de g?

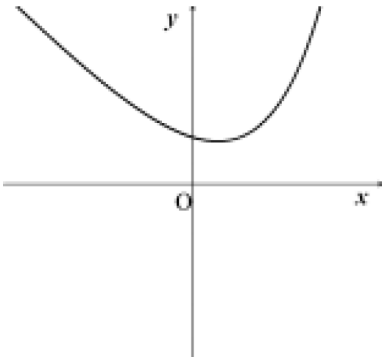
(A)



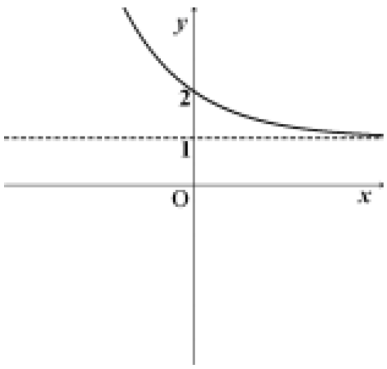
(B)



(C)



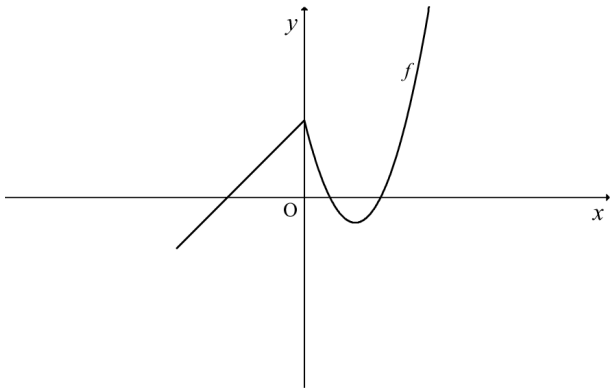
(D)



Resolução, pg. 12

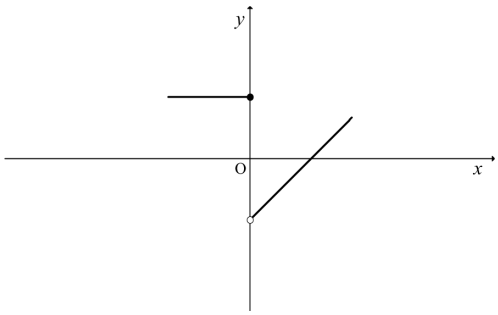
Exame nacional de 2009 - 2.ª fase

7. A figura representa parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}$.

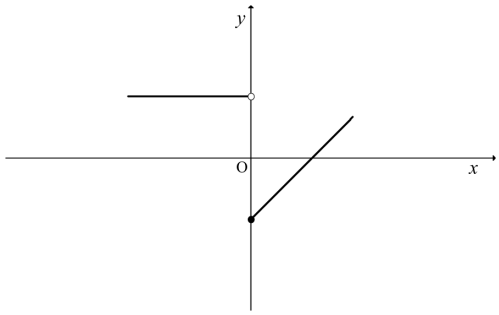


Em qual das figuras seguintes pode estar parte da representação gráfica de f', derivada de f?

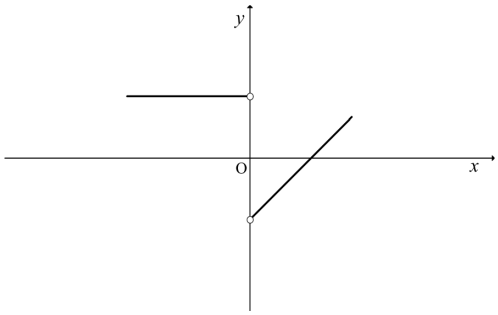
(A)



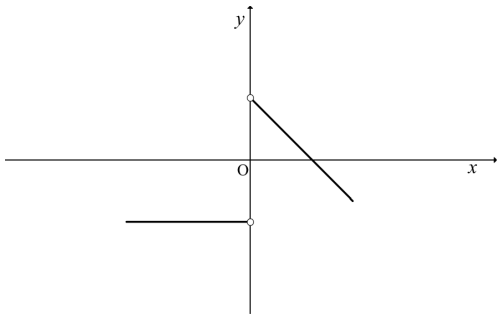
(B)



