

Trigonometria com calculadora - Exames

Perguntas de Exames Nacionais dos últimos 16 anos com resolução e/ou vídeo.
Versão de 3 de janeiro de 2022.
Verifique se existe versão com data mais recente [aqui](#) e aceda a mais fichas [aqui](#).

1. O mecanismo de manivela-biela é composto por uma manivela de comprimento fixo, que efetua um movimento de rotação (sempre no mesmo sentido), e por uma biela, também de comprimento fixo, que transforma esse movimento de rotação no movimento alternado de translação de um pistão.

Na Figura 1, está representado esse mecanismo.

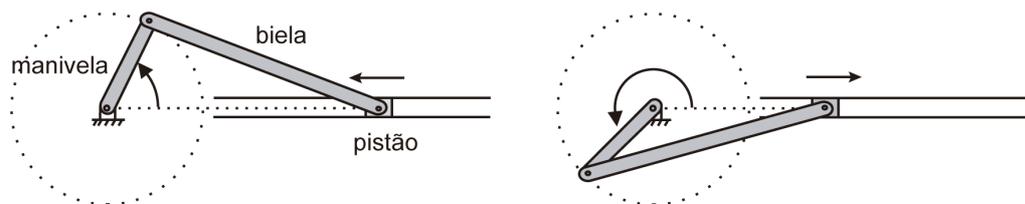


Figura 1

Na Figura 2, está representado um esquema do mecanismo descrito.

Relativamente a esta figura, sabe-se que:

- o ponto P representa o pistão;
- o segmento de reta $[OM]$ representa a manivela, que tem 1 cm de comprimento;
- o segmento de reta $[MP]$ representa a biela;

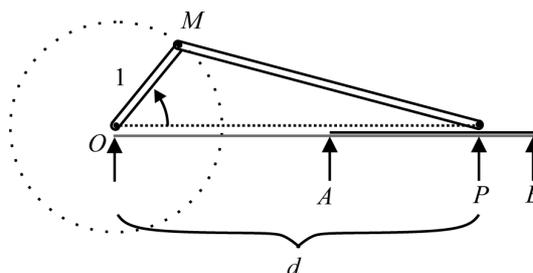


Figura 2

- os pontos A e B são os pontos em que a distância do pistão ao centro de rotação da manivela, O , é mínima e máxima, respetivamente;
- os pontos O , A , P e B são colineares.

Sabe-se que o movimento de rotação da manivela se inicia quando o pistão se encontra na posição B e que a manivela descreve voltas completas a uma frequência angular constante. Admita que a função que dá, em centímetros, a distância do pistão ao ponto O , em função do tempo, t , em segundos, contado a partir do instante em que é iniciado o movimento, é dada por

$$d(t) = \cos t + \sqrt{9 - \sin^2 t}, \quad t \geq 0$$

(o argumento das funções seno e cosseno está expresso em radianos).

Durante os primeiros cinco segundos, após o início do movimento, registou-se, num certo instante t_0 , a distância do pistão ao ponto O .

Sabe-se que, dois segundos após esse instante, a distância do pistão ao ponto O diminuiu 25%.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a distância, em centímetros, arredondada às décimas, do pistão ao ponto O no instante t_0 , sabendo-se que este valor existe e é único. Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

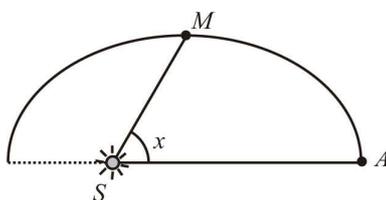
- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;
- apresente o valor pedido em centímetros, arredondado às décimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

[Resolução, pg. 7](#)

Exame nacional de 2020 - 1.ª fase

2. O planeta Mercúrio descreve uma órbita elíptica em torno do Sol. Na figura, está representado um esquema de uma parte dessa órbita.



Relativamente a esta figura, tem-se que:

- o ponto S representa o Sol;
- o ponto M representa o planeta Mercúrio;
- o ponto A representa o afélio, que é o ponto da órbita mais afastado do Sol;

- x é a amplitude do ângulo ASM , compreendida entre 0 e 180 graus. Admita que a distância, d , em milhões de quilómetros, do planeta Mercúrio ao Sol é dada, em função de x , por

$$d = \frac{555}{10 - 2.06 \cos x}.$$

Seja α a amplitude do ângulo ASM , num certo instante (α está compreendido entre 0 e 20 graus).

