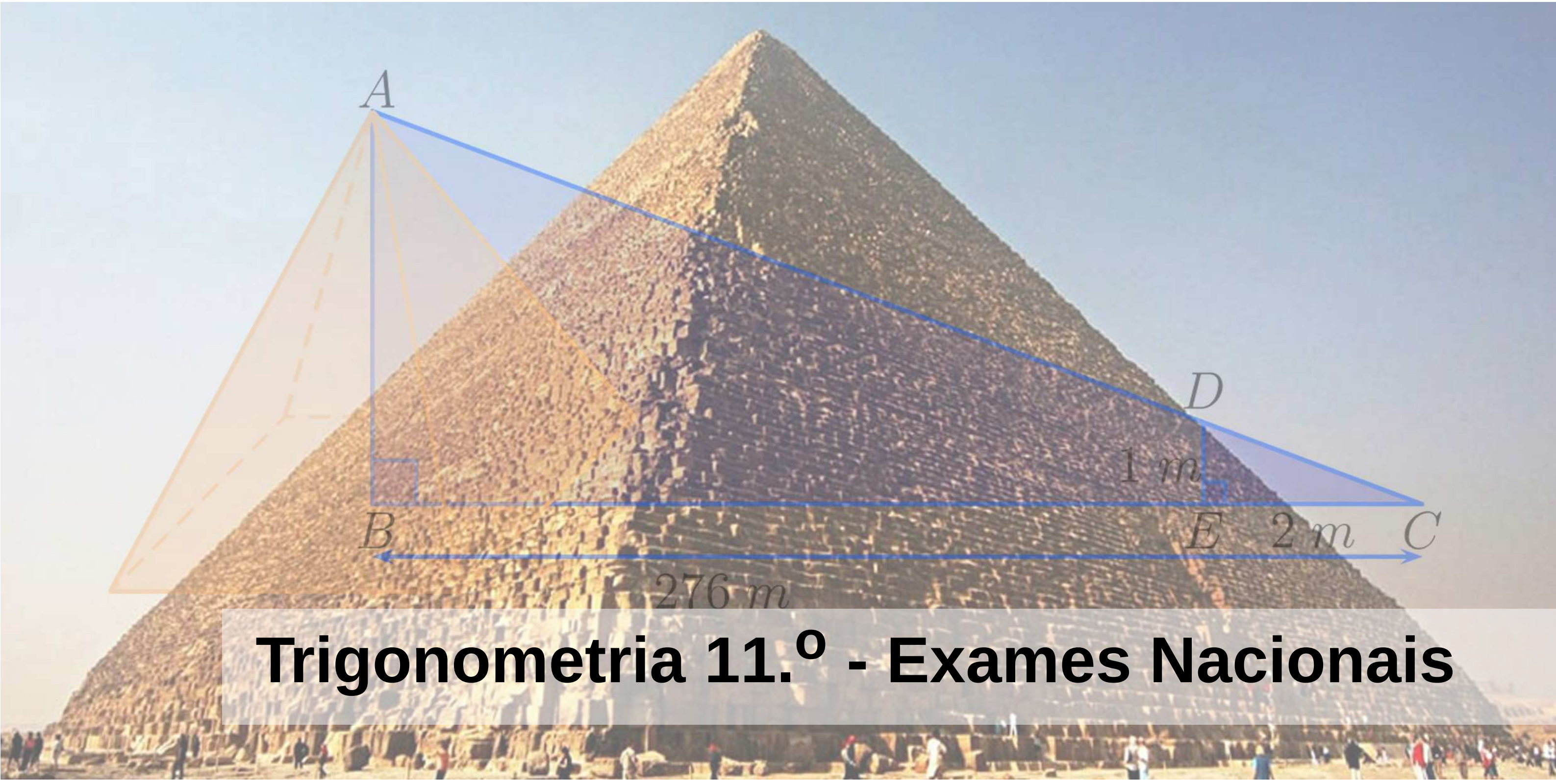


Trigonometria 11.º - Exames Nacionais

Perguntas de Exames Nacionais dos últimos 16 anos com resolução e/ou vídeo.
Versão de 9 de janeiro de 2022.
Verifique se existe versão com data mais recente aqui e aceda a mais fichas aqui.

1. Considere, para um certo número real positivo k, as funções f e g, de domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, definidas por $f(x) = k\operatorname{sen}(2x)$ e $g(x) = k\cos x$.
Sejam, num referencial ortonormado do plano, A, B e C os pontos de intersecção dos gráficos de f e g, sendo A o ponto de menor abcissa e C o ponto de maior abcissa.
Sabe-se que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B.
Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de k.

Resolução, pg. 13 Exame nacional de 2021 - 1.ª fase

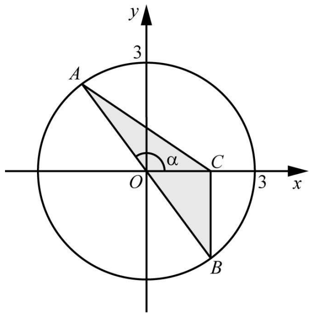
2. Sabe-se que $\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{5}$ e que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) + 2\cos\left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)$.
Apresente o resultado na forma $\frac{a\sqrt{b}}{c}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{N}$.

Resolução, pg. 14 Exame nacional de 2021 - 2.ª fase

3. Na figura, estão representados, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro em O e raio 3 e o triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro da circunferência;
- α é a inclinação da reta AB $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$;
- o ponto C pertence ao semieixo positivo Ox;
- a reta BC é paralela ao eixo Oy.



Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada pela expressão $-9 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$

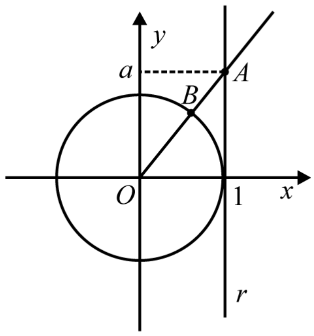
Resolução, pg. 15

Exame nacional de 2021 - 1.ª fase

4. Na figura, estão representados, num referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica, a reta r de equação $x = 1$, e um ponto A, de ordenada a $(a > 1)$, pertencente à reta r.

Está também representada a semirreta $\dot{O}A$, que interseta a circunferência trigonométrica no ponto B.

Qual das expressões seguintes dá, em função de a, a abcissa do ponto B?



(A) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$

(B) $\sqrt{a^2+1}$

(C) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}$

(D) $\sqrt{a^2-1}$

Resolução, pg. 16

Exame nacional de 2020 - 1.ª fase

5. O mecanismo de manivela-biela é composto por uma manivela de comprimento fixo, que efetua um movimento de rotação (sempre no mesmo sentido), e por uma biela, também de comprimento fixo, que transforma esse movimento de rotação no movimento alternado de translação de um pistão.

Na Figura 1, está representado esse mecanismo.

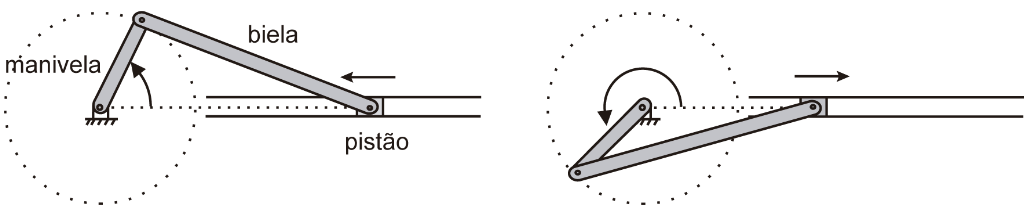


Figura 1

Na Figura 2, está representado um esquema do mecanismo descrito.

Relativamente a esta figura, sabe-se que:

- o ponto P representa o pistão;
- o segmento de reta $[OM]$ representa a manivela, que tem $1\ cm$ de comprimento;
- o segmento de reta $[MP]$ representa a biela;

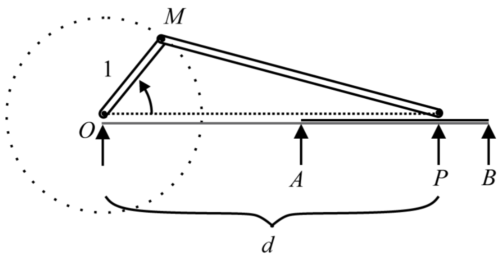


Figura 2

- os pontos A e B são os pontos em que a distância do pistão ao centro de rotação da manivela, O, é mínima e máxima, respetivamente;
- os pontos O, A, P e B são colineares.

Sabe-se que o movimento de rotação da manivela se inicia quando o pistão se encontra na posição B e que a manivela descreve voltas completas a uma frequência angular constante. Admita que a função que dá, em centímetros, a distância do pistão ao ponto O, em função do tempo, t, em segundos, contado a partir do instante em que é iniciado o movimento, é dada por

$$d(t) = \cos t + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2 t},\ t \geq 0$$

(o argumento das funções seno e cosseno está expresso em radianos).
Qual é, em centímetros, o comprimento da biela neste mecanismo?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5

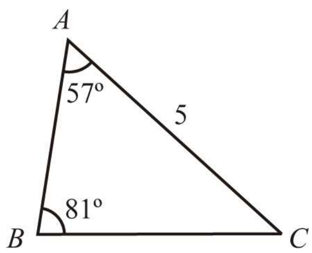
Resolução, pg. 17

Exame nacional de 2020 - 1.ª fase

6. Na figura, está representado um triângulo $[ABC]$.
Sabe-se que:

- $\overline{AC} = 5$;
- $B\hat{A}C = 57°$;
- $A\hat{B}C = 81°$.

Qual é o valor de $\overline{AB}$, arredondado às centésimas?



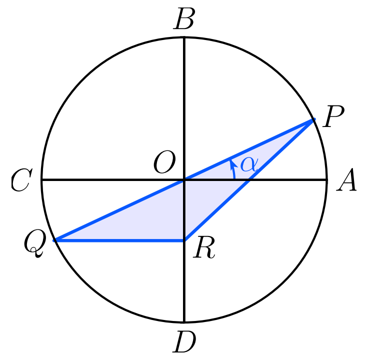
(A) 3.31 **(B)** 3.35 **(C)** 3.39 **(D)** 3.43

Resolução, pg. 19

Exame nacional de 2018 - 2.ª fase

7. Na figura, está representada uma circunferência de centro no ponto O e raio 1.
Sabe-se que:

- os diâmetros $[AC]$ e $[BD]$ são perpendiculares;
- o ponto P pertence ao arco AB;
- $[PQ]$ é um diâmetro da circunferência;
- o ponto R pertence a $[OD]$ e é tal que $[QR]$ é paralelo a $[AC]$.