(C)



(D)



Resolução, pg. 13

Exame nacional de 2008 - 1.ª fase

Resoluções

Resolução da pergunta 1

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Seja a a abcissa do ponto P.
Como $f'(x) = 2x$ então $f'(a) = 2a$ é o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a. A sua equação reduzida é da forma $y = 2ax + b$, onde $b \in \mathbb{R}$.
Substituindo as coordenadas do ponto de tangência $(a, f(a)) = (a, a^2)$ nesta equação temos

$$a^2 = 2a \times a + b \Leftrightarrow b = -a^2.$$

Podemos concluir que a equação reduzida da reta r é $y = 2ax - a^2$.
Uma vez que a reta s é perpendicular à reta r então o seu declive é $-\frac{1}{2a}$.
Vamos agora determinar uma equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f com declive $-\frac{1}{2a}$.
A sua equação reduzida é da forma $y = -\frac{1}{2a}x + b',\ b' \in \mathbb{R}$.
Como

$$f'(x) = -\frac{1}{2a} \Leftrightarrow 2x = -\frac{1}{2a} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4a},$$

a sua abcissa é $-\frac{1}{4a}$.
$\left(-\frac{1}{4a}, f\left(-\frac{1}{4a}\right)\right) = \left(-\frac{1}{4a}, \frac{1}{16a^2}\right)$ são as coordenadas do respetivo ponto de tangência. Substituindo na equação da reta tangente temos

$$\frac{1}{16a^2} = -\frac{1}{2a} \times \left(-\frac{1}{4a}\right) + b' \Leftrightarrow b' = -\frac{1}{16a^2}.$$

Podemos concluir que a equação reduzida da reta s é $y = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2}$.
A solução do sistema seguinte vai-nos dar as coordenadas do ponto I, de interseção das retas r e s.

$$\left\{\begin{array}{l} y = 2ax - a^2 \\ y = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} --- \\ 2ax - a^2 = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} --- \\ -16a^4 + 1 = -8ax - 32a^3x \wedge a \neq 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} --- \\ x = \frac{1-16a^4}{-8a(4a^2+1)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} --- \\ x = \frac{(1-4a^2)(1+4a^2)}{-8a(4a^2+1)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -\frac{1}{2a} \times \frac{1-4a^2}{-8a} - \frac{1}{16a^2} \\ x = \frac{1-4a^2}{-8a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -\frac{1}{4} \\ x = \frac{1-4a^2}{-8a} \end{array}\right.$$

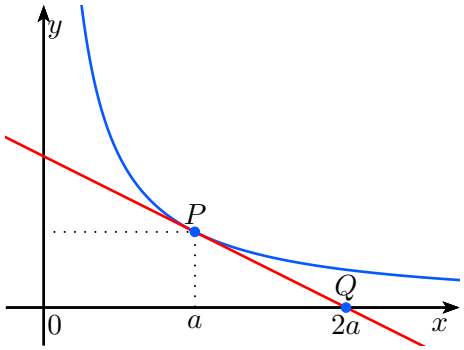
Concluímos deste modo que a ordenada do ponto I é sempre $-\frac{1}{4}$.

Voltar ao enunciado da pergunta

Resolução da pergunta 2

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1

Comecemos por notar que como $f'(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ então f é decrescente em $\mathbb{R}^+$. A título meramente ilustrativo, consideremos o gráfico da seguinte figura.



A hipótese de $\overline{OP} = \overline{PQ}$ traduz-se no facto de o triângulo $[OPQ]$ ser isósceles. Consequentemente, a abcissa de Q é o dobro da de P. O declive da reta PQ é portanto $m = \dfrac{0 - f(a)}{2a - a} = -\dfrac{f(a)}{a}$. Logo, $f'(a) = -\dfrac{f(a)}{a}$ e

$$f'(a) + \frac{f(a)}{a} = -\frac{f(a)}{a} + \frac{f(a)}{a} = 0.$$

Resolução da pergunta 4

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 3

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 5

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 6

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 7

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):