Nesse instante, o planeta Mercúrio encontra-se a uma certa distância do Sol.

Passado algum tempo, a amplitude do ângulo ASM é três vezes maior e a distância do planeta Mercúrio ao Sol diminuiu 3%.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de α , sabendo-se que esse valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor de α em graus, arredondado às unidades.

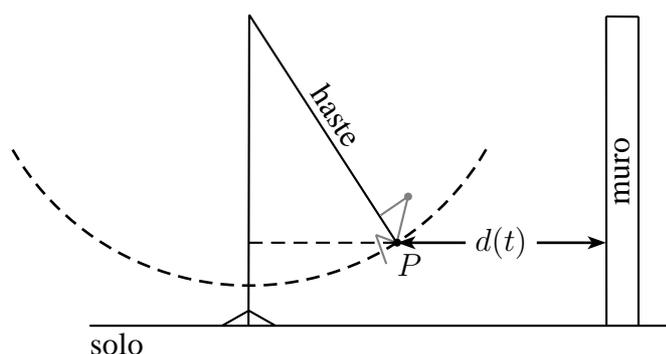
[Resolução, pg. 8](#)

Exame nacional de 2018 - 2.^a fase

3. Num jardim, uma criança está a andar num baloiço cuja cadeira está suspensa por duas hastes rígidas.

Atrás do baloiço, há um muro que limita esse jardim.

A figura esquematiza a situação. O ponto P representa a posição da cadeira.



Num determinado instante, em que a criança está a dar balanço, é iniciada a contagem do tempo. Doze segundos após esse instante, a criança deixa de dar balanço e procura parar o baloiço arrastando os pés no chão.

Admita que a distância, em decímetros, do ponto P ao muro, t segundos após o instante inicial, é dada por

$$d(t) = \begin{cases} 30 + t \sin(\pi t) & \text{se } 0 \leq t < 12 \\ 30 + 12e^{12-t} \sin(\pi t) & \text{se } t \geq 12 \end{cases}$$

(o argumento da função seno está expresso em radianos)

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o número de soluções da equação

$d(t) = 27$ no intervalo $[0, 6]$, e interprete o resultado no contexto da situação descrita.

Na sua resposta, reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema.

Resolução, pg. 9

Exame nacional de 2016 - 2.^a fase

4. Num dia de vento, são observadas oscilações no tabuleiro de uma ponte suspensa, construída sobre um vale.

Mediu-se a oscilação do tabuleiro da ponte durante um minuto.

Admita que, durante esse minuto, a distância de um ponto P do tabuleiro a um ponto fixo do vale é dada, em metros, por

$$h(t) = 20 + \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t) + t \sin(2\pi t) \quad (t \text{ é medido em minutos e pertence a } [0, 1])$$

Em $[0, 1]$, o conjunto solução da inequação, $h(t) < 19,5$ é um intervalo da forma $]a, b[$.

Determine o valor de $b - a$ arredondado às centésimas, recorrendo à calculadora gráfica, e interprete o resultado obtido no contexto da situação descrita.

Na sua resposta:

- reproduza o gráfico da função h visualizado na calculadora (sugere-se que, na janela de visualização, considere $y \in [19, 21]$);
- apresente o valor de a e o valor de b arredondados às milésimas;
- apresente o valor de $b - a$ arredondado às centésimas;
- interprete o valor obtido no contexto da situação descrita.

Resolução, pg. 10

Exame nacional de 2016 - 1.^a fase

5. De duas funções f e g sabe-se que:

- f tem domínio \mathbb{R} e é definida por $f(x) = \pi - 4\text{sen}(5x)$;
- g tem domínio $\left] -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3} \right[$ e g' , primeira derivada de g , tem domínio $\left] -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3} \right[$ e é definida por $g'(x) = \log_2 \left(-\frac{\pi}{6} - x \right)$.

Resolva o item seguinte recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Seja h a função, de domínio $\left] -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3} \right[$, definida por $h(x) = f(x) - g(x)$.

O ponto A pertence ao gráfico da função h .

Sabe-se que a reta tangente ao gráfico da função h no ponto A é paralela ao eixo Ox .

Determine a abcissa do ponto A .

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa do ponto com arredondamento às décimas.

Resolução, pg. 11

Exame nacional de 2011 - Época especial

6. Considere a função f , de domínio $]0, \pi[$, definida por $f(x) = \ln x \times \cos x$.
Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- A é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo Ox , que se situa mais próximo da origem O ;
- B é o ponto de intersecção do gráfico da função f com a reta bissetriz dos quadrantes pares.