Seja α a amplitude em radianos, do ângulo AOP $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

Qual das expressões seguintes dá a área do triângulo $[PQR]$, representado a sombreado, em função de α?

(A) $\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{4}$ **(B)** $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2}$ **(C)** $\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2}$ **(D)** $\sin\alpha\cos\alpha$

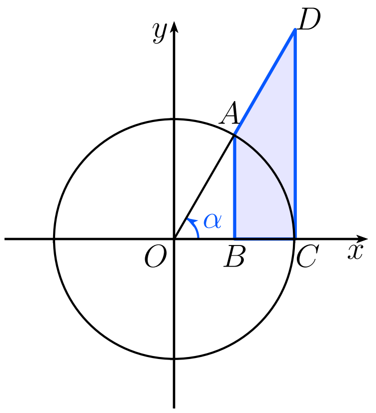
Resolução, pg. 18

Exame nacional de 2017 - 1.ª fase

8. Na figura, está representada a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao primeiro quadrante e à circunferência;
- o ponto B pertence ao eixo Ox
- o ponto C tem coordenadas $(1, 0)$
- o ponto D pertence à semirreta $\dot{O}A$
- os segmentos de reta $[AB]$ e $[DC]$ são paralelos ao eixo Oy.



Seja α a amplitude do ângulo $C\hat{O}D$ $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

Qual das expressões seguintes dá a área do quadrilátero $[ABCD]$, representado a sombreado, em função de α?

(A) $\frac{\tan\alpha}{2} - \sin\alpha\cos\alpha$ **(B)** $\frac{\tan\alpha}{2} - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2}$

(C) $\tan\alpha - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2}$ **(D)** $\tan\alpha - \sin\alpha\cos\alpha$

Resolução, pg. 26

Exame nacional de 2015 - 1.ª fase

9. De um triângulo, sabe-se que os comprimentos dos seus lados são 4, 5 e 6.
Seja α a amplitude do maior ângulo interno desse triângulo.
Qual é o valor de $\operatorname{sen}\alpha$, arredondado às milésimas?

(A) 0.989 **(B)** 0.992 **(C)** 0.995 **(D)** 0.998

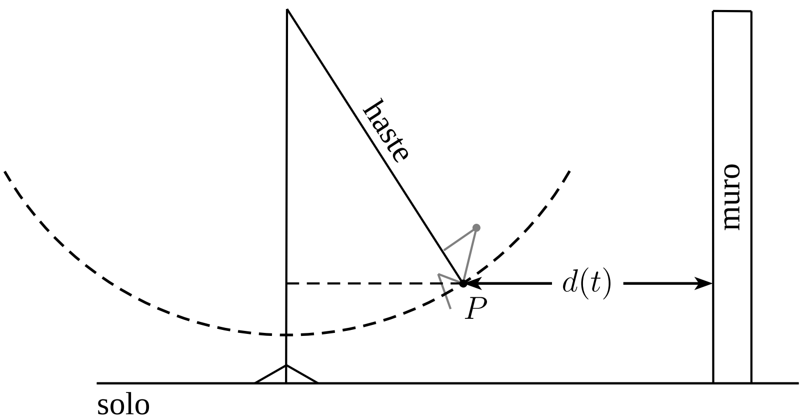
Resolução, pg. 20 Exame nacional de 2019 - 2.ª fase

10. Qual é a solução da equação $2\cos x + 1 = 0$ no intervalo $[-\pi, 0]$?

(A) $-\frac{5\pi}{6}$ **(B)** $-\frac{2\pi}{3}$ **(C)** $-\frac{\pi}{3}$ **(D)** $-\frac{\pi}{6}$

Resolução, pg. 21 Exame nacional de 2019 - 1.ª fase

11. Num jardim, uma criança está a andar num baloiço cuja cadeira está suspensa por duas hastes rígidas.
Atrás do baloiço, há um muro que limita esse jardim.
A figura esquematiza a situação. O ponto P representa a posição da cadeira.



Num determinado instante, em que a criança está a dar balanço, é iniciada a contagem do tempo.
Doze segundos após esse instante, a criança deixa de dar balanço e procura parar o baloiço arrastando os pés no chão.
Admita que a distância, em decímetros, do ponto P ao muro, t segundos após o instante inicial, é dada por

$$d(t) = \begin{cases} 30 + t\sin(\pi t) & \text{se } 0 \leq t < 12 \\ 30 + 12e^{12-t}\sin(\pi t) & \text{se } x \geq 12 \end{cases}$$

(o argumento da função seno está expresso em radianos)
Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o número de soluções da equação

$d(t) = 27$ no intervalo $[0, 6]$, e interprete o resultado no contexto da situação descrita.
Na sua resposta, reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema.

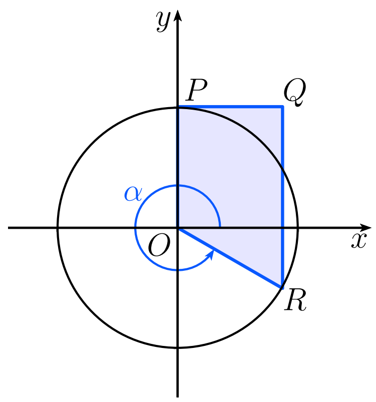
Resolução, pg. 22

Exame nacional de 2016 - 2.ª fase

12. Na figura, estão representados a circunferência trigonométrica e um trapézio retângulo $[OPQR]$.

Sabe-se que:

- o ponto P tem coordenadas $(0, 1)$
- o ponto R pertence ao quarto quadrante e à circunferência.



Seja α a amplitude de um ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}R$.
Qual das expressões seguintes dá a área do trapézio $[OPQR]$, em função de α?

(A) $\frac{\cos\alpha}{2} + \sin\alpha\cos\alpha$

(B) $\frac{\cos\alpha}{2} - \sin\alpha\cos\alpha$

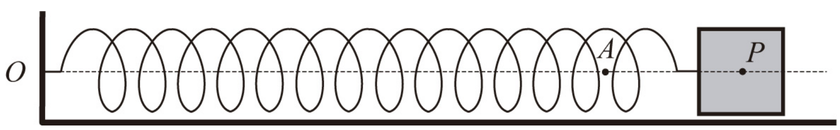
(C) $\cos\alpha + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2}$

(D) $\cos\alpha - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2}$

Resolução, pg. 23

Exame nacional de 2016 - 1.ª fase

13. Um cubo encontra-se em movimento oscilatório provocado pela força elástica exercida por uma mola.
A figura esquematiza esta situação. Nesta figura, os pontos O e A são pontos fixos. O ponto P representa o centro do cubo e desloca-se sobre a semirreta $\dot{O}A$.



Admita que não existe qualquer resistência ao movimento.
Sabe-se que a distância, em metros, do ponto P ao ponto O é dada por

$$d(t) = 1 + \frac{1}{2}\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right).$$

A variável t designa o tempo, medido em segundos, que decorre desde o instante em que foi iniciada a contagem do tempo ($t \in [0, +\infty[$).
Resolva o item seguinte sem recorrer à calculadora.

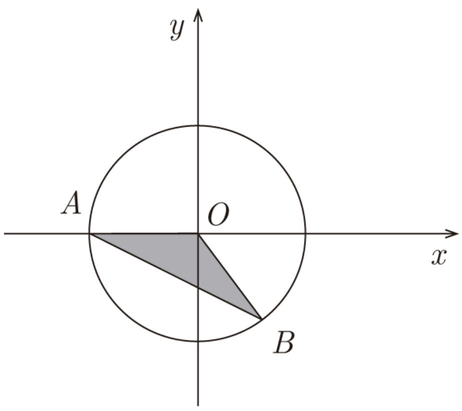
No instante em que se iniciou a contagem do tempo, o ponto P coincidia com o ponto A.
Durante os primeiros três segundos do movimento, o ponto P passou pelo ponto A mais do que uma vez.
Determine os instantes, diferentes do inicial, em que tal aconteceu.
Apresente os valores exatos das soluções, em segundos.

Resolução, pg. 25

Exame nacional de 2015 - 2.ª fase

14. Na figura, estão representados, num referencial o.n. xOy, uma circunferência e o triângulo $[OAB]$.
Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- a circunferência tem centro no ponto O e raio 1;
- A é o ponto de coordenadas $(-1, 0)$;
- B pertence à circunferência e tem ordenada negativa;
- o ângulo AOB tem amplitude igual a $\dfrac{2\pi}{3}$ radianos.



Qual é a área do triângulo $[OAB]$?

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ **(B)** $\dfrac{1}{2}$ **(C)** $\dfrac{1}{4}$ **(D)** $\sqrt{3}$

Resolução, pg. 24

Exame nacional de 2011 - Época especial

15. Admita que, numa certa marina, a profundidade da água, em metros, t horas após as zero horas de um certo dia, é dada por $P(t) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}t\right) + 8$, em que $t \in [0, 24]$.
Resolva o item seguinte, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.
Determine a profundidade da água da marina às três horas da tarde, desse dia.

Resolução, pg. 29

Exame nacional de 2010 - Época especial

16. Um depósito de combustível tem a forma de uma esfera.
A Figura 1 e a Figura 2 representam dois cortes do mesmo depósito, com alturas de combustível distintas. Os cortes são feitos por um plano vertical que passa pelo centro da esfera.

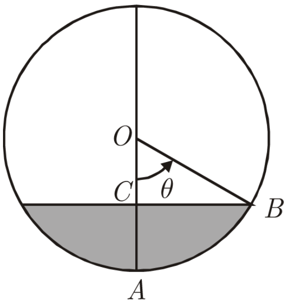


Figura 1

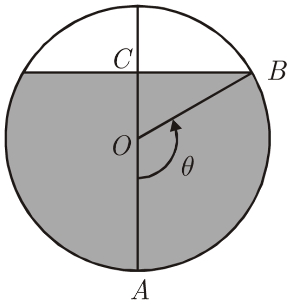


Figura 2

Sabe-se que:

- o ponto O é o centro da esfera;
- a esfera tem 6 metros de diâmetro;
- a amplitude θ, em radianos, do arco AB é igual à amplitude do ângulo ao centro AOB correspondente.

A altura AC, em metros, do combustível existente no depósito é dada, em função de θ, por h, de domínio $[0, \pi]$.
Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

16.1 Mostre que $h(\theta) = 3 - 3\cos(\theta)$, para qualquer $\theta \in]0, \pi[$.

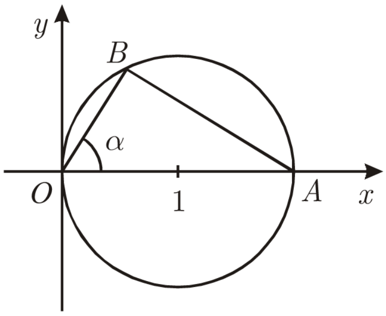
16.2 Resolva a condição $h(\theta) = 3$, $\theta \in]0, \pi[$.
Interprete o resultado obtido no contexto da situação apresentada.