Determine a área do triângulo $[OAB]$, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora. Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as coordenadas dos pontos A e B , arredondando às milésimas as coordenadas do ponto B ;
- desenhar o triângulo $[OAB]$, assinalando os pontos que representam os seus vértices;
- apresentar o resultado pedido, com arredondamento às centésimas.

Resolução, pg. 12

Exame nacional de 2010 - Época especial

7. Seja f a função, de domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, definida por $f(x) = \sin(2x) \cos x$.

No domínio indicado, determine, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, um valor, aproximado às décimas, da área do triângulo $[ABC]$, em que:

- A é o ponto do gráfico da função f cuja ordenada é máxima;
- B e C são os pontos de intersecção do gráfico da função f com a reta de equação $y = 0,3$.

Reproduza, na folha de respostas, o gráfico, ou gráficos, visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial.

Desenhe o triângulo $[ABC]$, assinalando os pontos que representam os seus vértices.

Nota: Nas coordenadas dos vértices em que é necessário fazer arredondamentos, utilize duas casas decimais.

Resolução, pg. 13

Exame nacional de 2009 - 2.ª fase

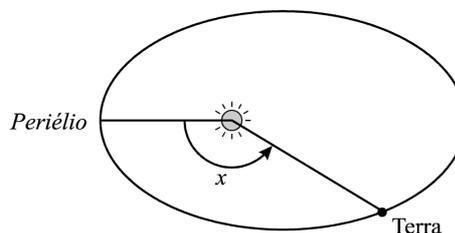
8. Como sabe, a Terra descreve uma órbita elíptica em torno do Sol.

Na figura está representado um esquema dessa órbita.

Está assinalado o *periélio*, o ponto da órbita da Terra mais próximo do Sol.

Na figura está assinalado um ângulo de amplitude x radianos ($x \in [0, 2\pi[$).

Este ângulo tem o seu vértice no Sol, o seu lado origem passa no *periélio* e o seu lado extremidade passa na Terra.



A distância d , em milhões de quilómetros, da Terra ao Sol, é (aproximadamente) dada, em função de x por $d = 149,6 (1 - 0,0167 \cos x)$.

Sabe-se que x verifica a relação $\frac{2\pi t}{T} = x - 0,0167 \sin x$, em que

- t é o tempo, em dias, que decorre desde a passagem da Terra pelo periélio até ao instante em que atinge a posição correspondente ao ângulo x ;
- T é o tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa (365,24 dias).

Sabe-se que a última passagem da Terra pelo periélio ocorreu a uma certa hora do dia 4 de Janeiro. Determine a distância a que a Terra se encontrava do Sol, à mesma hora do dia 14 de Fevereiro. Apresente o resultado em milhões de quilómetros, arredondado às décimas. Nos valores intermédios, utilize, no mínimo, quatro casas decimais.

Nota: a resolução desta questão envolve uma equação que deve ser resolvida graficamente, com recurso à calculadora; apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de algum, ou de alguns, ponto(s).

[Resolução, pg. 14](#)

Exame nacional de 2006 - 2.^a fase

Resoluções

Resolução da pergunta 1

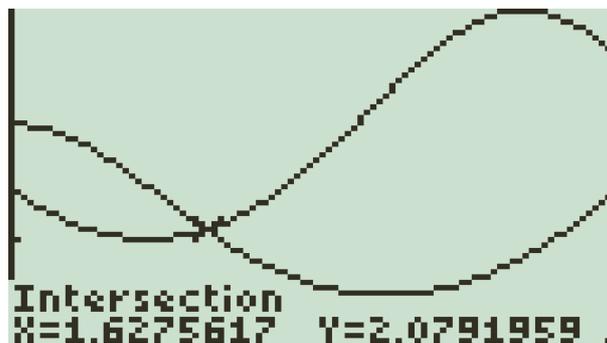
[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 1](#)

Vídeo da resolução: 

Começemos por notar que multiplicando uma quantidade por 0,75 esta reduz-se 25%. Deste modo, a equação que traduz o problema é

$$d(t_0 + 2) = 0,75d(t_0).$$

Recorrendo à calculadora gráfica obtemos parte dos gráficos das funções definidas por $y = d(t + 2) = \cos(t + 2) + \sqrt{9 - \sin^2(t + 2)}$ e $y = 0,75(\cos t + \sqrt{9 - \sin^2 t})$ e uma aproximação do seu ponto de interseção no intervalo $[0, 5]$.