Resolução, pg. 27

Exame nacional de 2010 - 2.ª fase

17. Na figura, estão representados, num referencial o.n. xOy, uma circunferência e o triângulo $[OAB]$.
Sabe-se que:

- a circunferência tem diâmetro $[OA]$;
- o ponto A tem coordenadas $(2, 0)$;
- o vértice O do triângulo $[OAB]$ coincide com a origem do referencial;
- o ponto B desloca-se ao longo da semicircunferência superior.



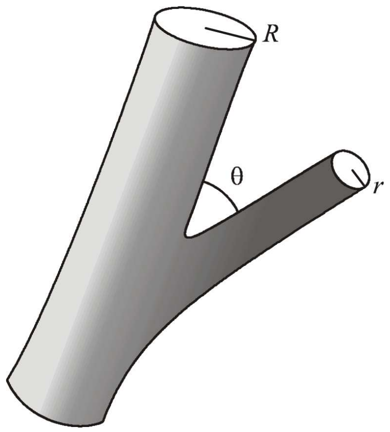
Para cada posição do ponto B, seja α a amplitude do ângulo AOB, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Resolva o item seguinte, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.Mostre que o perímetro do triângulo $[OAB]$ é dado, em função de α, por

$$f(\alpha) = 2(1 + \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha).$$

Resolução, pg. 28

Exame nacional de 2010 - 1.ª fase

18. Na figura seguinte está representada uma artéria principal do corpo humano, cuja secção é um círculo com raio R, e uma sua ramificação, mais estreita, cuja secção é um círculo com raio r.



A secção da artéria principal tem área A e a da ramificação tem área a.
Seja $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ a amplitude, em radianos, do ângulo que a artéria principal faz com a sua ramificação (medida relativamente a duas geratrizes complanares dos dois cilindros).
Sabe-se que $a = A\sqrt{\cos\theta}$.
Admitindo que o modelo descrito se adequa com exatidão à situação real, determine θ no caso em que os raios referidos verificam a relação $R = \sqrt[4]{2}r$.

Resolução, pg. 30

Exame nacional de 2007 - 2.ª fase

19. Seja $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 3 - 2\cos x$.
Indique o valor de x para o qual $f(x)$ é máximo.

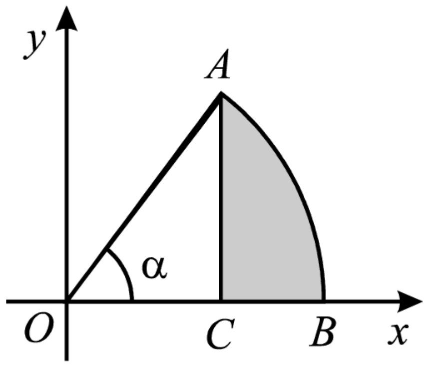
(A) 0 **(B)** $\frac{\pi}{2}$ **(C)** π **(D)** $\frac{3\pi}{2}$

Resolução, pg. 31

Exame nacional de 2007 - 2.ª fase

20. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, um arco AB, que está contido na circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$.

O ponto C pertence ao eixo Ox e o segmento de reta $[AC]$ é perpendicular a este eixo.
α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB.
Qual é a expressão que dá o perímetro da região sombreada, em função de α?



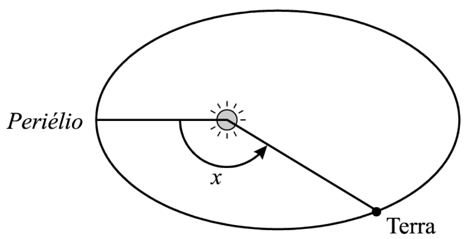
(A) $\pi\alpha + \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha$
(B) $\pi\alpha + \operatorname{sen}\alpha + 1 - \cos\alpha$
(C) $1 + \alpha - \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha$
(D) $1 + \alpha + \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha$

Resolução, pg. 33

Exame nacional de 2006 - 2.ª fase

21. Como sabe, a Terra descreve uma órbita elíptica em torno do Sol.

Na figura está representado um esquema dessa órbita.
Está assinalado o *periélio*, o ponto da órbita da Terra mais próximo do Sol.
Na figura está assinalado um ângulo de amplitude x radianos($x \in [0, 2\pi[$).



Este ângulo tem o seu vértice no Sol, o seu lado origem passa no *periélio* e o seu lado extremidade passa na Terra.
A distância d, em milhões de quilómetros, da Terra ao Sol, é (aproximadamente) dada, em função de x por $d = 149{,}6\,(1 - 0{,}0167\cos x)$.
Sabe-se que x verifica a relação $\frac{2\pi}{T} = x - 0{,}0167\operatorname{sen} x$, em que

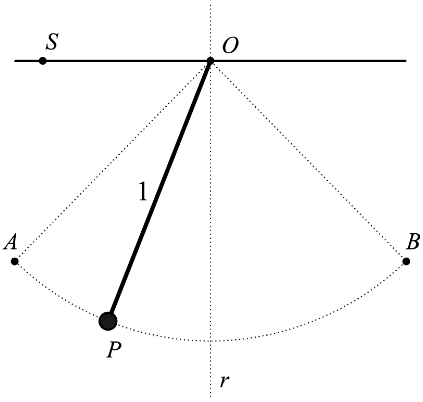
- t é o tempo, em dias, que decorre desde a passagem da Terra pelo periélio até ao instante em que atinge a posição correspondente ao ângulo x;
- T é o tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa ($365{,}24$ dias).

Mostre que, para $x = \pi$, se tem $t = \frac{T}{2}$.
Interprete este resultado no contexto da situação descrita.

Resolução, pg. 32

Exame nacional de 2006 - 2.ª fase

22. Na figura está representada uma esfera suspensa de um fio com 1 metro de comprimento, fixo no ponto O.



O centro da esfera oscila entre os pontos A e B, que são simétricos relativamente à reta vertical r.
A reta r passa pelo ponto O e é perpendicular à reta OS.
No instante inicial, o centro da esfera coincide com o ponto A.
Admita que, t segundos após esse instante inicial, o centro da esfera está num ponto P tal que a amplitude, em radianos, do ângulo SOP é dada (aproximadamente) por

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\cos\left(\sqrt{9{,}8}\,t\right).$$

Nas duas alíneas seguintes, **não utilize a calculadora**, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos.

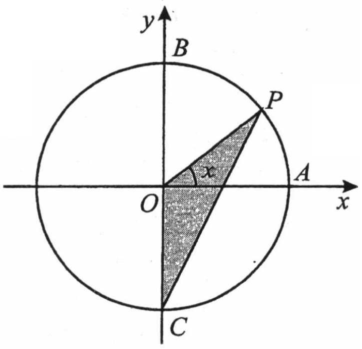
22.1 Determine a distância do centro da esfera à reta OS, no instante inicial.

22.2 Determine o instante em que o centro da esfera passa pela primeira vez na reta r. Apresente o resultado em segundos, arredondado às décimas.

Resolução, pg. 34

Exame nacional de 2006 - 1.ª fase

23. Na figura junta, está representado o círculo trigonométrico.
Os pontos A, B e C têm coordenadas $(1,0)$, $(0,1)$ e $(0,-1)$, respetivamente.
O ponto P desloca-se ao longo do arco AB, nunca coincidindo com o ponto B.
Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude do ângulo AOP, e seja $f(x)$ a área do triângulo $[OPC]$.
Qual das expressões seguintes define a função f?



(A) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{2}$ **(B)** $\dfrac{\cos x}{2}$ **(C)** $\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2}$ **(D)** $\dfrac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{2}$

Resolução, pg. 36

Exame nacional de 2006 - 1.ª fase, Época especial

24. Considere a expressão $f(x) = A + B\cos(Cx)$. Sempre que se atribuem valores reais positivos a A, B e C, obtemos uma função de domínio $\mathbb{R}$.

24.1 Prove que $\dfrac{2\pi}{C}$ é período de qualquer função definida por uma expressão do tipo indicado.

24.2 Num certo rio, existe um ancoradouro para atracagem de barcos. A distância do ancoradouro ao fundo do rio varia com a maré.
Admita que, num certo dia, a distância do ancoradouro ao fundo do rio, x horas depois das zero horas desse dia, pode ser modelada por uma função do tipo

$$f(x) = A + B\cos(Cx),$$

com $x \in [0, 24[$.
Admita ainda que, no intervalo de tempo $[0, 24[$:

- a distância máxima do ancoradouro ao fundo do rio é de 17 metros, e a mínima é de 11 metros;
- ocorrem apenas duas marés altas, uma às 0 horas e outra às 12 horas;
- ocorrem apenas duas marés baixas, uma às 6 horas e outra às 18 horas.

Justifique que, no modelo $f(x) = A + B\cos(Cx)$, se tem $C = \dfrac{\pi}{6}$; (tenha em conta a alínea **24.1** e o facto de que não existe nenhum período positivo inferior a $\dfrac{2\pi}{C}$).
Em seguida, determine os valores de A e B (positivos) adequados ao modelo.

Resolução, pg. 35

Exame nacional de 2006 - 1.ª fase, Época especial

Resoluções

Resolução da pergunta 1

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1

Comecemos por determinar as abcissas dos pontos de interseção dos gráficos de f e g.

$$
\begin{aligned}
&f(x) = g(x) \Leftrightarrow k\,\text{sen}\,(2x) = k\cos x \overset{k>0}{\Leftrightarrow} \text{sen}\,(2x) = \text{sen}\,\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\\
&\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Vamos agora atribuir valores inteiros a k em cada uma das duas famílias de soluções de modo a encontrar as soluções pertencentes ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
No caso de $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$,

- para $k = -2$ temos $x = -\frac{7\pi}{2} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- para $k = -1$ temos $x = -\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- para $k = 0$ temos $x = \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- para $k = 1$ temos $x = \frac{5\pi}{6} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Podemos concluir que esta família admite as soluções $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{6}$ no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
No caso de $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$,

- para $k = -1$ temos $x = -\frac{3\pi}{2} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- para $k = 0$ temos $x = \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- para $k = 1$ temos $x = \frac{5\pi}{2} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Podemos concluir que esta família admite a solução $\frac{\pi}{2}$ no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Deste modo, $A\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $B\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}k\right)$ e $C\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.
Como o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B temos

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3}\pi, -\frac{\sqrt{3}}{2}k\right) \cdot \left(\frac{\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}k\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \frac{-2\pi^2}{9} + \frac{3}{4}k^2 = 0 \Leftrightarrow k^2 = \frac{8\pi^2}{27} \Leftrightarrow k = \pm\frac{2\sqrt{6}}{9}\pi.
\end{aligned}
$$

Como $k > 0$, podemos concluir que $k = \frac{2\sqrt{6}}{9}\pi$.