Podemos concluir que $t_0 \approx 1.63$.

Como $d(t_0) \approx 2,8$, podemos concluir que a distância do pistão ao ponto O no instante t_0 é aproximadamente 2,8 cm.

Resolução da pergunta 2

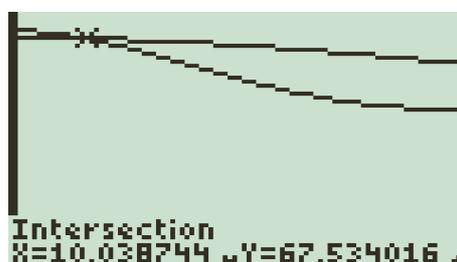
[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 2](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

O problema pode ser equacionado através da seguinte condição

$$\begin{aligned}d(3\alpha) &= 0.97 \times d(\alpha) \\ \Leftrightarrow \frac{555}{10 - 2.06 \cos(3\alpha)} &= 0.97 \times \frac{555}{10 - 2.06 \cos \alpha}.\end{aligned}$$

Recorrendo à calculadora gráfica obtemos os gráficos de $y = \frac{555}{10 - 2.06 \cos(3x)}$ e $y = 0.97 \times \frac{555}{10 - 2.06 \cos x}$ e uma aproximação do seu ponto de interseção $P(10.04; 67.53)$.

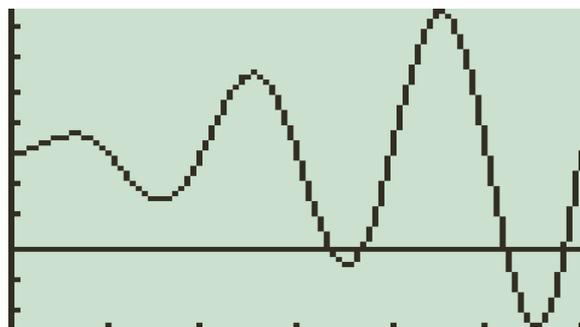


Logo, o valor do α pedido é aproximadamente 10° .

Resolução da pergunta 3

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 3](#)

Introduzindo na calculadora gráfica as funções definidas por $y = d(t)$ e $y = 27$ obtemos os seguintes gráficos.

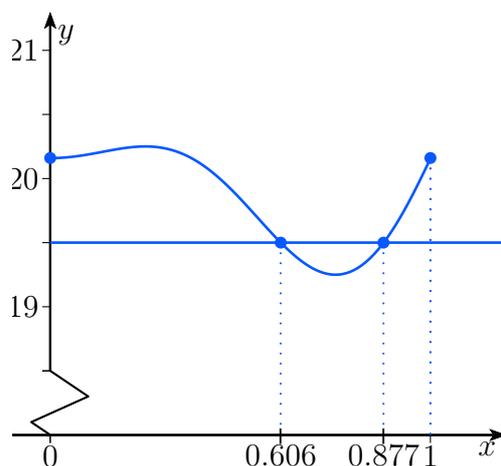


Podemos observar que os dois gráficos se interseçam quatro vezes no intervalo $[0, 6]$. No contexto da situação descrita, isso significa que, nos primeiros seis segundos, a criança que está a andar de baloiço fica quatro vezes a uma distância de 27 metros do muro.

Resolução da pergunta 4

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4](#)

A figura seguinte apresenta parte do gráfico de $y = h(t)$ em $t \in [0, 1]$ conjuntamente com a reta de equação $y = 19,5$ obtido numa calculadora gráfica.



Graficamente, podemos interpretar a condição $h(t) < 19,5$ como sendo os valores de $t \in [0, 1]$ para os quais o gráfico de h se encontra abaixo da reta de equação $y = 19,5$.

Podemos concluir tal situação ocorre para $t \in]0,606; 0,877[$.

Consequentemente $a \approx 0,606$, $b \approx 0,877$ e $b - a \approx 0,27$.

Podemos concluir que durante o período de medição, o ponto P do tabuleiro distou do ponto fixo do vale menos de $19,5$ m durante aproximadamente 0,27 minutos.

Resolução da pergunta 5

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 4](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 6

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 7

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 5](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 

Resolução da pergunta 8

[Voltar ao enunciado da pergunta, pg. 6](#)

Vídeo da resolução (**Reservado a inscritos. Inscreva-se neste link!**): 