Resolução da pergunta 2

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1

$$\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{5}\Leftrightarrow-\cos\alpha=-\frac{1}{5}\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{1}{5}.$$

$\mathrm{tg}(\pi-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha$.
$\cos\left(-\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left(-\frac{7\pi}{2}+4\pi+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{sen}\alpha$.
Logo,

$$\mathrm{tg}(\pi-\alpha)+2\cos\left(-\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=-\mathrm{tg}\alpha-2\operatorname{sen}\alpha.$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow\operatorname{sen}^2\alpha+\frac{1}{25}=1\Leftrightarrow\operatorname{sen}\alpha=\pm\frac{\sqrt{24}}{5}\Leftrightarrow\operatorname{sen}\alpha=\pm\frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

$\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\frac{2\sqrt{6}}{5}}{\frac{1}{5}}=2\sqrt{6}.$
Consequentemente

$$-\mathrm{tg}\alpha-2\operatorname{sen}\alpha=-2\sqrt{6}-\frac{4\sqrt{6}}{5}=-\frac{14\sqrt{6}}{5}.$$

Resolução da pergunta 3

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

Comecemos por notar que $A(3\cos\alpha, 3\operatorname{sen}\alpha)$ e $B(-3\cos\alpha, -3\operatorname{sen}\alpha)$.
Assim, $\overline{BC} = |-3\operatorname{sen}\alpha| = 3\operatorname{sen}\alpha$, pois $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.
A altura do triângulo $[ABC]$ relativamente à base $[BC]$ tem de medida a diferença entre as abcissas de C e A, ou seja

$$-3\cos\alpha - 3\cos\alpha = -6\cos\alpha.$$

A área do triângulo $[ABC]$ é portanto dada por

$$\frac{3\operatorname{sen}\alpha(-6\cos\alpha)}{2} = -9\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha.$$

Resolução da pergunta 4

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Seja α a amplitude so ângulo que a semi-reta $\dot{O}A$ faz com o semi-eixo positivo de Ox. Pretendemos saber a abcissa de $B(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$. Como $\tan\alpha = a$ então

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1 + a^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ então $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$.
A opção correta é a **(A)**.

Resolução da pergunta 5

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Notemos que $d(0)$ é a soma dos comprimentos da biela e da manivela.
Como $d(0) = \cos 0 + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2(0)} = 4$ e o comprimento da manivela é $1\,cm$ temos que a biela mede $(4-1)\,cm = 3\,cm$.
A opção correta é a **(B)**.

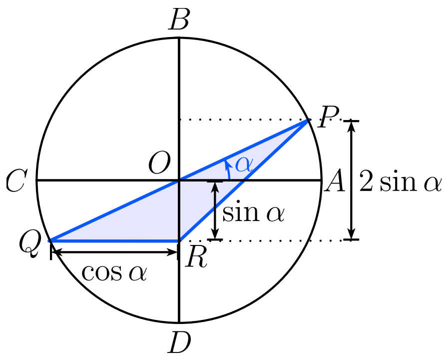
Resolução da pergunta 7

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

Comecemos por notar que $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$,
$Q(\cos(\alpha+\pi), \sin(\alpha+\pi)) = (-\cos\alpha, -\sin\alpha)$ e $R(0, -\sin\alpha)$.
Como $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ então $\cos\alpha > 0$ e $\sin\alpha > 0$ e temos

$$\begin{aligned} A_{[PQR]} &= \frac{-(-\cos\alpha)\times(\sin\alpha-(-\sin\alpha))}{2} \\ &= \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2} = \sin\alpha\cos\alpha \end{aligned}$$

e podemos concluir que a opção correta é a **(D)**.



Resolução da pergunta 6

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

$A\widehat{C}B = 180° - 57° - 81° = 42°$.
Pelo Teorema dos senos,

$$\frac{\sin 42°}{\overline{AB}} = \frac{\sin 81°}{5}$$
$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{5\sin 42°}{\sin 81°}$$
$$\Rightarrow \overline{AB} \approx 3.39.$$

A opção correta é a **(C)**.

Resolução da pergunta 9

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Sabemos que, num triângulo, ao maior lado opõe-se o ângulo de maior amplitude.
Assim, ao lado de comprimento 6 opõe-se o ângulo de amplitude α.
Pelo Teorema de Carnot,

$$\begin{aligned} & 6^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \cos\alpha \\ \Leftrightarrow\ & 40\cos\alpha = 5 \\ \Leftrightarrow\ & \cos\alpha = \frac{1}{8} \\ \Leftrightarrow\ & \alpha \approx 82.819244^\circ. \end{aligned}$$

Logo, $\operatorname{sen}\alpha \approx 0.992$.
Podemos concluir que a opção correta é a **(B)**.
Um outro modo de resolver o exercício, a partir da etapa $\cos\alpha = \frac{1}{8}$ é aplicar a fórmula fundamental da trigonometria:

$$\begin{aligned} & \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \operatorname{sen}^2\alpha + \frac{1}{64} = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{63}{64} \\ \Leftrightarrow\ & \operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{\sqrt{63}}{8}. \end{aligned}$$

Como $\alpha \in\,]0, 180^\circ[$, por ser a amplitude do ângulo interno de um triângulo, então $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{63}}{8} \approx 0.992$.

Resolução da pergunta 10

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

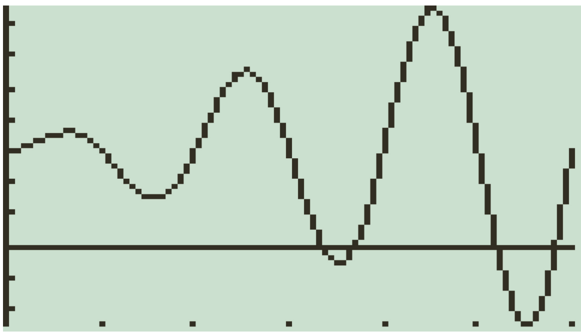
Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

$2\cos x+1=0 \Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{2}$.
Como $-\frac{2\pi}{3}\in[-\pi,0]$ e $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$ então a opção correta é a **(B)**.

Resolução da pergunta 11

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5

Introduzindo na calculadora gráfica as funções definidas por $y = d(t)$ e $y = 27$ obtemos os seguintes gráficos.



Podemos observar que os dois gráficos se intersetam quatro vezes no intervalo $[0, 6]$. No contexto da situação descrita, isso significa que, nos primeiros seis segundos, a criança que está a andar de baloiço fica quatro vezes a uma distância de 27 metros do muro.

Resolução da pergunta 12

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6

Sabemos das definições de seno e cosseno de um ângulo que $R(\cos\alpha, \sin\alpha)$ e $Q(\cos\alpha, 1)$. Como $\alpha \in 4.^\circ\ Q$ então $\cos\alpha > 0$ e $\sin\alpha < 0$ a área do trapézio $[OPQR]$ é dada por:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{QR}+\overline{PO}}{2} \times \overline{PQ} &= \frac{1+(-\sin\alpha)+1}{2} \times \cos\alpha \\ &= \cos\alpha - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2}\end{aligned}$$

e podemos concluir que a opção correta é a **(D)**.

Resolução da pergunta 14

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 7

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 13

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6

Como $d(0) = 1 + \frac{1}{2}\sin\left(0 + \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$ então pretende-se saber as soluções da equação $d(t) = \frac{5}{4}$.

$$
\begin{aligned}
&d(t) = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2}\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{4}\\
&\Leftrightarrow \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6}\\
&\Leftrightarrow \pi t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \pi t + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\\
&\Leftrightarrow t = 2k \vee t = \frac{2}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Vamos agora atribuir valores inteiros a k em cada uma das duas famílias de soluções de modo a encontrar as soluções pertencentes ao intervalo $[0,3]$.
No caso de $t = 2k$,

- para $k = -1$ temos $t = -2 \notin [0,3]$;
- para $k = 0$ temos $t = 0 \in [0,3]$;
- para $k = 1$ temos $t = 2 \in [0,3]$;
- para $k = 2$ temos $t = 4 \notin [0,3]$.

Podemos concluir que esta família admite 0 e 2 como soluções no intervalo $[0,3]$.
No caso de $t = \frac{2}{3} + 2k$,

- para $k = -1$ temos $t = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3} \notin [0,3]$;
- para $k = 0$ temos $t = \frac{2}{3} \in [0,3]$;
- para $k = 1$ temos $t = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3} \in [0,3]$;
- para $k = 2$ temos $t = \frac{2}{3} + 4 = \frac{14}{3} \notin [0,3]$.

Podemos concluir que esta família admite $\frac{2}{3}$ e $\frac{8}{3}$ como soluções no intervalo $[0,3]$.
Podemos concluir que os instantes, diferentes do inicial, em que o ponto P passou pelo ponto A durante os primeiros três segundos do movimento foram $\frac{2}{3}$ s, 2 s e $\frac{8}{3}$ s.

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6

Resolução da pergunta 8

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4

O quadrilátero $[ABCD]$ é um trapézio.
Pelas definições das razões trigonométricas temos $A(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $B(\cos\alpha, 0)$ e $D(0, \tan\alpha)$.
Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ então $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$ e $\tan\alpha > 0$ e a área do quadrilátero é dada por

$$\begin{aligned}
A_{[ABCD]} &= \frac{\overline{CD} + \overline{BA}}{2} \times \overline{BC} \\
&= \frac{\tan\alpha + \sin\alpha}{2} \times (1 - \cos\alpha) \\
&= \frac{\tan\alpha \times \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{2} \\
&= \frac{\tan\alpha}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2\sin\alpha\cos\alpha \\
&= \frac{\tan\alpha}{2} - \frac{1}{2} 2\sin\alpha\cos\alpha.
\end{aligned}$$

A opção correta é a **(B)**.

Resolução da pergunta 16

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 8

Vídeos da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

16.1

16.2

Resolução da pergunta 17

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 8

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 15

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 7

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 18

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 9

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 19

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 9

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 21

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 10

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 20

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 10

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

Resolução da pergunta 22

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 11

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

22.1

22.2

Resolução da pergunta 24

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 12

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):

24.1

24.2

Resolução da pergunta 23

Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 11

Vídeo da resolução (Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!):